
NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 05775337 2





LEÇONS

DE

PHYSIQUE GÉNÉRALE

PAR

James CHAPPUIS,
Agrégé, Docteur ès Sciences,
Professeur de Physique générale à l'École Centrale
des Arts et Manufactures.

Alphonse BERGET,
Docteur ès Sciences,
Attaché au Laboratoire des Recherches physiques
à la Sorbonne.

COURS PROFESSÉ A L'ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES
ET COMPLÉTÉ SUIVANT LE PROGRAMME DU CERTIFICAT DE PHYSIQUE GÉNÉRALE.

DEUXIÈME ÉDITION ENTIÈREMENT REFONDUE.

TOME I.

INSTRUMENTS DE MESURE. — PESANTEUR. — ÉLASTICITÉ.
STATIQUE DES LIQUIDES ET DES GAZ. — CHALEUR.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
55, Quai des Grands-Augustins.

1907

LEÇONS

DE

PHYSIQUE GÉNÉRALE.



PRÉFACE DE LA PREMIÈRE ÉDITION.

L'exposé et la discussion des méthodes expérimentales occupent, dans ces *Leçons de Physique générale*, la plus grande place; lorsque nous avons employé le calcul, c'est qu'il permettait un exposé plus court, plus clair et plus précis; il ne doit être pour le physicien qu'un auxiliaire, un instrument.

La fréquentation assidue des laboratoires de l'École Normale et du laboratoire de M. Lippmann, à la Sorbonne, nous avait mis à même de suivre de près d'importants travaux de Physique et nous avait familiarisés avec ce qu'a de plus délicat l'emploi des méthodes expérimentales.

Quant aux démonstrations et aux exposés théoriques, ils n'ont été, pour la plupart, adoptés qu'après avoir subi l'épreuve de l'enseignement à l'École Centrale, où l'un de nous professe depuis plusieurs années.

Comme l'indique le titre de cet Ouvrage, il constitue des leçons et non un traité; il ne faut pas y chercher l'exposé détaillé de toutes les questions qui peuvent intéresser le physicien : il existe d'excellents Traités généraux où tout l'ensemble de la Science est présenté dans les plus grands détails, et d'excellents Traités spéciaux où l'on trouve réuni tout ce qui en constitue une branche particulière. Nous avons cherché à exposer, aussi clairement que possible, les matières que comportent les pro-

grammes de la licence ès Sciences physiques et de l'enseignement des grandes Écoles, et ce qu'il est nécessaire de savoir pour aborder plus tard la lecture de ces Traités et des Mémoires originaux.

Nous avons cru devoir comprendre, dans notre cadre, l'étude des instruments de mesure, parce qu'il nous a paru impossible d'exposer la Physique sans avoir décrit les instruments qui servent à déterminer, d'une manière précise, les grandeurs fondamentales, données premières de tout problème dont l'expérience doit fournir la solution.

Dans l'étude de la chaleur, nous avons réduit la Calorimètrie à la seule méthode des mélanges; les autres procédés ont été renvoyés à des Chapitres spéciaux, après la Thermodynamique. M. Lippmann a donné à l'enseignement de cette dernière partie de la Science sa forme rationnelle et définitive : nous n'avons eu qu'à suivre la marche indiquée par lui.

Dès le début de l'Électricité dynamique et avec l'électrolyse, nous avons placé les phénomènes électrocapillaires : c'est, en effet, l'ensemble des travaux de M. Lippmann qui a éclairé d'un jour nouveau tout ce qui a trait à l'électrolyse et à la polarisation et a permis d'en pénétrer le véritable mécanisme; c'est aussi la merveilleuse sensibilité de son électromètre capillaire qui a rendu possibles les mesures vraiment précises des différences de potentiels.

L'Électricité et le Magnétisme n'ont pas été séparés : l'étude des feuillets magnétiques, de leurs propriétés, de leurs actions réciproques, conduit naturellement aux formules fondamentales de l'Électrodynamique; les expériences d'Ampère sont présentées comme vérifications de quelques cas particuliers de ces formules; la démonstration de l'équivalence d'un courant fermé et d'un feuillet de même contour a été exposée sous la forme simple que lui avait donnée Grassmann dès 1854.

Dans le troisième Volume, nous avons réuni tout ce qui est relatif aux vibrations : sonores, lumineuses, ou électriques. Nous avons fait précéder ces diverses études d'une introduction analytique, afin de permettre au lecteur qui se la sera assimilée d'aborder avec fruit l'étude d'un point quelconque d'Acoustique ou d'Optique. Les démonstrations qu'on trouvera dans ce troisième Volume ont, pour la plupart, la forme désormais classique que leur ont donnée Verdet ou Bertin; dans l'étude de la diffraction, nous avons tenu à joindre aux calculs de Fresnel la méthode géométrique si élégante de M. Cornu.

Tout notre désir est que ces Leçons aient conservé quelque chose des excellentes traditions de ce haut enseignement que nous avons reçu, l'un à l'École Normale et l'autre à la Sorbonne, et que l'on y trouve quelque peu les habitudes d'esprit que cherchaient à nous donner les Maîtres par lesquels nous avons été formés.



PRÉFACE DE LA DEUXIÈME ÉDITION.

Nos *Leçons de Physique générale* ont été rapidement épuisées. De nombreuses personnes nous avaient exprimé, déjà depuis plusieurs années, le désir d'en voir paraître une nouvelle édition. Nous avons, il y a cinq ans, refait entièrement le Tome II (*Électricité et Magnétisme*); c'est le Tome I (*Généralités, Gravitation, Chaleur*) que nous publions aujourd'hui pour la seconde fois.

Cette nouvelle édition comporte de nombreux changements; à notre époque, où quelques années suffisent à modifier profondément les théories et les méthodes de la Physique générale, les progrès de cette Science ont rendu nécessaire la refonte complète de notre Ouvrage.

Nous avons, pour la mise au point de cette seconde édition, fait appel à l'active collaboration de M. Lamotte, Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Clermont-Ferrand; le long séjour que ce physicien a fait dans les laboratoires de la Sorbonne l'avait préparé à ce genre de travail et désigné à notre choix; nous sommes heureux de lui adresser ici nos très vifs remercîments pour l'aide qu'il nous a apportée et pour la science qu'il a montrée dans l'accomplissement de cette laborieuse tâche.

J. C., A. B.

Paris, avril 1907.

LEÇONS

DE

PHYSIQUE GÉNÉRALE.

INSTRUMENTS DE MESURE.

I. — UNITÉS.

1. — SYSTÈMES D'UNITÉS ABSOLUES.

La Physique pourrait être définie la *science des mesures expérimentales*. Elle est la plus importante des Sciences d'observation, puisque toutes les autres lui empruntent et ses méthodes et ses instruments, et elle a pour but l'étude *qualitative* et *quantitative* des lois qui régissent les phénomènes naturels, toutes les fois que dans ces phénomènes la nature des corps étudiés n'est pas altérée.

Dans l'état actuel de nos connaissances toutes les grandeurs peuvent être évaluées en fonction de *trois unités* choisies arbitrairement, entre lesquelles n'existe aucune relation, et qu'on appelle les *unités fondamentales*. De ces trois unités irréductibles, quelles qu'elles soient, on peut déduire très simplement toutes les unités qui servent aux mesures des quantités mécaniques ou physiques et qui prennent le nom d'*unités dérivées;* leur ensemble forme ce qu'on appelle un *système absolu d'unités*.

On pourra former autant de systèmes absolus qu'on le désirera; il suffira pour cela de faire varier ou la *nature* ou la *valeur* des unités fondamentales.

1° **Système C.G.S.** — Les Physiciens ont adopté, *d'après une convention internationale,* un système absolu défini par le choix,

comme unités fondamentales, des trois unités de

Longueur, Masse, Temps,

dont les symboles sont les lettres L, M, T.

L'unité de *longueur* adoptée est le *centimètre,* C, défini comme la centième partie d'une règle de platine déposée aux Archives, la longueur de cette règle étant prise à la température de la glace fondante.

L'unité de *masse* est la *masse du gramme,* G, définie comme étant la millième partie de la masse d'un cylindre de platine, déposé aux Archives, et qui est l'étalon du *kilogramme-masse.*

L'unité de *temps* est la *seconde sexagésimale de temps moyen,* S.

Pour rappeler les unités choisies dans ce système, on le désigne par les lettres initiales des trois unités fondamentales sous le nom de *système absolu* C.G.S.

Si l'on a pris comme unité fondamentale la *masse* du gramme et non son *poids* qui est une force, la raison en est que, le poids étant relié à la masse par la relation

$$P = Mg,$$

où g est l'intensité de la pesanteur, on voit que le poids d'un corps varie avec g, c'est-à-dire avec la latitude et l'altitude, tandis que sa masse reste constante.

L'unité de longueur pourrait être la longueur d'onde dans le vide d'une radiation émise par une substance telle que le sodium, ou toute autre, caractérisée par un spectre de lignes bien nettes.

L'unité de temps devrait être la période des vibrations de la lumière dont la longueur d'onde aurait été choisie comme unité de longueur.

L'unité de vitesse serait alors la vitesse de la lumière.

2° **Système dans lequel la troisième unité fondamentale serait l'unité de force.** — Cependant, la notion de force est beaucoup plus communément répandue que la notion de masse, et dans le langage vulgaire, quand on parle d'un kilogramme, c'est au kilogramme-poids qu'on fait allusion et non au kilogramme-masse. Aussi avait-on d'abord choisi comme unité fondamentale l'unité de poids ou de force. Ce système absolu d'unités, qui comprend les unités *usuelles,* et en particulier celles dont on fait un usage courant dans l'industrie et dans le commerce, était donc défini par le choix de trois unités fondamentales de longueur, de force et de temps, dont les symboles

sont L, F, T; les unités de longueur et de temps y sont égales au centimètre et à la seconde, mais la troisième unité fondamentale est une unité de force et non de masse, le gramme-poids au lieu du gramme-masse. Ce système absolu pourrait donc être désigné par les lettres C. F. S.

Le système absolu C. G. S. restera le système universellement adopté pour les travaux scientifiques. Cependant, les ingénieurs et les industriels ne renonceront que difficilement à exprimer la pression en kilogrammes par centimètre carré, ou le travail en kilogrammètres, et, pour les commerçants qui vendront leurs produits au gramme, au kilogramme ou à la tonne, l'expression numérique de ces quantités figurera toujours des *poids relatifs* et non des *poids absolus*.

Et, en effet, la notion de poids absolu, c'est-à-dire de la résultante des actions de la pesanteur sur la masse du corps, Mg, serait très gênante dans la pratique et ne présenterait que des inconvénients pour les transactions, puisqu'un même corps n'aurait le même poids pour l'expéditeur et pour le destinataire que si tous deux étaient à la même latitude et à la même altitude.

Le *poids relatif* est le rapport entre le poids du corps P et le poids-gramme p (poids de l'unité de masse) à l'endroit considéré; on a les relations

$$P = Mg, \qquad p = 1.g,$$

d'où

$$\frac{P}{p} = M:$$

le poids relatif d'un corps s'exprime donc par le nombre qui mesure sa masse.

Il est, par conséquent, indispensable de connaître ces deux systèmes et d'en savoir faire usage.

2. — DIMENSIONS DES UNITÉS DÉRIVÉES.

Si l'on change la valeur d'une unité fondamentale, il est d'ailleurs facile de calculer la nouvelle expression numérique d'une quantité préalablement exprimée en fonction de la première unité.

Soient, en effet, n l'expression numérique d'une quantité et N la grandeur de l'unité primitivement choisie; si l'unité devient N', l'expression de la quantité sera n'; exprimons que l'unité N est comprise n fois dans la quantité à mesurer et que l'unité N' y est comprise

n' fois, nous aurons la relation

$$nN = n'N';$$

donc

$$\frac{n}{n'} = \frac{N'}{N}.$$

Le rapport des valeurs numériques d'une même quantité est égal au rapport inverse des grandeurs des unités qui ont été successivement employées à la mesurer.

Si l'unité est dérivée, et si elle varie par suite de changement d'unité fondamentale, le problème se complique, et il faut, pour calculer le rapport précédent, savoir comment l'unité dérivée dépend des fondamentales. On est conduit ainsi à définir ce qu'on appelle les *dimensions* des unités dérivées.

On appelle formule de dimension d'une unité dérivée la relation qui lie cette unité aux unités fondamentales.

Ainsi, par exemple, l'unité de surface est la surface du carré construit sur l'unité de longueur, c'est-à-dire que l'unité dérivée de surface varie comme le carré de l'unité fondamentale de longueur; ses dimensions sont représentées par le symbole

$$S = L^2,$$

et l'on dit que l'unité de surface est de dimension *deux en longueur, zéro en masse* et *zéro en temps.*

On a de même, pour l'unité de volume qui est le cube construit sur l'unité de longueur,

$$C = L^3,$$

et on la dit de dimension *trois en longueur.*

D'une façon générale, une unité dérivée N sera reliée aux trois unités fondamentales représentées par les symboles L, M, T, par une expression de la forme

$$N = L^\alpha M^\beta T^\gamma.$$

Cette formule exprime ce qu'on appelle les *dimensions de l'unité dérivée,* qui est de dimension α en longueur, β en masse, γ en temps.

Nous pouvons appliquer ces principes au calcul des dimensions des principales unités mécaniques.

1° **Dimensions des principales unités dérivées dans le système C.G.S.**

Vitesse V. — C'est le quotient d'un espace parcouru par un temps; on a donc

$$V = \frac{L}{T} = LT^{-1}.$$

L'unité de vitesse est la vitesse d'un mobile qui parcourt l'unité de longueur pendant l'unité de temps, soit dans le système C.G.S. un centimètre par seconde $\left(\text{symbole : } \frac{\text{cm}}{\text{sec}} \text{ ou cm.sec}^{-1}\right)$.

Vitesse angulaire ω. — L'unité est la vitesse d'un mobile qui parcourt l'unité d'angle en l'unité de temps; or l'unité d'angle est le *radiant*, arc de longueur égale au rayon qui est défini par un rapport numérique; il correspond à $\frac{360°}{2\pi} = 57°\,17'\,44''$; les dimensions de la vitesse angulaire sont donc $\omega = \frac{1}{T} = T^{-1}$.

Accélération γ. — C'est le rapport de l'accroissement de la vitesse à la variation du temps, c'est-à-dire le quotient d'une vitesse par un temps :

$$\gamma = \frac{V}{T} = LT^{-2}.$$

L'unité d'accélération est l'accélération d'un mobile dont la vitesse augmente d'une unité pendant l'unité de temps, soit de $1\,\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ par seconde $\left(\text{symbole : } \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2} \text{ ou cm.sec}^{-2}\right)$.

Force F. **Poids.** — C'est le produit d'une masse par une accélération; l'*unité théorique de force ou* dyne *est celle qui, agissant sur l'unité de masse pendant l'unité de temps, lui communique l'unité d'accélération;* on a donc

$$F = P = M\gamma = LMT^{-2}.$$

Ces dimensions sont donc celles de l'unité de poids.

L'*unité usuelle* de force est le *poids du gramme;* l'accélération qu'il imprime à l'unité de masse étant sensiblement, sous nos latitudes tout au moins, 981 unités, le gramme vaut, par conséquent, 981 dynes. La *dyne* est donc un poids de l'ordre de grandeur du *milligramme-poids.*

Intensité de la pesanteur. — L'intensité de la pesanteur g est l'action de la pesanteur sur l'unité de masse; c'est donc le quotient d'un poids par une masse et ses dimensions sont $g = \frac{P}{M}$ LT^{-2}, elles sont identiques à celles d'une accélération; ces intensités sont exprimées en dynes par gramme-masse.

Travail ou Énergie W. — Le travail est le produit d'une force par une longueur; l'*unité théorique de travail, ou* erg, *est le travail produit par l'unité de force quand son point d'application se déplace de l'unité de longueur dans sa propre direction;* on a donc

$$W = FL = L^2MT^{-2}.$$

Les ergs sont des dynes-centimètres.

L'*unité usuelle* de travail est le *kilogrammètre*, qui vaut $9,81.10^7$ ergs; c'est le travail qu'il faut dépenser pour élever un kilogramme à un mètre de hauteur.

Puissance $\mathfrak{P}$. — La puissance d'un moteur est le quotient d'un travail par le temps pendant lequel il a été effectué; l'*unité théorique de puissance ou* erg par seconde *est la puissance d'une machine produisant l'unité de travail en l'unité de temps;* ses dimensions sont donc fournies par

$$\mathfrak{P} = L^2MT^{-3}.$$

L'*unité usuelle* de puissance est le *cheval-vapeur,* qui vaut 75 kilogrammètres par seconde ou $75 \times 9,81.10^7$ ergs par seconde.

Le Congrès de Mécanique de 1889 a aussi proposé le *Poncelet,* qui vaut 100 kilogrammètres ou 981.10^7 ergs par seconde.

Quantité de mouvement. — L'unité de *quantité de mouvement* est la quantité de mouvement de l'unité de masse se déplaçant avec l'unité de vitesse; ses dimensions sont LMT^{-1}.

Densité D. — La densité absolue est le quotient d'une masse par son volume; l'*unité de densité est la densité d'un corps qui contient l'unité de masse dans l'unité de volume;* on a donc

$$D = \frac{M}{V} = L^{-3}M;$$

les densités sont exprimées en grammes-masse par centimètre cube.

Poids spécifique π. — Le poids spécifique est le quotient d'un poids par un volume; l'*unité de poids spécifique est le poids spécifique d'un corps qui pèserait une dyne par centimètre cube;* on a donc

$$\pi = \frac{P}{V} = L^{-2}MT^{-2};$$

les poids spécifiques sont exprimés en dynes par centimètre cube.

Pression p. — Une pression est le quotient d'une force par la surface sur laquelle elle s'exerce; *la pression unité est donc une dyne par centimètre carré;* et l'on a

$$p = \frac{F}{S} = L^{-1}MT^{-2}.$$

2° **Dimensions des principales unités dérivées dans le système C.F.S.** — On peut calculer de la même façon les dimensions des principales unités dérivées dans le système absolu C.F.S. Nous résumons ce travail dans un Tableau de comparaison :

Grandeurs.		C.G.S.	C.F.S.
Longueur	L	L	L
Surface	S	L^2	L^2
Volume	V	L^3	L^3
Temps	T	T	T
Vitesse	v	LT^{-1}	LT^{-1}
Vitesse angulaire	ω	T^{-1}	T^{-1}
Accélération (Intensité du champ terrestre)	γ	LT^{-2}	LT^{-2}
Masse	M	M	$L^{-1}FT^2$
Densité absolue ou masse spécifique	D	$L^{-3}M$	$L^{-4}FT^2$
Moment d'inertie	I	L^2M	LFT^2
Force	F. P.	LMT^{-2}	F
Travail, énergie	W	L^2MT^{-2}	LF
Puissance	$\mathfrak{P}$	L^2MT^{-3}	LFT^{-1}
Pression	p	$L^{-1}MT^{-2}$	$L^{-2}F$
Tension superficielle	τ	MT^{-2}	$L^{-1}F$
Poids spécifique	π	$L^{-2}MT^{-2}$	$L^{-3}F$

On établirait de même les dimensions des unités dans un système défini par le choix de trois autres unités fondamentales indépendantes, par exemple la surface S, la vitesse v et la force F, en considérant toutes les égalités écrites au paragraphe 5 comme un système de n équations à n inconnues qu'on aurait à résoudre par rapport à L, V, T, etc., en y considérant S, v, F comme les termes connus.

3° **Système pratique.** — L'adoption d'une échelle commune pour toutes les quantités entraîne l'usage fréquent de nombres très grands et très petits; la façon la plus commode d'écrire ces nombres consiste à les exprimer comme un produit de deux facteurs dont l'un est une puissance de 10; il y a avantage, pour les calculs, à effectuer la décomposition, de telle sorte que l'exposant de la puissance de 10 soit la caractéristique du logarithme du nombre

$$3240000000 = 3,24.10^9 \qquad 0,00000324 = 3,24.10^{-6}.$$

Pour abréger la lecture de ces nombres, on fait usage dans le langage des multiples ou des sous-multiples désignés par les préfixes : hecto, kilo, méga (un million de), ou milli, micro (un millionième de).

En appliquant, en particulier, le système C. G. S. à l'électricité, on a été conduit à des unités dérivées dont la plupart sont, ou beaucoup trop grandes, ou beaucoup trop petites, relativement aux quantités que l'on a à exprimer dans l'industrie; de sorte que les nombres qui représentent les valeurs numériques de ces quantités sont, inversement, ou très petits, ou très grands; ce qui n'est pas *pratique*.

C'est ainsi, par exemple, que la résistance électrique d'un fil de fer de 100^m de long et 4^{mm} de diamètre serait exprimée par environ 10^9 unités C.G.S. de résistance.

On a alors adopté un système d'unités dérivées, dites *pratiques*, qui sont des multiples ou sous-multiples des unités C.G.S., et dont l'utilité ne se fait vraiment sentir que dans les industries qui se rattachent à l'électricité.

Dans ce système, l'unité de travail porte le nom de *joule*, et l'unité de puissance celui de *watt*.

Les unités fondamentales C. G. S., qui correspondent à ce système, sont 10^9 centimètres pour la longueur, 10^{-11} grammes-masse pour la masse et 1 seconde pour le temps.

Inversement, le joule vaut 10^7 ergs et, par conséquent, $\frac{1}{9,81}$ kilogrammètres; enfin le kilowatt vaut 1,36 cheval-vapeur et le cheval-vapeur vaut 736 watts.

Grandeurs.	Unités C. G. S.	Unités usuelles.	Unités pratiques.
Force	dyne	gramme	»
Travail	erg	kilogrammètre	Joule
Puissance	erg. à la 1ˢ	cheval-vapeur	Watt

L'énoncé de ces relations numériques entre les *unités usuelles*, employées généralement dans toutes les industries mécaniques, et les *unités pratiques*, réservées aux industries électriques, fait bien sentir toute la complexité de ces problèmes relatifs au choix des unités et la nécessité, pour les savants, d'un système absolu unique universellement adopté : le système C. G. S.

4° **Homogénéité des formules.** — Quelles que soient les unités adoptées pour l'expression numérique de quantités physiques, qui sont liées entre elles par une relation, celle-ci doit toujours être vérifiée.

Lorsque le physicien est arrivé, dans une recherche, à une équation, il doit vérifier que les dimensions de chaque terme, par rapport aux unités fondamentales, sont les mêmes; sans quoi l'équation est absurde et il y a lieu de rechercher une erreur commise dans les calculs.

On peut remplacer les termes de l'expression algébrique de la quantité à mesurer par leurs valeurs en fonction des unités fondamentales.

Ainsi l'équation

$$e = at + bt^2,$$

dans laquelle e exprime une longueur et t un temps, n'est possible que si a est une vitesse $v = \frac{l}{t}$ et b une accélération $\gamma = \frac{l}{t^2}$; on a, en effet, en exprimant tout en fonction des unités fondamentales,

$$l = vt + \gamma t^2 = \frac{l}{t} t + \frac{l}{t^2} t^2,$$

équation qui est homogène.

Dans le système C. G. S., l'équation de Newton,

$$F = K \frac{MM'}{R^2},$$

contient un facteur K, dont on peut calculer les dimensions en remplaçant F, M et R par leurs dimensions respectives; on trouve ainsi

$$K = L^3 M^{-1} T^{-2}.$$

Ce n'est donc pas un simple facteur numérique, mais bien une grandeur physique.

II. — MESURE DES LONGUEURS.

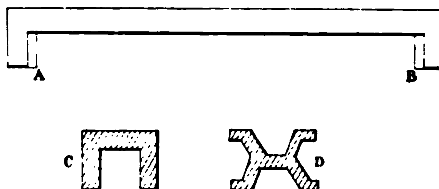
3. — ÉTALONS DE LONGUEUR.

L'unité C.G.S. de longueur est le centimètre; c'est approximativement la billionième partie du quadrant terrestre et en réalité la centième partie du mètre étalon déterminé par Delambre et Borda, et déposé au Bureau international des Poids et Mesures de Sèvres. L'instrument fondamental sera donc une longueur égale à l'unité ou à l'un de ses muliples. Le multiple adopté est le *mètre,* qui vaut 100 centimètres.

L'étalon de longueur devra être une règle qui, dans des conditions déterminées de température, présente une longueur égale à 1 mètre. On distingue deux sortes d'étalons : les étalons prototypes et les étalons secondaires.

Les étalons prototypes sont, en général, construits en platine iridié. Pour leur donner la rigidité que comporte la longueur invariable qu'ils doivent avoir, leur section est en forme d'X ou de Π (*fig.* 1). On les conserve dans une enceinte dont la température est

Fig. 1.



zéro. Quant aux étalons secondaires, on les fait soit en platine, soit en bronze, soit en maillechort; on en distingue deux variétés : les mètres à *bouts* et les mètres à *traits.*

Un mètre à bouts est une règle dont la longueur totale représente le mètre, par la distance entre les deux plans perpendiculaires à son axe qui en forment les deux extrémités. Quelquefois aussi, le mètre à bouts a la forme représentée sur la figure 1; le mètre est alors la distance qui sépare les faces en regard des deux becs A et B de l'instrument.

Dans les mètres à traits, au contraire, la longueur est définie par la

distance de deux traits parallèles et très fins tracés dans le voisinage des deux extrémités, soit sur le métal même de la règle, soit sur des mouches d'argent fixées à ce métal. Ce sont ces derniers mètres qui sont le plus en usage, à cause de la facilité plus grande avec laquelle on pointe un trait dans une lunette ou dans un microscope.

Nous verrons plus loin comment on compare entre elles deux règles qui doivent avoir des longueurs égales; en tous cas, on doit connaître l'erreur propre de chaque règle étalon qu'on emploie dans les laboratoires, erreur toujours très petite.

Les étalons secondaires sont généralement divisés en centimètres sur toute leur longueur, et le dernier centimètre de chaque extrémité est divisé lui-même en millimètres et demi-millimètres.

Une fois en possession d'une règle étalon, on s'en sert pour lui comparer les autres longueurs, à l'aide des instruments de mesure dont nous allons maintenant parler. Ces instruments doivent surtout permettre d'apprécier les fractions d'unité avec exactitude : ils ont pour cela deux organes principaux qui sont le *vernier* ou la *vis micrométrique*.

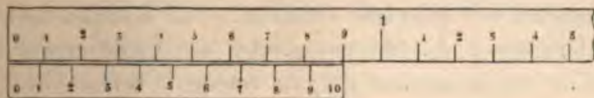
4. — VERNIER.

Imaginons une règle divisée en millimètres et supposons qu'on veuille apprécier le $\frac{1}{10}$ de millimètre.

Nous nous servirons pour cela d'une petite règle qui glisse parallèlement à la règle principale et qu'on appelle la *réglette*. Nous lui donnerons une longueur totale de 9^{mm} et nous la diviserons en dix parties égales, en numérotant ses divisions dans le même sens que celles de la règle principale.

Cela posé, supposons que le zéro du vernier coïncide avec le zéro de la règle (*fig.* 2). Chaque division du vernier vaut $\frac{9}{10}$ de millimètre;

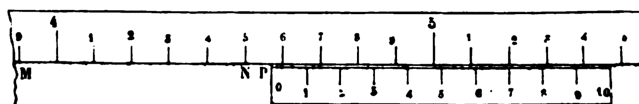
Fig. 2.



comme chaque division de la règle vaut $\frac{10}{10}$ de millimètre, le trait 1 du vernier sera en retard de $\frac{1}{10}$ de millimètre sur le trait 1 de la règle; le trait 2 sera en retard de $\frac{2}{10}$ de millimètre sur le trait 2 de la règle, et ainsi de suite jusqu'au trait 10 du vernier qui est en retard de $\frac{10}{10}$ de millimètre sur le trait 10 de la règle, ce qui doit être par construction.

Voici comment on se sert de cet appareil : pour mesurer une longueur, on met l'une de ses extrémités en coïncidence avec le zéro de la règle principale, et on lit la division de la règle qui marque *par défaut* le point où s'arrête l'extrémité P (*fig.* 3). Dans le cas de la figure c'est 45. La longueur à mesurer est donc de 45^{mm}, plus la fraction NP. Pour évaluer cette fraction, on fait glisser le vernier jusqu'à

Fig. 3.

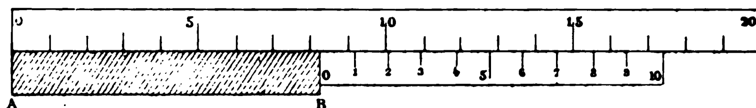


ce que son zéro coïncide avec le point P, et l'on cherche quelle est celle de ses divisions qui coïncide avec une division de la règle. C'est la septième dans le cas de la figure; je dis que la fraction NP est égale à $\frac{7}{10}$ de millimètre.

En effet, si nous partons de la division 7 pour aller vers le zéro du vernier, nous voyons que la division 6 est en retard de $\frac{1}{10}$ de millimètre, la division 5 de $\frac{2}{10}$; la division 4 de $\frac{3}{10}$, ..., et la division zéro de $\frac{7}{10}$ de millimètre.

Il peut arriver pourtant qu'il n'y ait aucune coïncidence de division, et que deux divisions consécutives du vernier soient comprises entre deux divisions consécutives de la règle : c'est le cas représenté sur la figure 4, où les traits 2 et 3 du vernier tombent entre deux divisions de la règle.

Fig. 4.



Alors, AB étant la longueur à mesurer, nous voyons que cette longueur est égale à 8^{mm} plus une fraction; cette fraction est supérieure à $\frac{2}{10}$ et inférieure à $\frac{3}{10}$. On commettra donc une erreur inférieure à $\frac{1}{10}$ de millimètre en prenant comme valeur de la fraction $\frac{1}{2}(\frac{2}{10} + \frac{3}{10})$, c'est-à-dire $\frac{5}{20}$. C'est ce cas qui se présente généralement.

D'après ce qui précède, on voit que l'on pourra faire des verniers permettant d'apprécier n'importe quelle fraction du millimètre. Ainsi, pour avoir un vernier au $\frac{1}{50}$ de millimètre, nous donnerons à la réglette une longueur de 49^{mm} et nous la diviserons en cinquante parties égales. C'est au $\frac{1}{50}$ de millimètre que sont les verniers des cathéto-

mètres de l'Ecole Centrale et du Laboratoire des recherches physiques de la Sorbonne.

Il n'est guère possible de dépasser pratiquement cette approximation avec le vernier, car l'épaisseur des traits serait alors de l'ordre de grandeur de la fraction qu'il s'agit d'évaluer, et l'on hésiterait à placer la coïncidence à telle ou telle division. La lecture du vernier au $\frac{1}{50}$ exige déjà une certaine habitude, et il est bon de s'aider d'une loupe pour en faire l'observation.

Vérification du vernier. — Chaque fois que l'on a entre les mains un vernier adapté à une règle graduée, il faut commencer par le vérifier. Pour cela, on amène le zéro de la réglette en coïncidence avec une division arbitraire de la règle; la division extrême du vernier doit également coïncider avec une division de la règle principale. C'est la condition absolue pour qu'on puisse se servir de l'instrument, et il faut, avant toute mesure, s'assurer qu'elle est remplie. Ajoutons que c'est un moyen de vérifier aussi la division de la règle : quel que soit le numéro de la division sur laquelle on place le zéro du vernier, le trait 10 du vernier doit être, lui aussi, en coïncidence.

Nous verrons, à la mesure des angles, comment le vernier s'applique aux cercles divisés pour en apprécier les fractions de division.

5. — VIS MICROMÉTRIQUE.

Le vernier, comme nous venons de le voir, ne permet guère d'aller au delà du $\frac{1}{50}$ de millimètre. La vis micrométrique permet d'aller jusqu'à $\frac{1}{1000}$.

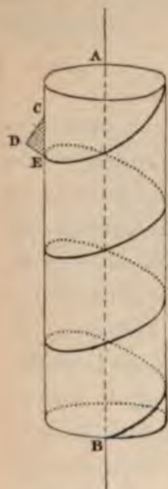
Imaginons une hélice à pas constant tracée sur un cylindre droit à base circulaire (*fig.* 5) et supposons qu'un profil triangulaire DCE se déplace de telle façon que le sommet E s'appuie toujours sur la courbe, la base CE coïncidant toujours avec une génératrice et son plan passant toujours par l'axe AB du cylindre. Dans ces conditions, la surface extérieure du système formé par le cylindre et le corps engendré par le mouvement du triangle constitue une *vis*.

Si nous considérons le même point du triangle dans deux positions successives sur la même génératrice, nous voyons immédiatement que leur distance est égale au *pas* de l'hélice. On peut donc se servir de cette distance pour définir le *pas* d'une vis, qui est toujours égal, d'ailleurs, au pas de l'hélice génératrice. La surface hélicoïdale engendrée par le mouvement du triangle s'appelle *filet :* on voit que, si

l'on remplace le triangle par une autre figure plane, on aura des vis de divers aspects que l'on nomme pour cela *vis à filet triangulaire, vis à filet carré*, etc.

Dans la plupart des vis à filet triangulaire, le triangle générateur est isoscèle et sa base a une longueur égale au pas de l'hélice : tous les filets se touchent donc suivant l'hélice elle-même. Dans les vis à filet carré, la hauteur du rectangle générateur est presque toujours égale à la moitié du pas.

Fig. 5.



La vis n'est pas complète sans un *écrou*.

L'écrou est une pièce qui est, en creux, ce que la vis est en relief, et qui se moule exactement sur elle. En considérant le système formé par une vis et son écrou, on voit immédiatement que, si ce dernier reste fixe, la vis progressera d'une longueur égale à un pas, suivant son axe, chaque fois qu'on lui fera faire un tour. Si c'est la vis qui est assujettie à ne pouvoir que tourner sans avancer, et que ce soit, au contraire, l'écrou qui puisse avancer sans tourner, ce qui arrive s'il est guidé par une glissière, à chaque tour de la vis l'écrou avancera d'une longueur égale au pas de la vis.

On voit qu'une vis sera parfaite quand elle avancera toujours de la même longueur pour le même nombre de tours. Cela suppose qu'elle tourne aussi dans un écrou parfait.

Quand l'écrou ne serre pas bien la vis, il arrive que celle-ci progresse bien régulièrement tant qu'on tourne dans un sens; mais le mouvement en sens contraire ne commence pas en même temps que la rotation en sens contraire. Cette cause d'erreur s'appelle le *temps perdu*.

Si nous imaginons une vis parfaite et qui n'ait pas de temps perdu, il résulte des propriétés géométriques de l'hélice, qui sont aussi celles de la vis, que, si la vis progresse d'une longueur l quand on la fait tourner de 2π, elle progressera de $\frac{l}{n}$ pour une rotation de $\frac{2\pi}{n}$: de là l'application de la vis à la mesure des petites longueurs; il suffit d'amener la pointe d'une vis bien faite en regard d'une extrémité de l'objet à mesurer, et de compter le nombre de tours et de fractions de tour que la vis doit effectuer pour avoir sa pointe en regard de l'autre extrémité de l'objet. Nous verrons plus tard comment ces conditions

sont réalisées dans les instruments de mesure qui, comme le sphéromètre et le comparateur, ont une vis micrométrique comme organe principal.

Mais là n'est pas la seule application de la vis; elle sert d'organe moteur toutes les fois que l'on veut imprimer à un organe particulier d'un instrument de Physique un déplacement continu et très petit : les vis de rappel et les vis calantes en sont deux applications.

6. — NIVEAU A BULLE.

Il ne suffit pas de savoir mesurer une très petite longueur avec précision; il faut encore pouvoir disposer, dans beaucoup de mesures, d'une direction invariable. La direction généralement choisie est celle de la verticale.

Quand on ne veut que connaître la verticale approximativement, sans avoir besoin d'une grande précision, on se contente de faire coïncider la ligne qu'on veut rendre verticale, ou une ligne parallèle avec un *fil à plomb,* instrument trop connu pour qu'il soit nécessaire de le décrire.

Mais, dans bien des cas, cette approximation est insuffisante; on a alors recours à un instrument très précis : le *niveau à bulle*.

Son organe principal est une fiole dont la surface interne appartient à un tore de très grand rayon A (*fig.* 6). Cette fiole est remplie presque complètement d'un liquide très fluide, au-dessus duquel se trouve une bulle de sa vapeur : pour cela, avant de fermer le tube

Fig. 6.



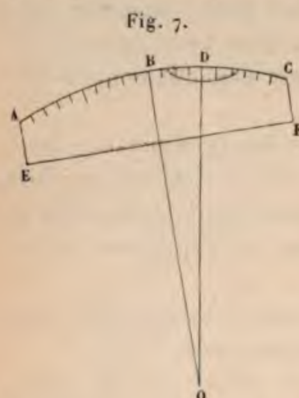
à la lampe, on fait bouillir le liquide; l'air est ainsi entraîné. En vertu des lois de l'Hydrostatique, cette bulle occupe constamment le point le plus élevé du niveau.

On voit que la dénomination de *niveau à bulle d'air,* presque toujours appliquée à l'appareil, est tout à fait inexacte.

La fiole ainsi remplie est généralement placée, après avoir été graduée arbitrairement en parties égales, dans une monture en métal évidée, comme le montre la figure; cette monture elle-même est fixée, à l'aide d'une charnière et d'une vis de réglage que l'on voit à droite, sur une petite règle bien plane qui sert de base à l'appareil entier.

Lecture du niveau. — Supposons l'instrument placé sur une surface dont l'inclinaison soit très faible, et considérons la section méridienne du tore auquel appartient la surface intérieure de la fiole (*fig.* 7). Nous avons figuré la division arbitraire tracée sur le tube ABCD. Soit O le centre de l'arc ABCD; la bulle se placera de façon que son milieu D soit situé au point où la tangente est horizontale : le rayon en ce point est donc vertical.

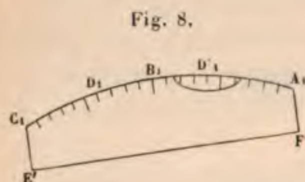
Fig. 7.



On appelle *lecture du niveau* la moyenne des chiffres de la graduation auxquels s'arrêtent respectivement les deux extrémités de la bulle.

Deux lectures du niveau, faites successivement en retournant l'instrument bout pour bout, permettent de déterminer le milieu B de la partie convexe; car, si l'on a noté la lecture D_1 du niveau dans la première position et qu'on fasse la lecture D'_1 après le retournement (*fig.* 8), on sait que le point B sera le milieu de $D_1 D'_1$; on aura donc sa position sur l'échelle en prenant la moyenne arithmétique des lectures D_1 et D'_1.

Fig. 8.



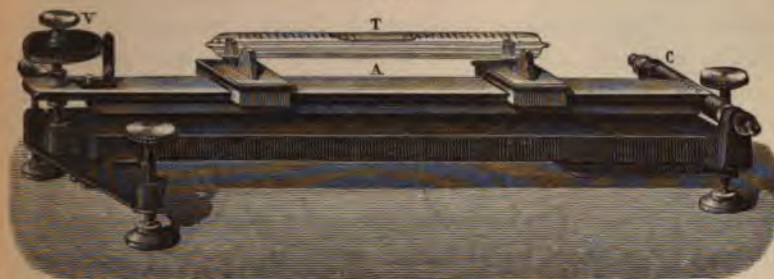
Valeur angulaire d'une division. — Il est essentiel, quand on possède un niveau, de savoir si la section méridienne de la surface canal à laquelle appartient l'intérieur du tube est bien un cercle, et de savoir à quelle inclinaison de l'instrument correspond un déplacement d'une division effectué par la bulle. On se sert, pour cela, de l'appareil appelé *examinateur de niveaux* (*fig.* 9).

C'est un solide bâti de fonte, ayant la forme d'un T, et reposant sur trois vis calantes. Une pièce A, mobile autour d'un axe C, est placée presque parallèlement au banc; on lui imprime de légers

déplacements angulaires à l'aide d'une vis micrométrique V. Le niveau à étudier, T, est placé sur cette pièce.

Soit a le pas de la vis micrométrique, l la distance qui sépare le

Fig. 9.



point où elle s'appuie sur le banc de l'axe horizontal C; tournons la vis d'un tour entier : l'inclinaison que nous donnons ainsi à la règle, supposée horizontale d'abord, sera

$$\alpha = \frac{a}{l \sin 1''};$$

en faisant ainsi tourner l'appareil de quantités égales, on observe si les déviations de la bulle sont aussi égales; dans ce cas, le tube est convenablement courbé, et alors on cherche le nombre de tours et de fractions de tour qu'il faut imprimer à la vis micrométrique V pour déplacer la bulle d'une division.

Soient n le nombre de tours et p le nombre de centièmes de tour; on a alors un angle φ donné par la relation

$$\varphi = \frac{na + 0{,}01\,ap}{l \sin 1''};$$

cet angle φ se nomme la *constante du niveau*.

Si, pour des inclinaisons égales de la règle mobile A, la bulle ne se déplaçait pas de quantités égales, le niveau aurait une courbure intérieure irrégulière. Il faudrait alors dresser empiriquement une Table de graduation de l'instrument, division par division.

Réglage d'un niveau monté. — Dans tous les instruments de Physique qui comportent l'adjonction d'un niveau, cet instrument est monté dans une gaine métallique portée elle-même par une règle, comme le montre la figure 6. Ainsi construit, la bulle doit être dans

la position médiane du tube quand la réglette de laiton repose sur un plan rigoureusement horizontal. Voici comment on réalise cette condition :

En général, le parallélisme de la bulle et de la réglette est très près d'être atteint : on pose donc l'instrument sur un support à vis calantes et l'on règle ces dernières de façon à amener la bulle à sa position médiane : cela fait, on retourne le niveau bout pour bout. Si la bulle garde la même position, le réglage est parfait; sinon, on observe un certain écart ε, que l'on ramène, à l'aide de la vis spéciale que l'on voit à droite sur la figure 6, à n'être plus que $\frac{\varepsilon}{2}$; on retourne alors le niveau de façon à lui faire occuper sa position première : la bulle est au zéro, ou n'en diffère que d'un écart $\varepsilon' < \varepsilon$; on agit encore sur la vis de façon à le ramener à la valeur $\frac{\varepsilon'}{2}$; au bout de deux ou trois opérations, on arrive au réglage définitif.

Usage du niveau. — La sensibilité du niveau à bulle peut être poussée très loin : les instruments d'Astronomie et de Géodésie sont munis de niveaux accusant des inclinaisons de $0'',01$. On comprend donc que des instruments aussi sensibles soient extrêmement délicats et ne soient précis qu'à condition d'être maniés avec des précautions tout à fait spéciales.

Ainsi un niveau constitue, dans de certaines limites, un véritable thermomètre : il faudra donc lui éviter les variations brusques de température, qui agissent inégalement sur la fiole, sur la monture, sur le liquide, qui modifient la tension superficielle et la viscosité de ce dernier. On ne devra donc pas, pour une lecture faite dans l'obscurité, approcher la lampe trop près de l'instrument; il faudra, au contraire, observer avec une lentille à long foyer; en un mot, prendre toutes les précautions que la pratique nous a enseignées pour la manipulation du thermomètre de précision.

7. — MICROSCOPE MICROMÉTRIQUE.

Le microscope micrométrique est un instrument d'Optique qui sert à apprécier avec une très grande précision les fractions de division d'une règle ou d'un limbe circulaire.

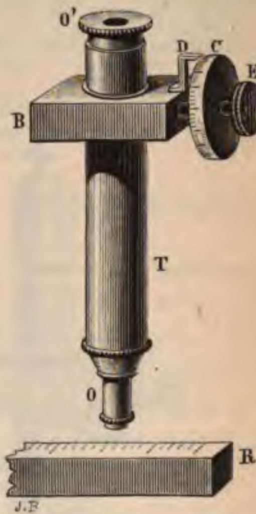
Le vernier ne peut pas, en effet, avoir une division poussée trop loin : il y aurait incertitude sur la coïncidence, et, si l'on augmentait la valeur absolue du dénominateur n de la fraction qui marque l'ap-

proximation, on augmenterait l'erreur relative commise sur le numérateur. Aussi, en pratique, ne doit-on pas, dans les règles, dépasser $\frac{1}{50}$ de millimètre pour la lecture du vernier.

On pousse la précision de la subdivision beaucoup plus loin à l'aide du microscope micrométrique.

Cet instrument se compose d'un microscope ordinaire T (*fig.* 10) muni d'un objectif O à faible grossissement, et d'un oculaire O′ qui est muni d'un tirage spécial relativement au reste du tube. Dans le plan focal de cet oculaire se trouve une boîte B dans laquelle se meut horizontalement un châssis commandé par une vis micrométrique C: ce châssis porte les deux fils du réticule mobile.

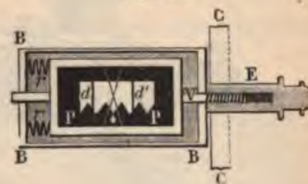
Fig. 10.



La figure 11 représente l'intérieur de la boîte B et l'aspect du champ : on commence, en manœuvrant le tirage O′, par mettre au point sur le réticule; puis, à l'aide de la vis C, on amène celui-ci en regard du milieu d'un peigne fixe dont on voit les dents en PP, dans le champ; la dent médiane est marquée par un petit trou. L'axe optique du microscope est alors défini par la ligne qui joint la croisée des fils au centre optique de l'objectif.

Cela fait, on met au point sur le ou les traits de la règle; on voit en *dd′* les images de deux traits consécutifs. Pour déterminer la fraction de division qui sépare la croisée des fils de l'image *d*, on manœuvre la vis micrométrique à l'aide de l'écrou E, jusqu'à ce que la croisée des fils coïncide avec *d* : on compte les tours au moyen des dents du peigne P, les fractions de tour au moyen du tambour C, divisé, et de l'index fixe D. On arrive ainsi à une subdivision des traits de la règle poussée beaucoup plus loin et avec infiniment plus de précision qu'avec le vernier : c'est à l'aide du microscope micrométrique que l'on a pu comparer les longueurs des étalons du mètre *à un cent-millième de millimètre près.*

Fig. 11.



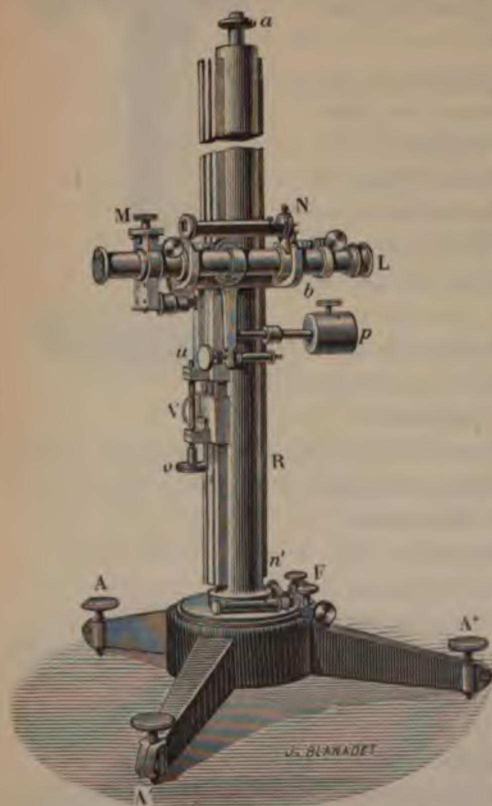
Nous allons, maintenant que nous en connaissons les organes

essentiels, décrire les instruments proprement dits qui servent à mesurer les longueurs : cathétomètre, comparateur, sphéromètre et machine à diviser.

8. — CATHÉTOMÈTRE A UNE LUNETTE.

Le cathétomètre se compose essentiellement d'une règle verticale divisée, le long de laquelle peut se mouvoir une lunette rigoureusement horizontale ; on pourra, de la sorte, par deux visées successives, déterminer la distance verticale de deux points situés à des niveaux différents.

Fig. 12.



Cet instrument, en germe dans les expériences de Gay-Lussac sur les tubes capillaires, a été réalisé pour la première fois sous une forme précise par Dulong et Petit dans l'expérience qu'ont instituée ces savants pour mesurer le coefficient absolu de dilatation du mercure.

Voici la disposition d'un cathétomètre précis : La pièce principale est une colonne prismatique creuse en bronze R (*fig.* 12), pouvant tourner sur une tige cylindrique d'acier, contenue dans son intérieur, et soutenue par un robuste pied à trois branches munies de vis calantes. Une vis d'acier *a*, terminée par une pointe, traverse la colonne de bronze et repose par sa pointe sur l'extrémité de la tige d'acier : c'est cette vis qui sert à supporter tout le système. Sur une des faces de la règle et sur toute

sa hauteur est encastrée une lame d'argent portant une division en millimètres.

Le long de la règle se déplace un système mobile appelé *chariot;* il comprend deux parties : la pièce d'arrêt C et la pièce portant la lunette L, réunies toutes deux par une vis dite *de rappel* à pas micrométrique *v*.

La pièce d'arrêt C peut être fixée contre la colonne R par une vis de pression V; quand on veut mouvoir rapidement la lunette, on desserre donc cette vis, et l'on élève où l'on abaisse à la main le système du chariot et de la lunette, rendus solidaires l'un de l'autre par la vis *v*; puis, quand l'axe optique de la lunette est à peu près au niveau voulu, on fixe la pince C contre la colonne en serrant la vis V et, par la manœuvre de la vis *v*, on amène graduellement l'axe optique de la lunette à passer par le point visé.

La pièce qui porte la lunette porte aussi le *vernier* au $\frac{1}{50}$ de millimètre, divisé également, sur argent.

La lunette L, qui, dans le cas actuel, porte un oculaire micrométrique M, repose dans deux colliers de bronze, dont l'un est marqué *b*, et parallèlement à son axe est un niveau réglable N. Les colliers font partie intégrante de la branche horizontale d'un T de bronze; la branche verticale de ce T peut être déplacée légèrement par la manœuvre d'une vis *u* à pas très fin : cette manœuvre aura pour effet de modifier l'inclinaison de la lunette.

Enfin, pour terminer la description de cet instrument, disons que, par un contrepoids *p*, le centre de gravité de tout l'équipage tournant, chariot compris, se trouve ramené sur l'axe de la tige d'acier. Les mouvements de rotation s'obtiennent par une vis de rappel à serrage F, placée à la base de l'appareil; enfin deux petits niveaux *n*, *n'*, perpendiculaires entre eux, sont fixés sur le pied de l'appareil et permettent d'avoir rapidement une verticalité approchée de l'axe d'acier.

Réglage du cathétomètre à une lunette. — Un instrument aussi précis ne peut être employé utilement qu'à condition de réaliser exactement sa définition géométrique; il doit donc porter avec lui les moyens de réglage les plus rigoureux. Voici comment se fait ce réglage, qui est une des opérations les plus délicates de la Physique expérimentale.

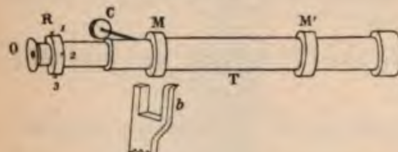
1° Coïncidence des axes optique et géométrique de la lunette. — Le corps de la lunette, c'est-à-dire le tube qui lui sert de mon-

ture, est travaillé au tour, ce qui le rend rigoureusement cylindrique. et c'est l'axe de révolution de ce cylindre, par lequel la lunette est matérialisée, que l'on appelle son *axe géométrique*. Quant à son *axe optique*, c'est, comme on le sait, la droite immatérielle qui joint le centre optique de l'objectif au point de croisement des fils du réticule.

La lunette est fixée au bâti par des pièces qui dépendent de l'axe géométrique; d'autre part, c'est l'axe optique qui constitue la ligne de visée. La première condition est donc de faire coïncider ces deux lignes. Voici comment on y parvient :

Sur le corps de la lunette, le constructeur a ménagé deux *colliers* de bronze M, M' (*fig.* 13), de rayons rigoureusement égaux. Ces colliers reposent sur des supports fourchus *b* qui dépendent de la branche horizontale du T mobile de la figure; la section intérieure de ces fourches est rectangulaire, et le collier M, quand il y repose, est tangent aux trois côtés. Si donc les axes optique et géométrique coïncident, en faisant tourner autour de son axe la lunette reposant dans ses fourches, les deux axes sont immobiles dans l'espace, et l'image d'un point, amené au centre du réticule, doit y demeurer malgré la rotation.

Fig. 13.



S'il en est ainsi, l'appareil est réglé; sinon, on note l'écart maximum entre l'image du point visé et la croisée des fils, et l'on déplace le réticule à l'aide des vis 1, 2, 3, 4, de façon à diminuer cet écart de moitié; puis on recommence l'opération, et ainsi de suite, jusqu'à ce que la coïncidence soit réalisée. Nous avons supposé ici que la lunette de la figure 12 n'avait pas de réticule micrométrique. S'il y en a un, ce réglage est plus facile, et la position des fils réglés est le zéro du micromètre.

Remarquons immédiatement que, le cathétomètre visant, en général, des objets rapprochés, l'image réelle fournie par l'objectif ne sera pas dans son plan focal principal; il faut donc que le réticule soit muni d'un réglage spécial, indépendamment du tirage de mise au point; sans cela le plan des fils ne coïnciderait pas avec le plan de l'image et, en déplaçant l'œil derrière l'instrument, on changerait la visée. Au lieu d'une mise au point spéciale pour le réticule, on peut munir l'objectif d'un tirage indépendant : c'est la disposition adoptée dans la lunette du cathétomètre représenté par la figure 12.

2° Parallélisme de la ligne de foi du niveau et de l'axe de la lunette. — Comme on le voit sur la figure 12, le niveau à bulle repose sur les deux *colliers* de la lunette; on manœuvre la vis u jusqu'à amener la bulle, fixée à la lunette, entre ses repères; après quoi on retourne le niveau bout pour bout sur la lunette : s'il lui est parallèle, la bulle reste entre ses repères; sinon on observe un écart de n divisions, écart correspondant à un angle des deux droites double de l'angle réel. En tournant la vis de réglage N du niveau dans le sens convenable, on ramène cet écart à n'être plus que $\frac{n}{2}$, puis on recommence l'opération, et ainsi de suite. On arrive, par des tâtonnements successifs, à amener le parallélisme parfait.

3° Perpendicularité de la lunette a l'axe de rotation. — L'axe de rotation ayant une position quelconque, verticale ou non, on vise un point avec la lunette et l'on amène son image au centre du réticule.

On tourne alors l'instrument tout entier de 180° : c'est alors l'oculaire de la lunette qui est dirigé vers le point visé; on retourne la lunette bout pour bout sur ses fourches b, de façon à diriger de nouveau l'objectif vers l'objet visé. Dans ces conditions, si la lunette est perpendiculaire à l'axe de rotation, l'image du point visé sera encore au centre du réticule. Sinon, elle s'en écarterait, et l'angle de la lunette et de la perpendiculaire serait doublé par le retournement. On ramène l'écart observé dans le champ de la lunette à être réduit de moitié, et cela par la manœuvre de la vis u (*fig.* 12) qui commande le T portant la lunette; on recommence l'opération jusqu'à ce qu'on arrive au réglage parfait.

4° Verticalité de l'axe de rotation. — Tout ceci étant fait, il reste à rendre l'axe de rotation parfaitement vertical.

La lunette lui est déjà perpendiculaire par le réglage précédent.

On amène la lunette à être parallèle sensiblement à la droite $A'A''$ qui joint les pieds de deux des vis calantes, et l'on manœuvre l'une de celles-ci, A'' par exemple, jusqu'à ce que la bulle du niveau N vienne entre ses repères. On tourne alors l'instrument entier de 90° et, si la bulle ne reste pas immobile, on la ramène entre ses repères, mais en manœuvrant seulement la troisième vis A, sans toucher aux deux autres. On recommence jusqu'à ce que le résultat cherché soit obtenu.

Disons à ce propos qu'il est *essentiel* que les trois vis calantes reposent dans des trous ou des rainures pratiquées dans des crapau-

dines *métalliques*. Une mesure faite avec un cathétomètre dont les vis reposeraient directement sur le sol aurait une précision illusoire. et l'on ne pourrait pas répondre du chiffre des dixièmes de millimètre : l'erreur pourrait même être de l'ordre du millimètre.

Généralement on n'a à opérer que des réglages très petits : pour cela on place sur le pied deux petits niveaux croisés, n et n', qu'on amène rapidement au zéro par la manœuvre des vis calantes : l'axe est alors *à peu près vertical,* et les réglages ne portent plus que sur des écarts très faibles.

Relation entre la précision des diverses pièces d'un cathétomètre. — Soit un cathétomètre muni d'un vernier au $\frac{1}{50}$ de millimètre : on a, avec un tel instrument, la prétention de mesurer les distances verticales avec cette approximation.

Il faut d'abord que les erreurs de division de la *règle* et du *vernier* n'atteignent pas $\frac{1}{50}$; disons tout de suite qu'aujourd'hui l'on a des machines à diviser tellement parfaites que, en général, on peut compter sur l'exactitude des divisions de la règle au $\frac{1}{100}$ de millimètre au moins. Néanmoins, il faudra toujours vérifier la division, par comparaison avec des étalons métriques.

Le *niveau* doit remplir aussi certaines conditions et avoir une sensibilité déterminée. Le cathétomètre vise à une distance généralement voisine de 1^m. Désignons par ε la sensibilité du niveau, c'est-à-dire le plus petit angle qu'il soit susceptible d'accuser. Il faut que l'on ait

$$\tan g\,\varepsilon = \frac{\frac{1}{50}}{1000} = \frac{1}{50000} ;$$

le niveau devra donc être sensible au moins à l'inclinaison dont la tangente serait $\frac{1}{50000}$ (4″ environ).

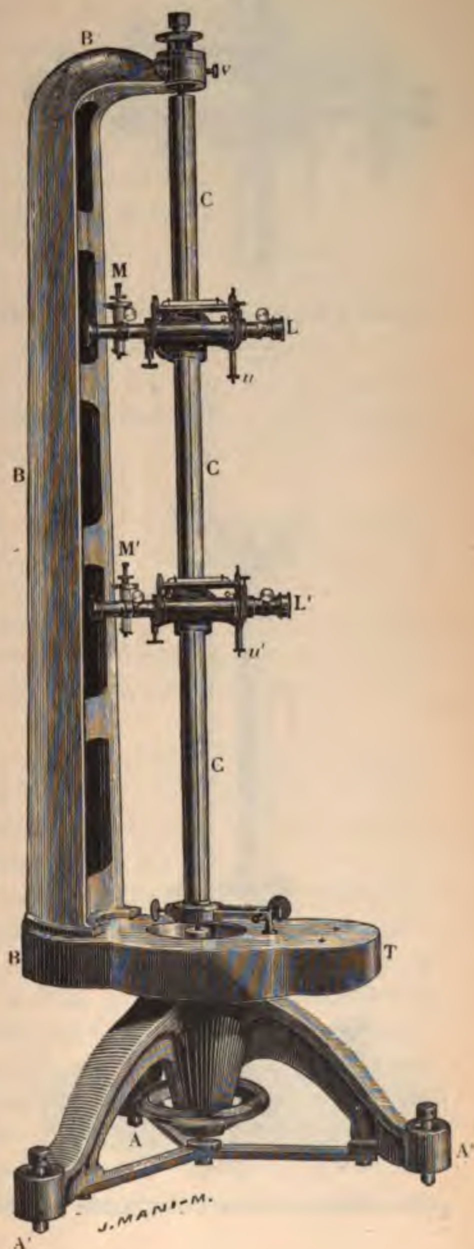
La *lunette* doit avoir un système optique qui permette de voir nettement, à la distance maxima de visée, un trait ayant $\frac{1}{50}$ de millimètre d'épaisseur : on vérifie qu'il en est ainsi à l'aide d'un micromètre objectif.

Enfin le *réticule* doit être en fils assez gros pour être vus nettement, mais assez fins pour que la grosseur de leur point de croisement n'introduise pas une erreur de pointé : ceci démontre la supériorité des réticules à quatre fils très fins, parallèles deux à deux, et déterminant le centre du champ par le centre du petit carré qu'ils forment.

9. — CATHÉTOMÈTRE A DEUX LUNETTES.

Il faut ajouter aux conditions précédentes un parallélisme rigoureux de la règle divisée et de l'axe de rotation, parallélisme qu'on est obligé d'admettre par construction.

Fig. 14.

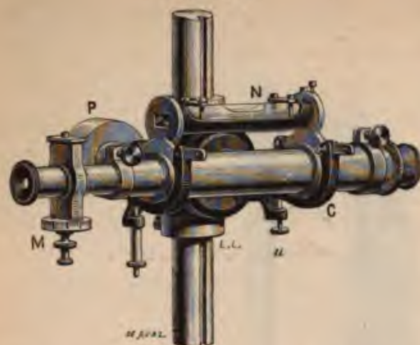


Aussi préfère-t-on aujourd'hui se servir du cathétomètre à deux lunettes et à règle indépendante (*fig.* 14). Le cathétomètre à deux lunettes se compose d'une colonne verticale tournante CC, en acier, à section circulaire, sur laquelle se meuvent deux chariots, formés chacun d'une seule pièce : chaque chariot porte une lunette L, L' à oculaire micrométrique M, M', équilibrée par un contrepoids; la colonne C est soutenue par ses deux extrémités dans un bâti très fort en fonte BB, portant sur un pied stable à trois vis calantes.

Le réglage des lunettes (*fig.* 14, A) et de leur perpendicularité à la colonne C se fait comme pour le cathétomètre à une lunette, les vis u et u' ayant la même destination que la vis u sur la figure 12. Pour régler la verticalité de l'axe de rotation, on rend d'abord, à l'aide de

deux niveaux croisés et des vis calantes A, A′, A″, la table TB bien horizontale, puis on règle la verticalité de la colonne C par trois vis à 120°, dont l'une est marquée v', et qui agissent sur sa partie supérieure.

Fig. 14 A.



La règle est en bronze, à divisions millimétriques sur argent, ou, ce qui vaut mieux dans les laboratoires, où l'on craint les vapeurs sulfureuses, en acier avec divisions sur platine. Elle est portée sur un pied à trois branches (*fig.* 14, B) séparé et on la rend verticale, comme si elle était elle-même un cathétomètre.

Fig. 14 B.



Pour viser, par exemple, la distance verticale de deux traits, on les met au point sur chaque lunette, les deux micromètres étant à leurs zéros respectifs; puis on vise sur la règle étalon les deux divisions N et N′ les plus voisines des deux réticules. On fait alors mouvoir ceux-ci respectivement de n et n' divisions pour les amener en coïncidence avec les images des deux traits; la distance cherchée est $\left(N' - N + \frac{n' - n}{200}\right)$ millimètres, si les micromètres ont des vis de $\frac{1}{2}$ millimètre de pas à tambours divisés en 100 parties égales.

10. — COMPARATEUR.

L'instrument le plus parfait pour mesurer à une très grande approximation les petites différences

qui peuvent exister entre des règles de longueur presque égale est le *comparateur*, qui n'est autre chose, en principe, que le cathétomètre à deux lunettes, couché horizontalement.

La disposition essentielle de l'instrument consiste à permettre de viser les deux extrémités de l'une des règles à comparer avec deux bons microscopes micrométriques installés d'une façon invariable. On met au point, dans cette première visée, après quoi on remplace la première règle par la seconde; on est obligé de déplacer un peu les fils des deux réticules pour viser les extrémités de la seconde règle : la somme algébrique de ces déplacements donnera la différence, positive ou négative, des longueurs des deux règles.

Voici la description de l'un des comparateurs installés au Bureau international des Poids et Mesures pour l'étude des étalons du mètre; il a été construit par MM. Brunner.

Il se compose essentiellement de deux piliers portant les deux microscopes, et d'un chemin de fer, perpendiculaire à la ligne qui joint les centres optiques de leurs objectifs. Sur un chariot roulant sur des rails est une auge dans laquelle sont placées côte à côte les règles à comparer.

Les deux piliers P_e et P_w (*fig.* 15), qui doivent supporter les microscopes, et le massif servant d'assise au chemin de fer B sont en pierre meulière; ils traversent le plancher de la salle d'observation sans le toucher : un intervalle de 2^{cm} les en sépare. De cette façon, les trépidations imprimées au plancher par les mouvements de l'observateur ne se transmettent ni à la règle placée dans son auge, ni aux piliers portant les microscopes.

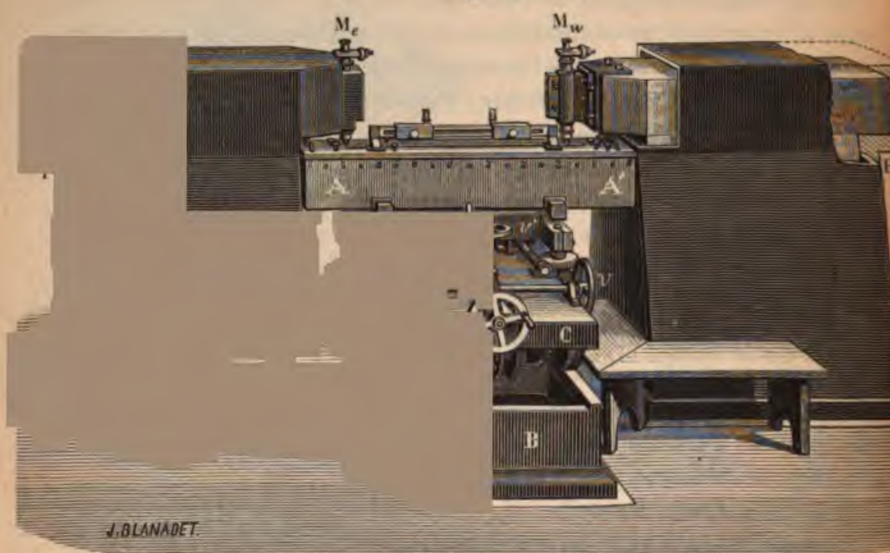
Chaque pilier se termine, à sa partie supérieure, par un entablement horizontal qui le dépasse des deux côtés, et qui reçoit sur la face intérieure une forte équerre de fer fixée par des boulons; ces équerres portent les deux microscopes M_e, M_w.

Ces microscopes, longs de 43^{cm}, sont à oculaires micrométriques. Leurs objectifs ont 1^{cm} de diamètre, 7^{cm} de foyer et donnent un grossissement de 6 fois; les oculaires (de Ramsden) grossissent 10 fois : le grossissement total est donc de 60 fois. Le réglage de verticalité de ces deux microscopes a été effectué, à l'aide d'un niveau, par retournement autour de l'axe optique. De plus, pour placer leurs foyers exactement dans le même plan horizontal, on a visé avec les deux instruments de très petits grains de lycopode flottant à la surface d'un même bain liquide; on a pu faire ainsi ce réglage à $\frac{1}{100}$ de millimètre près. Piliers et microscopes sont d'ailleurs mis à l'abri du

rayonnement de l'observateur par une boîte en chêne recouverte de feutre, qui les enveloppe sans les toucher, comme le montre la figure.

Le chemin de fer est constitué par la partie supérieure d'un banc

Fig. 15.



de fonte massif B; c'est sur lui que glisse le chariot C, pesant environ 400^{kg} et reposant sur quatre gros galets en fonte. Sa course est limitée par deux ressorts de grande résistance fixés au chariot et qui viennent buter contre les extrémités du banc. Un frein, manœuvré par deux volants en bronze v, permet d'ailleurs d'arrêter le chariot dans une position quelconque.

Sur le chariot repose un bâti de fonte très massif F, porté par quatre vis calantes dont deux sont visibles sur la figure; à l'aide d'engrenages et de vis sans fin, ces quatre vis peuvent se mouvoir à la fois de la même quantité, par la seule manœuvre du volant v''. On peut donc élever ou abaisser verticalement les auges, parallèlement à elles-mêmes; un volant v' sert à manœuvrer une vis sans fin qui permet d'amener exactement les extrémités des règles dans le champ des microscopes.

Les auges, renfermées l'une dans l'autre, sont en laiton : l'auge extérieure a $1^m,36$ de longueur sur $0^m,30$ de largeur et $0^m,20$ de profondeur; l'auge intérieure a pour dimensions $1^m,23$, $0^m,18$, $0^m,125$: c'est dans cette dernière que sont placées côte à côte les

deux règles à comparer. Des mouvements micrométriques permettent de donner aux règles des positions exactement parallèles à la droite qui joint les axes optiques des objectifs des deux microscopes.

Tel est l'appareil qui sert à comparer entre elles deux règles presque égales, comme le sont les étalons de longueur, et à la même température. Quand on veut comparer deux règles à des températures différentes, on modifie légèrement le système; au lieu d'un seul chariot, il y en a deux : l'un maintenu à 0°, l'autre à t^{o}, et on les amène successivement sous le microscope micrométrique; nous en verrons une application dans la mesure des dilatations linéaires.

11. — SPHÉROMÈTRE.

Le comparateur vient de nous offrir l'exemple d'un instrument de mesure employant exclusivement la vis micrométrique; mais c'est, en quelque sorte, un instrument différentiel. Le sphéromètre est un instrument qui utilise la vis micrométrique pour la mesure des petites longueurs comprises entre 0^{mm} et 80^{mm} à 100^{mm}.

Il se compose essentiellement d'une vis micrométrique en acier D (*fig.* 16) dont la tête est munie d'un plateau divisé A, et dont le corps, terminé en pointe, se meut dans le noyau central d'un pied à trois branches supporté par trois pointes d'acier qui reposent sur un plateau rigoureusement plan; ce plateau est le complément nécessaire de l'instrument. Une réglette verticale BC, portant des divisions égales au pas de la vis, sert à compter le nombre entier de tours de la vis par la position verticale de la tranche du plateau divisé; elle sert aussi d'index fixe pour les fractions de tour. La vis a généralement un pas de $\frac{1}{2}$ millimètre, et le plateau est divisé en 500 parties égales; on peut apprécier ainsi le $\frac{1}{1000}$ de millimètre.

Fig. 16.



Cet appareil est l'instrument classique et primitif; voici comment on s'en servait : les trois points fixes reposant sur le plan de cristal, on abaissait la vis centrale jusqu'à ce qu'elle vînt au contact; on s'as-

surait de ce fait en tournant un peu plus la tête de la vis, ce qui amenait un ballottement de l'appareil; la suppression de ce ballottement annonçait que la pointe de la vis était dans le plan des trois points fixes. On notait alors le nombre de divisions de la règle et du plateau correspondant au point de rencontre de leurs arêtes respectives.

Cela fait, on soulevait la vis et l'on introduisait sous sa pointe le corps (une lame de glace, par exemple) dont on voulait mesurer l'épaisseur; on abaissait pour cela la vis jusqu'à ce qu'elle vînt au contact du corps, ce dont on s'assurait comme précédemment, et l'on faisait la lecture correspondante : la différence des deux lectures donnait l'épaisseur cherchée. On voit que la grande incertitude de ce procédé réside dans l'appréciation du contact.

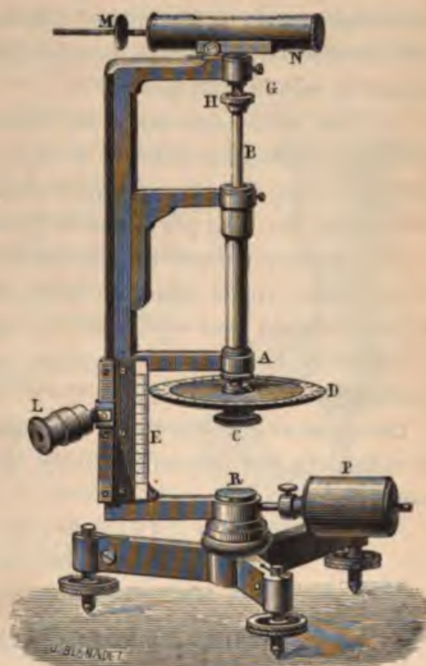
Cet instrument, comme son nom l'indique, permet de mesurer le rayon d'une sphère. En effet, soit à mesurer le rayon R d'un miroir concave : on place le sphéromètre sur le miroir et, en abaissant la vis, on s'assure qu'elle touche la surface en même temps que les trois pieds; les quatre pointes terminales sont alors sur la sphère; on fait la lecture de l'instrument dans cette position et on le reporte sur le plan de cristal : on établit alors, comme il a été dit plus haut, le contact de la vis avec le plan, et l'on fait une nouvelle lecture. La différence des nombres obtenus donne la hauteur h de la calotte sphérique dont la base est le cercle de rayon r passant par les trois pieds qui supportent l'appareil, et dont on connaît les distances respectives. On peut dès lors calculer, par la formule $r^2 = h(2R - h)$ qui lie évidemment ces trois quantités, le rayon de la sphère soumise à l'expérience.

L'incertitude dans l'estimation du contact n'est pas la seule cause d'erreur que présente l'usage des anciens sphéromètres; la pointe mousse de la vis micrométrique exerce sur les pièces soumises aux mesures une pression qui peut varier depuis 0 jusqu'à une fraction très voisine de l'unité du poids total de l'appareil; ce poids étant réparti sur une très faible surface, la pression peut donc être très grande ou nulle. Deux lectures sur l'instrument faites dans ces conditions extrêmes ne seront pas *comparables;* s'il s'agit, par exemple, d'évaluer l'épaisseur d'une lame et que le premier réglage, sur la face supérieure de la lame, ait été fait à pression maxima, et le second, sur le plan de cristal, à pression nulle, l'évaluation sera évidemment trop faible.

On évite ces difficultés avec les sphéromètres qui portent une

modification due à Perreaux : la vis qui est creuse est traversée librement par une tige en aluminium; celle-ci est terminée par une tête qui repose sur le plateau du sphéromètre, et sur laquelle appuie un double levier à bras très inégaux terminé par une aiguille mobile devant un cercle divisé. Il résulte de ce dispositif que la tige suivra les mouvements du plateau, s'élevant ou s'abaissant avec lui; mais, lorsqu'elle arrivera par sa pointe en contact avec un obstacle, sa tête quittera le plateau du sphéromètre et soulèvera le levier; l'aiguille cessera donc de coïncider avec le zéro de la graduation, l'observateur sera prévenu que le contact est établi; quant à la pression, elle se réduira à celle exercée par cette tige de poids très léger. Plus grande facilité dans le réglage du contact, comparabilité dans les mesures, tels sont les avantages réalisés par ce très grand perfectionnement.

Fig. 17.



La disposition suivante, employée par M. Wild, présente les mêmes avantages.

La vis micrométrique AB (*fig.* 17) se meut de bas en haut dans un écrou porté par un châssis vertical équilibré; le corps dont on cherche l'épaisseur est placé entre un petit plateau H qui termine la vis et la tranche inférieure d'une pièce G qui glisse dans le châssis, et sur l'extrémité supérieure de laquelle repose la réglette d'un niveau à bulle très sensible N, mobile autour d'un axe horizontal α et équilibré par une masse M. Dès que le contact a lieu, le niveau est soulevé sans effort, grâce à son contrepoids; la bulle se déplace, et la position de contact s'obtient en ramenant, à l'aide de la vis micrométrique, la bulle entre ses repères. Les tours se lisent sur une réglette verticale E, et la fraction de tour sur un plateau divisé A, fixé à la tête C de la vis.

Mesure du pas. Étude de la vis. — Avant toutes choses, le physicien qui se sert du sphéromètre doit mesurer *lui-même* le pas de la vis de l'instrument dans diverses régions, s'assurer qu'il est constant, et, s'il n'en est pas rigoureusement ainsi, dresser une table qui donne en millimètres la valeur de chaque tour de la vis. Nous citerons, à titre d'exemple de ce genre de travail, la marche à suivre pour mesurer le pas de l'instrument perfectionné que nous venons de décrire en dernier lieu.

Un trait de repère très fin est tracé sur la tranche du disque H; tout l'instrument est installé, dans une position rigoureusement verticale, en face d'un cathétomètre de grande précision. On fait faire à la vis un nombre déterminé de tours et de fractions de tour et l'on fait la lecture du sphéromètre, lecture qui, comparée à la différence des lectures faites au cathétomètre sur les deux positions du repère H, donne la valeur x du pas.

Si dans cette opération on s'est servi du cathétomètre à deux lunettes micrométriques et à règle indépendante que nous avons décrit, soient, dans la première position de la vis :

a le pointé du trait porté par le sphéromètre, c'est-à-dire de la lecture correspondante du micromètre;
a_1 le pointé, sur la règle, du trait inférieur dont le rang est A;
a_2 le pointé du trait supérieur, de rang $(A + 1)$.

Soient B, b, b_1, b_2 les quantités correspondantes dans la deuxième position;

Soient m et n les lectures du sphéromètre dans les deux positions; la valeur du pas moyen est alors, dans l'intervalle de ces deux lectures,

$$x = \frac{1}{m-n}\left[\left(B + \frac{b-b_1}{b_2-b_1}\right) - \left(A + \frac{a-a_1}{a_2-a_1}\right)\right].$$

12. — MACHINE A DIVISER. — PALMER. — PIED A COULISSE.

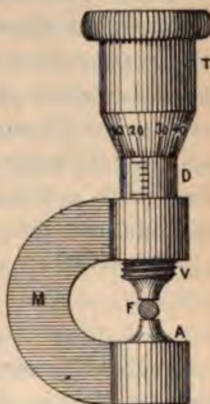
La machine à diviser se compose essentiellement d'une très longue vis micrométrique fixe, dont l'écrou, mobile sur un chemin de fer, porte, soit un style traceur s'il s'agit de diviser une tige ou une règle, soit une lunette à réticule s'il s'agit de se servir de l'instrument pour mesurer les longueurs.

Nous ne décrirons pas l'appareil traceur, généralement automatique, qui sert à tracer des divisions équidistantes, dont les traits, égaux en général, sont plus longs de cinq en cinq et de dix en dix;

c'est là un outil de constructeur plutôt qu'un appareil de physicien. Comme instrument de mesure précis, la machine à diviser est bien distancée par le comparateur à deux lunettes mobiles et à règle étalon indépendante. La raison en est facile à saisir : pour qu'une machine à diviser soit parfaite il faut réaliser une vis micrométrique de 80^{cm} à 1^{m} de longueur, dont le pas soit constant sur toute sa longueur, ce qui est infiniment plus difficile à obtenir que les deux petites vis des deux microscopes micrométriques, qui n'ont à être régulières que sur de très petites longueurs. Pour diviser les cercles, il faut une machine spéciale formée essentiellement d'un plateau dont la circonférence porte des dents équidistantes et qui est mû par une vis tangente à tête divisée.

Telles sont les méthodes employées pour la mesure des longueurs; il y en a, toutefois, une autre beauconp plus sensible : la méthode de M. Fizeau, que nous décrirons en Optique, à l'occasion des phénomènes d'interférence.

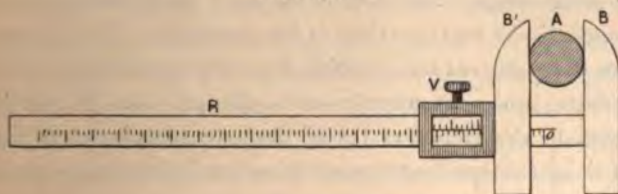
Fig. 17 *bis*.



Aujourd'hui, les exigences de la construction précise, devenue courante dans l'industrie mécanique, font que les ouvriers qui travaillent les pièces délicates doivent pouvoir répondre du $\frac{1}{10}$ de millimètre, et parfois du $\frac{1}{100}$. Ils emploient, à cet effet, deux instruments : le *pied à coulisse* et le *Palmer*.

Le pied à coulisse (*fig.* 17 ter) est une règle divisée R, terminée par un talon perpendiculaire fixe, B. Un talon mobile, B′, porté par un chariot V, se meut sur la règle. Sur le bord d'une fenêtre pratiquée dans le chariot est un vernier au $\frac{1}{10}$; une vis de pression permet de fixer l'organe mobile, dans une position quelconque, sur la règle divisée. Le zéro

Fig. 17 *ter*.



du vernier coïncide avec celui de la règle quand B et B′ sont en contact.

Pour mesurer l'épaisseur d'un objet A, on l'introduit entre les deux talons; le double contact établi, on serre la vis V et l'on fait la lecture de l'instrument qui donne l'épaisseur cherchée.

Quant au *Palmer*, qui sert à mesurer les petites épaisseurs (*fig.* 17), c'est un véritable sphéromètre; sa vis V a un pas de 1^{mm}, et la tête en est divisée en 100 parties. Le nombre entier de tours se compte par la position de la tranche du tambour divisé sur une graduation en millimètres que l'on voit en D. Quand les pièces V et A sont en contact, l'instrument doit être au zéro : c'est un contrôle qu'il faut toujours faire.

13. — MESURE DES ANGLES.

La mesure des angles est infiniment plus facile que celle des longueurs; cela tient à ce que le physicien a naturellement à sa disposition *un étalon d'angle :* la circonférence ou une de ses parties aliquotes, son quart généralement. Il suffit donc de réaliser un rayon mobile sur un cercle divisé pour avoir la possibilité de mesurer les angles au centre par les arcs correspondants.

Mais, en Physique, on mesure souvent, par application d'un théorème d'Optique géométrique, les angles par leur tangente. Il y a donc deux méthodes à décrire : la méthode du cercle divisé et les méthodes optiques.

14. — MÉTHODE DU CERCLE. — RÉPÉTITION.

Cercles divisés. — Les cercles employés sont toujours des disques pleins ou évidés, dont la circonférence, formée d'une lame d'argent rapportée, porte des divisions équidistantes. Pour que ces divisions soient d'une lecture aisée à la loupe, on s'arrête aux subdivisions suivantes : les cercles de 10^{cm} à 12^{cm} de diamètre sont généralement divisés en demi-degrés; les cercles de 22^{cm} de diamètre ont d'habitude le degré divisé en 6 parties, et les cercles de 33^{cm} portent douze traits entre deux degrés consécutifs. Dans ces conditions, par un vernier circulaire, on peut apprécier la minute dans le premier cas, les $10''$ dans le deuxième et les $5''$ dans le troisième. Il faut naturellement s'aider d'une loupe pour faire ces lectures et apprécier les coïncidences de traits.

Dans les instruments d'une construction très soignée, on ne lit plus au vernier les fractions de degré : on se sert d'alidades mobiles

munies de microscopes micrométriques, qui permettent de pousser bien plus loin la précision des lectures.

Les erreurs comportées par la lecture des angles sur un cercle divisé peuvent tenir à diverses causes : le cercle n'était pas dans le même plan que le cercle principal de la machine à diviser; il ne lui était pas rigoureusement concentrique; enfin toutes les divisions peuvent n'être pas équidistantes.

La première de ces causes d'erreurs est toujours, par construction, sinon nulle, du moins tellement petite qu'elle est négligeable. Restent les deux autres que nous allons étudier.

L'*erreur d'excentricité* provient de ce que l'alidade décrit un cercle dont le centre ne coïncide pas rigoureusement avec celui du cercle principal : les angles ne sont plus des angles au centre; mais, si l'on prolonge leurs côtés de façon que chacun d'eux coupe la circonférence en deux points, on a deux angles opposés par le sommet qui jouissent de la propriété que la demi-somme des arcs interceptés est égale à l'arc intercepté par l'angle au centre dont les côtés seraient parallèles aux leurs. De sorte qu'il suffit de faire une alidade, non plus radiale seulement, mais diamétrale, et de la munir de deux verniers opposés. Dans ces conditions, on fera chaque lecture aux deux extrémités et l'on en prendra la demi-somme : l'erreur d'excentricité sera ainsi corrigée.

Cette précaution *doit toujours être employée* dans les mesures d'angles qui demandent quelque précision. Dans les cercles bien construits, elle est d'ailleurs presque inutile, par suite de l'adoption des *alidades concentriques*. Cette alidade n'est autre qu'un deuxième cercle, concentrique au cercle principal et tournant dans son intérieur. La coïncidence des circonférences en contact est un témoin de la concentricité des deux cercles. Généralement, d'ailleurs, l'alidade concentrique porte, non seulement deux, mais *quatre* verniers, placés aux extrémités de deux diamètres rectangulaires; on fait donc, pour chaque mesure d'angles, quatre lectures dont on prend la moyenne.

Les *erreurs de division* sont très petites sur les cercles bien construits, et peuvent être atténuées presque complètement par la méthode dite de la *répétition des angles*. Pour pouvoir appliquer cette méthode, il faut que l'alidade et la lunette qu'elle entraîne puissent se mouvoir sans que le cercle divisé participe à leur mouvement, et réciproquement. Si l'on imagine un cercle ainsi rendu *répétiteur*, voici la manière d'opérer.

On vise avec la lunette l'une des directions qui forment les côtés de

l'angle cherché, après quoi, l'alidade étant mobile et le cercle immobile, on vise la seconde. Dans ces conditions, si l'on faisait la lecture du cercle, la différence entre la position du vernier indiquerait l'angle cherché; mais on ne fait pas la lecture : on fixe l'alidade au cercle, et l'on fait tourner l'ensemble des deux cercles jusqu'à viser de nouveau la première direction. Si, fixant alors le cercle et rendant à l'alidade son mouvement indépendant, on vient à viser de nouveau la seconde direction, l'angle total, lu sur le cercle que fait la position initiale du vernier avec sa position finale, est le double de l'angle cherché; si l'on opérait trois fois ainsi, on aurait un angle triple, et ainsi de suite. On voit donc que, si l'on fait n lectures, l'erreur absolue de lecture étant la même, l'erreur relative est divisée par n, et que, si l'on s'arrange de façon que la somme des angles soit voisine de 2π ou d'un multiple de 2π, l'erreur de division disparaît, puisque 360° correspondent toujours à une circonférence entière.

Telle est, en principe, la façon d'employer le cercle divisé à la mesure des angles; si l'on remplace le vernier par le microscope micrométrique, on apprécie facilement la seconde avec un cercle de 33^{cm} de diamètre.

15. — MÉTHODE DE LA RÉFLEXION.

Nous venons de voir de quelle façon on pouvait mesurer directement les angles par les arcs correspondants : il y a une autre façon de les connaître exactement, c'est de mesurer leurs lignes trigonométriques et en particulier leur tangente, en partant de ce fait que le quotient des deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle représente la tangente trigonométrique de l'angle que fait l'hypoténuse avec l'un d'eux.

C'est ainsi qu'aujourd'hui se font presque toutes les mesures d'angles dans les expériences de Physique, en ajoutant à ce principe le théorème d'Optique suivant :

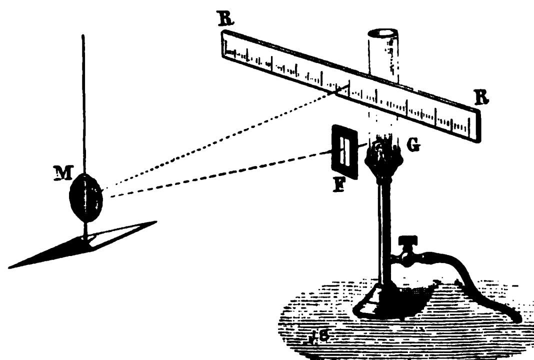
Quand un miroir, sur lequel tombe un rayon incident fixe, tourne d'un angle θ, le rayon réfléchi tourne d'un angle 2θ.

D'après cela, voici comment on procédera d'après cette méthode, indiquée pour la première fois par Poggendorff.

Le miroir (généralement concave) M (*fig.* 18) est fixé avec de la cire sur le fil qui soutient la partie mobile dont on veut mesurer le déplacement angulaire : c'est, sur la figure, une aiguille aimantée.

A une distance égale à son rayon on installe, en avant de ce miroir, d'abord une flamme G, qui éclaire une fente à réticule F; puis, au-dessus de la fente, une règle horizontale RR', perpendiculaire à la droite FM. Dans ces conditions, on voit sur la règle une image réelle

Fig. 18.



du fil, qui se projette sur les divisions. On note la division n à laquelle correspond la position d'équilibre. Si l'aiguille tourne d'un angle inconnu θ, l'image s'arrête sur une division n' : si la règle est divisée en centimètres et que d représente en centimètres les distances de la règle au miroir, on a, en appliquant le théorème rappelé plus haut,

$$\tan 2\theta = \frac{n'-n}{d},$$

et, si l'angle est assez petit pour qu'on puisse confondre la tangente avec l'arc,

$$\theta = \frac{n'-n}{2d}.$$

Le calcul exact conduit à la formule

$$\theta = \frac{2}{1}\text{arc tang}\frac{n'-n}{d} = \frac{1}{2}\left[\frac{n'-n}{d} - \frac{1}{3}\left(\frac{n'-n}{d}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{n'-n}{d}\right)^5 + \ldots\right].$$

Même pour les angles inférieurs à 3°, on devrait employer la formule

$$\theta = \frac{1}{2}\frac{n'-n}{d} - \frac{1}{6}\left(\frac{n'-n}{d}\right)^3;$$

l'emploi d'une échelle courbée en arc de cercle évite ces corrections.

Nous ne décrirons pas ici tous les dispositifs matériels employés pour réaliser cette mesure : tantôt la règle est opaque, tantôt elle est

translucide; quelquefois aussi l'on observe, dans une lunette à réticule, le numéro de la division dont l'image, réfléchie par le miroir, vient tomber au centre de l'instrument. Cette méthode est la plus commode que l'on puisse imaginer pour la lecture des petits angles; elle est aussi la plus précise, puisqu'il suffit d'augmenter la distance de la règle au miroir pour faire croître la sensibilité; mais alors il vaut mieux remplacer le miroir concave par un miroir plan et placer sur le trajet du rayon une lentille convergente de foyer convenable.

III. — MESURE DES MASSES ET DES FORCES.

16. — BALANCE.

Conditions de sensibilité de la balance. — L'unité de masse est celle du gramme; c'est, théoriquement, la masse d'un centimètre cube d'eau distillée à 4°, et pratiquement la millième partie de l'étalon du kilogramme déposé aux Archives.

La balance est l'instrument par excellence servant à la mesure des masses ou à la comparaison des poids qui, en un même lieu, sont proportionnels aux masses.

En principe, elle se compose essentiellement d'un levier horizontal ou fléau, homogène, suspendu en son milieu et portant à ses extrémités deux plateaux également pesants. Dans ces conditions, les poids des deux moitiés de l'appareil se font équilibre, puisqu'il est parfaitement symétrique, et toute surcharge ajoutée sur l'un des plateaux fera incliner le fléau.

Si le centre de gravité du fléau était exactement au point de suspension, il serait en équilibre indifférent; pour lui donner un équilibre stable, il faut que le centre de gravité du fléau soit au-dessous du point de suspension.

Il est facile, dès lors, de calculer l'angle dont s'inclinera le fléau pour une surcharge déterminée.

Soient $P = Mg$ les forces appliquées aux extrémités du fléau et qui comprennent le poids du plateau et du corps qu'il supporte, π le poids du fléau et G son centre de gravité. Désignons par l la longueur de l'une des moitiés du fléau et par d la distance OG; ajoutons une surcharge p à droite : le fléau s'inclinera d'un angle θ (*fig.* 19), et nous aurons, en appliquant le théorème des moments,

$$lP\cos\theta + \pi d\sin\theta = l(P + p)\cos\theta,$$

d'où l'on tire

$$\tan\theta = \frac{pl}{\varpi d}; \quad (1)$$

on voit que la *sensibilité* de la balance, c'est-à-dire l'angle dont elle s'inclinera pour une surcharge égale à 1^{mg}, par exemple, sera toutes choses égales d'ailleurs :

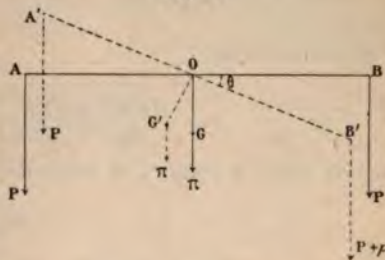


Fig. 19.

1° Proportionnelle à l et en raison inverse de ϖ; mais il ne faut pas oublier que ϖ est fonction de l, et c'est au constructeur à voir dans quel sens varie $\frac{l}{\varpi}$ quand l augmente, et s'il n'y a pas avantage à construire, comme on le fait depuis quelques années, des balances à courts fléaux ;

2° En raison inverse de d;

3° Indépendante de la charge 2P.

On cherchera donc à diminuer le poids du fléau et augmenter sa longueur sans nuire à la rigidité de l'appareil, sans laquelle, les trois points de suspension ne restant pas en ligne droite, la formule (1) n'est plus applicable.

La formule (1) montre que, toutes les fois que l'angle sera assez petit pour qu'on puisse confondre la tangente avec l'arc, l'angle dont s'inclinera la balance sera proportionnel à la surcharge quand cette dernière sera fort petite. On utilise cette propriété pour l'appréciation des fractions du milligramme dans les balances à lecture directe.

17. — CAS GÉNÉRAL.

Cas où les points de suspension ne sont pas en ligne droite. — Qu'arrive-t-il si les trois points A, O, B ne sont plus en ligne droite?

Désignons par l et l' les longueurs des deux bras du fléau et appelons φ et φ' les angles qu'ils font avec la droite OG.

Soit θ l'angle d'inclinaison de la balance pour une surcharge déterminée p (*fig.* 20), nous aurons, en appliquant comme ci-dessus le théorème des moments,

$$(P + p)l \sin(\varphi - \theta) = P'l' \sin(\varphi' + \theta) + \varpi d \sin\theta,$$

d'où nous tirons

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{(P+p)l\sin\varphi - P'l'\sin\varphi'}{(P+p)l\cos\varphi + P'l'\cos\varphi' + \varpi d}.$$

Si, pour simplifier, nous supposons $l = l'$ et $\varphi = \varphi'$, nous obtenons la formule

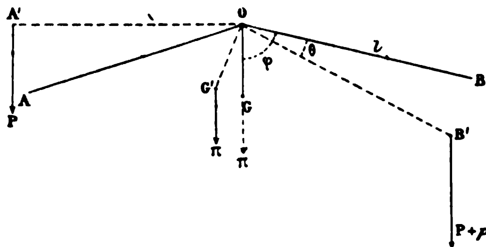
$$(P+p)l\sin(\varphi-\theta) = Pl\sin(\varphi+\theta) + \pi d\sin\theta,$$

d'où nous tirons

(2) $$\operatorname{tang}\theta = \frac{pl\sin\varphi}{(2P+p)l\cos\varphi + \pi d}.$$

Si l'on y fait $\varphi = 90°$, on retombe sur la formule (1).

Fig. 20.



La formule (2) nous montre que la sensibilité n'est plus indépendante de la charge. Si $\varphi < 90°$, la sensibilité diminue avec la charge; si $\varphi > 90°$, elle augmente avec elle.

18. — DESCRIPTION DE LA BALANCE.

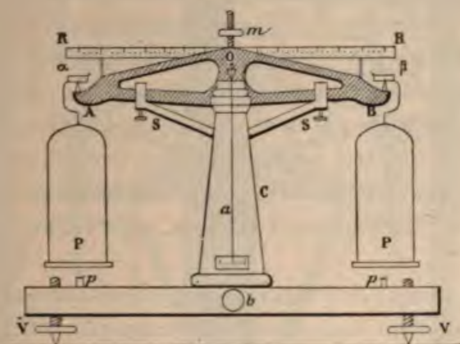
Les modèles de balance de précision varient suivant les constructeurs. Nous donnons sur la figure 21, qui est plus schématique que réelle, la disposition générale des organes d'une balance précise.

AOB représente le fléau, formé d'une règle plate évidée, il a ainsi à la fois la résistance à la flexion et la légèreté qu'on exige de lui. Le point de suspension des plateaux A et B et le point d'oscillation O sont représentés par les arêtes de trois couteaux horizontaux que l'on fait en acier, ou mieux en agate ou en quartz; une longue aiguille *a*, fixée au fléau et dont l'extrémité se déplace sur un arc divisé, sert à indiquer l'horizontalité du fléau. Pour éviter les erreurs de parallaxe, il faudra toujours observer sa position avec une loupe ou mieux avec une petite lunette.

Les arêtes des couteaux reposent toujours sur des plans de même substance O, α, β; ces deux derniers supportent les plateaux P, P sous lesquels, à l'état de repos, viennent frotter les barbes de deux petits pinceaux de martre fine p, p qui les empêchent de prendre un mouvement pendulaire.

On voit en S, S les deux bras d'un support fourchu; ces bras

Fig. 21.



s'élèvent verticalement, manœuvrés par un bouton b, qui commande une tige placée dans l'intérieur de la colonne C supportant le tout. Quand la balance n'est pas en expérience, on élève cette tige; la fourche saisit alors le fléau et le soulève légèrement; les couteaux ne reposent plus sur les plans correspondants, ce qui évite une usure inutile. En même temps que la fourche se soulève, la manœuvre du bouton b abaisse les pinceaux, rendant ainsi toute liberté aux deux plateaux.

Au-dessus du fléau, dans son plan de symétrie, se trouve une petite vis sur laquelle se meut une masse m; cette masse a pour but de rendre possible le déplacement du centre de gravité du fléau.

Enfin, fixée au fléau, est une règle horizontale très légère RR, divisée en millimètres; elle sert à apprécier les fractions de centigramme, par l'application du théorème des moments. On déplace le long de cette règle un petit cavalier en fil de platine pesant 1^{cg}, par exemple, et dont l'effet est en raison inverse de sa distance au point O. On arrive ainsi aux fractions de milligramme. Ce cavalier se manœuvre par une tige qui se prolonge jusqu'à l'extérieur de la cage dans laquelle est contenu tout l'appareil; la balance est supportée, du reste, par une tablette à vis calantes V dont un petit niveau sphérique sert à reconnaître l'horizontalité.

Mode opératoire. — Il est inutile d'insister sur la délicatesse d'une pesée de précision : la balance est l'instrument le plus parfait qu'un physicien puisse avoir à manier, mais c'est aussi celui dont l'emploi exige les soins les plus minutieux. La balance des laboratoires de Physique porte généralement 1^{kg} et accuse $\frac{1}{10}$ de milligramme. Il faut bien peu de chose pour introduire une cause d'erreur égale à ce dernier chiffre ; aussi les plus grandes précautions sont-elles à prendre quand on fait une pesée. On doit dessécher avec soin, à l'aide de vases renfermant de l'acide sulfurique, l'air intérieur de la cage et n'en ouvrir les portes que pour l'introduction des poids. Afin d'éviter les tâtonnements, il est souvent utile de chercher au préalable, par une pesée simple sur une bonne balance de Roberval, le poids approché du poids à peser, afin de n'avoir à rechercher, pour la pesée exacte, que les derniers poids divisionnaires. Les poids ne doivent jamais être manœuvrés à la main, mais toujours à l'aide d'une pince.

L'observation du zéro de l'aiguille exige aussi quelques précautions. Avec une balance sensible, il est extrêmement difficile d'arriver à ramener l'aiguille à rester immobile sur son zéro ; aussi vaut-il mieux s'approcher du zéro autant qu'on le peut et déterminer expérimentalement la petite inclinaison existant encore dans la balance. Comme, en pratique, l'immobilité absolue serait trop longue à obtenir, on observe les divisions extrêmes entre lesquelles oscille l'aiguille ; on en note un nombre impair. Supposons qu'on observe trois divisions n, n', n'' : l'équilibre correspondrait évidemment à l'arrêt de l'aiguille devant une division donnée par la relation

$$N = \frac{n + 2n' + n''}{4},$$

et il ne reste plus qu'à *tarer* la division, c'est-à-dire à déterminer empiriquement à quelle fraction du gramme mise en surcharge correspond un déplacement angulaire d'une division de l'aiguille.

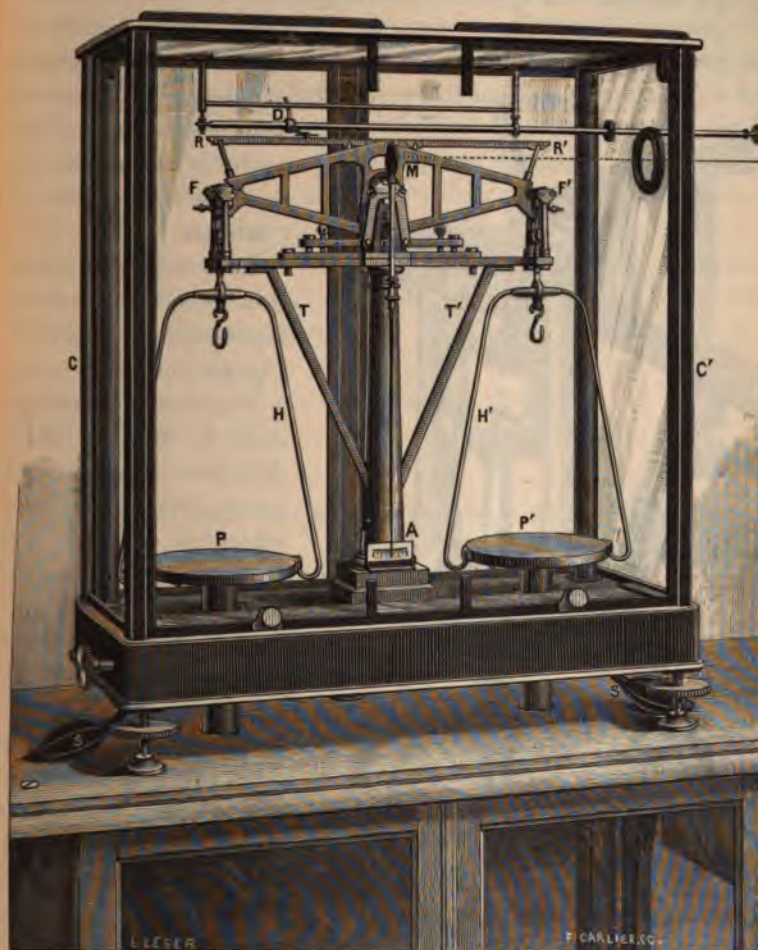
On voit donc combien sera délicate et longue l'opération de la pesée. L'essai surtout des subdivisions dernières est très pénible ; la nécessité d'opérer en mesurant des oscillations qui se font lentement accroît encore le temps nécessaire à la mesure.

Nous allons donner maintenant la description détaillée de la grande balance du Laboratoire des Recherches physiques de la Sorbonne. Construite par Ruprecht, de Vienne, elle porte 5^{kg} dans chaque plateau et, dans ces conditions, accuse une surcharge de $\frac{1}{10}$ de milligramme.

La figure 22 représente l'ensemble de l'appareil.

La balance est contenue dans une cage de laiton fermée par des glaces. FF' est le fléau en bronze doré, surmonté de la règle RR' destinée à recevoir les cavaliers. Ceux-ci sont manœuvrés par une longue

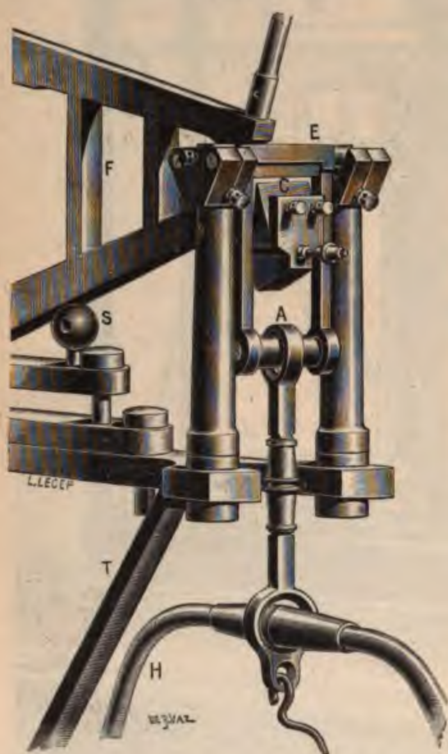
Fig. 22.



tige unique, qui se termine par un crochet D. Un butoir, formé d'une tige de laiton, empêche le crochet de venir frapper la règle R et d'imprimer un choc quelconque au fléau. P et P' sont les plateaux supportés par leurs étriers H, H'; l'aiguille verticale, solidaire du fléau, se meut devant un cadran d'ivoire A; en outre, un miroir M est fixé

au-dessus du couteau central qui supporte le fléau. Ce miroir sert envoyer, sur une mire éloignée, un rayon réfléchi et à augmente ainsi la précision des lectures pour l'appréciation des petites inclinaisons du fléau. Enfin, en S et S' sont deux petites poires de caoutchouc à l'aide desquelles on insuffle légèrement de l'air sous celui des plateaux qui descend : on amortit ainsi simplement et sûrement les oscillations de la balance. Au-dessus de la poire S, à gauche de la balance, se voit le bouton qui sert à soulever la fourche T, T', destinée à soulager les couteaux.

Fig. 23.



Le détail de la suspension de ces couteaux est représenté sur la figure 23. Chaque couteau C est relié à l'extrémité correspondante du fléau par six vis, dont trois se voient sur la figure; ces vis servent au réglage du couteau en hauteur, en distance au couteau central, et en direction d'arête. Au-dessus du couteau est le plan d'agate supporté par l'étrier E; à l'état de repos, cet étrier est soulevé et ne s'appuie pas sur le tranchant du couteau C. L'étrier est soulevé par deux colonnes que fait mouvoir la tige T, commandée par le bouton qui sert à manœuvrer la balance. L'anneau A repose lui-même sur la barre inférieure du cadre de l'étrier par un profil tranchant, et c'est sur un deuxième anneau tranchant que s'appuie la branche H qui supporte le plateau. La tige T soulève l'étrier, et le bouton S vient en même temps soulager le fléau.

On voit qu'avec un tel instrument la précision la plus grande est réalisée dans la construction. Quant à la précision dans la mesure,

rappelons que l'on peut, avec cette balance, peser 5^{kg} à $\frac{1}{10}$ de milligramme près, ce qui fait une erreur relative moindre que $\frac{1}{50000000}$ (un *cinquante-millionième*).

19. — BOITES DE POIDS.

La balance devant servir à la comparaison des masses et, par suite, des poids, le physicien doit avoir à sa disposition des étalons de poids dont on puisse faire des combinaisons variables à volonté, de façon à réaliser un poids quelconque. Ces étalons se composent de multiples du gramme, réunis dans des boîtes spéciales. Ils ont la forme de cylindres dont le diamètre égale la hauteur, surmontés d'un bouton servant à les manier commodément.

La boîte la plus usitée dans les laboratoires de Physique permet de réaliser un poids total de 2^{kg} et comprend d'abord un étalon du kilogramme, puis les poids suivants :

500^g	200^g	100^g	100^g	
50	20	10	10	en tout, 1000^g.
5	2	2	1	

On ajoute à cette boîte une boîte de divisions du gramme, ainsi composée :

$0^g,5$	$0^g,2$	$0^g,1$	$0^g,1$	
0,05	0,02	0,01	0,01	en tout, 1^g.
0,005	0,002	0,002	0,001	

Ces subdivisions sont de petites lames carrées de platine ou d'aluminium. Quant aux subdivisions du milligramme, on les évalue par l'artifice des cavaliers.

Avant d'employer une boîte de poids, il faut en faire une vérification minutieuse que sa composition même rend, heureusement, assez facile. On emploie pour cela la méthode de Borda ou celle de Gauss, dont nous parlerons plus loin.

On commence par voir si les deux poids de 100^g sont bien égaux; si cette condition est réalisée, leur somme doit être égale au poids marqué 200; de même pour les poids de 10^g et de 20^g et enfin pour les deux poids de 2^g qui doivent être égaux.

On compare ensuite, d'une part les poids de 5^g, d'autre part le groupe des trois derniers, et ainsi de suite en remontant; finalement toute la série doit être égale à l'étalon du kilogramme.

Quant à ce dernier, il doit être comparé directement à l'un des étalons fournis par le Bureau international des Poids et Mesures.

Naturellement, il faut faire, pour les subdivisions du gramme, la même comparaison que pour ses multiples.

20. — MÉTHODES DE PESÉE.

Quel que soit le soin avec lequel la balance ait été construite, on ne lui suppose jamais de *justesse;* on ne recherche que sa *sensibilité.* Quand cette condition est remplie, voici comment on se sert de l'instrument pour obtenir des mesures précises.

1° **Méthode de Borda.** — On met le corps à peser dans l'un des plateaux et, par l'addition graduelle de tare métallique, dans l'autre plateau, on ramène l'aiguille au zéro.

On enlève alors le corps et l'on met à sa place des multiples d'abord, puis des sous-multiples du gramme, et enfin on manœuvre les cavaliers jusqu'à ramener de nouveau l'aiguille au zéro : la somme des poids employés représente évidemment le poids du corps.

2° **Méthode de Gauss.** — On met le corps dans le plateau de droite et on l'équilibre par des poids p placés dans le plateau de gauche; on enlève alors le tout, on met le corps dans le plateau de gauche et on l'équilibre en mettant dans le plateau de droite des poids dont la somme p' est toujours très voisine mais différente de p.

Désignons par x le poids du corps, par l et l' les longueurs respectives des deux bras du fléau. On a, dans la première opération, en appliquant le théorème des moments,

$$xl = pl'$$

et, dans la seconde,

$$xl' = p'l;$$

multiplions membre à membre,

$$x^2 = pp'.$$

Le poids cherché est donc la moyenne géométrique des deux pesées.

C'est par cette méthode qu'on compare entre eux, au Bureau international des Poids et Mesures, les étalons du kilogramme.

3° **Méthode de pesée à charge constante.** — Mais, dans les deux méthodes précédentes, la charge totale portée par la balance est égale,

sensiblement, au double du poids du corps. Or la formule (2) montre que la sensibilité n'est pas indépendante de la charge. Si donc on veut que la balance ait une sensibilité constante, il faut qu'elle porte une charge toujours la même : il est naturel de choisir, pour cela, sa charge maxima.

Voici comment on opère, dans ce cas :

Supposons que l'on opère avec une balance portant 1^{kg} dans chaque plateau et sensible au milligramme; on met dans l'un des plateaux un poids unique de 1^{kg}; dans l'autre, toute la série des poids divisionnaires dont la somme fait également 1^{kg}. Si la balance est juste, l'aiguille reste au zéro; sinon, on l'y ramène par une très petite tare placée du côté convenable; on place alors le corps du côté des poids divisionnaires et l'on enlève un certain nombre de ceux-ci jusqu'à ce que l'équilibre soit rétabli : la somme des poids enlevés représente évidemment le poids du corps, mais on a eu l'avantage d'opérer avec une balance ayant toujours la même sensibilité, puisqu'on lui fait toujours porter la même charge : 1^{kg} dans chaque plateau.

21. — MESURE DES FORCES : TORSION.

La balance sert à la comparaison directe des masses; elle peut aussi servir à la mesure des forces dont la direction est verticale, comme certaines actions électrodynamiques que l'on peut équilibrer par des poids; il existe aujourd'hui des électrodynamomètres basés sur ce principe; mais, quand la direction de la force n'est plus verticale, la balance n'offre plus les mêmes avantages : elle exigerait des renvois de mouvement qui ôteraient toute précision à la mesure.

Il y a deux procédés de mesure des forces fort usités en Physique : la *torsion* et la *méthode des oscillations;* le premier peut être réalisé de deux façons différentes : ou par l'emploi d'un *fil métallique unique* ou par ce qu'on appelle une *suspension bifilaire.*

1° **Torsion.** — C'est Coulomb qui a, le premier, employé la torsion à la mesure des petites forces, à l'occasion de l'étude qu'il a faite de la loi fondamentale des attractions et répulsions électriques; il a fait auparavant une étude complète des lois de la torsion.

Quand un fil cylindrique élastique de longueur l et de diamètre d est suspendu par une de ses extrémités à un support fixe dans lequel il ne peut pas tourner, il faut appliquer à sa partie inférieure, dans un plan perpendiculaire à son axe, pour le tordre d'un angle égal à 1,

un couple dont le moment $\mathfrak{M}$ est donné par la relation

$$\mathfrak{M} = \mu \frac{d^4}{l};$$

le moment du couple de torsion est donc proportionnel à la quatrième puissance du diamètre, en raison inverse de la longueur, et proportionnel à un coefficient spécifique de chaque corps, μ, qu'on appelle *coefficient de torsion*.

Faisons, dans cette expression, $d = l = 1$; il vient

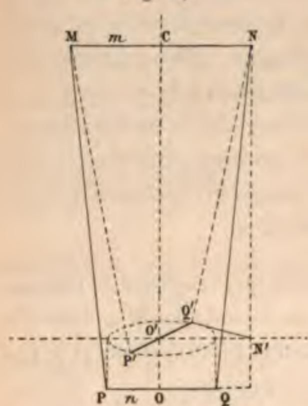
$$\mathfrak{M} = \mu :$$

le coefficient μ de torsion d'un corps est donc le moment du couple qu'il faudrait appliquer à ce corps pour tordre d'un angle égal à 1 un cylindre ayant comme diamètre 1^{cm} et comme hauteur 1^{cm}. L'expérience a montré que la torsion était sensiblement indépendante de la tension du fil.

La valeur du moment du couple de torsion est exactement proportionnelle à l'angle de torsion θ et a par conséquent pour expression $\mathfrak{M}\theta$. Cet appareil peut donc être employé pour équilibrer à l'état statique de faibles couples horizontaux par la torsion d'un fil métallique convenablement choisi.

Le fil de torsion est devenu le plus sensible des dynamomètres depuis que l'on emploie les fils de quartz, dont Boys a indiqué le mode de fabrication. Ces fils peuvent être obtenus avec une extrême finesse (de $\frac{1}{50}$ à $\frac{1}{500}$ de millimètre de diamètre). Leur constante de torsion est très faible ($3,47\ 10^{-12}$ à $22°$C.) et ils ont une élasticité presque parfaite, c'est-à-dire qu'ils ne gardent pas de déformation permanente, même après une torsion relativement grande.

Fig. 24.



2° **Suspension bifilaire.** — Imaginons deux fils identiques, suspendus en deux points d'un même plan horizontal et supportant par leurs extrémités inférieures un corps pesant, les deux points d'attache à la même hauteur.

Dans ces conditions (*fig.* 24), le système sera en équilibre quand la figure formée par les fils et les droites joignant les points de sus-

pension et les points d'attache sera plane : nous supposerons, pour plus de simplicité, qu'elle soit un trapèze isoscèle. Soient l la longueur de chacun des deux fils, m la longueur CM, n la longueur OP.

Si l'on fait tourner le système d'un angle θ autour de l'axe vertical OC, la barre suspendue s'élève jusqu'en P'Q'; menons l'horizontale O'N' et projetons N sur cette droite, en N'; posons

$$CO' = NN' = z.$$

On a

$$z^2 = \overline{NQ'}^2 - \overline{Q'N'}^2,$$

$$z^2 = l^2 - \overline{Q'N'}^2;$$

or nous avons, dans le triangle N'O'Q',

$$\overline{Q'N'}^2 = m^2 + n^2 - 2mn\cos\theta;$$

substituons dans z^2,

$$z^2 = l^2 - m^2 - n^2 + 2mn\cos\theta,$$

$$z^2 = l^2 - (m-n)^2 - 4mn\sin^2\frac{\theta}{2};$$

différentions par rapport à θ,

$$z\,dz = -mn\sin\theta\,d\theta.$$

Désignons par $\mathfrak{M}$ le moment du couple qu'il faut appliquer horizontalement à la barre pour l'empêcher de revenir à sa position initiale. Si ce couple agit sur la barre, il effectue un travail égal et contraire à celui de la pesanteur. Soit P le poids de la barre; nous aurons, si le déplacement est très petit,

$$\mathfrak{M}\,d\theta = -P\,dz,$$

$$\mathfrak{M}\,d\theta = \frac{Pmn\sin\theta\,d\theta}{z}$$

ou, en remplaçant z par sa valeur,

$$\mathfrak{M} = \frac{Pmn\sin\theta}{\sqrt{l^2-(m-n)^2-4mn\sin^2\frac{\theta}{2}}}.$$

Le moment du couple de torsion bifilaire est proportionnel au sinus de l'angle de torsion.

Si les fils sont parallèles au début, $m = n$; nous avons alors

$$\mathfrak{M} = \frac{P m^2 \sin\theta}{\sqrt{l^2 - 4 m^2 \sin^2\frac{\theta}{2}}}.$$

Si l'on néglige m par rapport à l, on voit immédiatement que $\mathfrak{M}$ est inversement proportionnel à l : la formule peut s'écrire

$$\mathfrak{M} = \frac{P m^2 \sin\theta}{l};$$

par suite, la sensibilité, qui est l'inverse du couple tordant, est sensiblement proportionnelle à la longueur des fils et inversement proportionnelle au poids de l'appareil et au carré de l'écartement des fils.

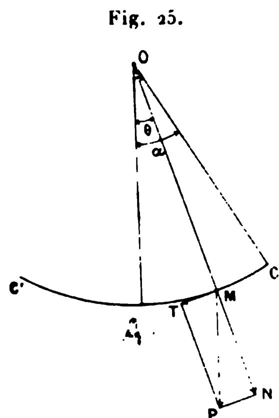
IV. — MESURE DES TEMPS. PENDULE.

22. — THÉORIE DU PENDULE.

Pendule simple. — Pratiquement irréalisable, le pendule simple se compose, par définition, d'un point matériel pesant, suspendu à un point fixe par un fil sans masse, rigide et inextensible.

Soit OA (*fig.* 25) le fil au repos; O est le point de suspension, A le point matériel. Si l'on écarte le fil de sa position d'équilibre jusqu'en OC, la pesanteur, agissant sur le point pesant, le ramènera suivant OA; il dépassera cette position, atteindra, en ralentissant sa vitesse, la position symétrique OC', où il s'arrêtera pour revenir en OC, et ainsi de suite : dans ce mouvement, le point C décrit l'arc de cercle CAC', ayant O comme centre et OA pour rayon.

Fig. 25.



Ces angles étant comptés à partir de la droite OA positivement vers la droite, considérons une position intermédiaire quelconque du point M, définie par l'angle θ. Le poids mg du point M se décompose en deux forces : l'une normale à l'arc de cercle, c'est MN; l'autre tangente à cet arc, c'est MT. La composante normale MN est détruite par la résistance du fil supposé inextensible. Le point pesant est donc soumis à l'action

de la seule force tangentielle MT, qui le fait mouvoir sur l'arc de cercle CC'.

Comptons les arcs à partir de C; soit s l'arc CM.

La composante MT a pour expression

$$\mathrm{MT} = mg\sin\theta,$$

m étant la masse du point pesant et g l'intensité de la pesanteur au lieu de l'expérience.

Mais l'accélération du mouvement $\frac{d^2s}{dt^2}$ a la même expression numérique que la force par unité de masse qui produit ce mouvement : on a donc

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g\sin\theta.$$

D'autre part, on a, α étant l'écart extrême,

$$s = l(\alpha - \theta);$$

Prenons la dérivée seconde

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -l\frac{d^2\theta}{dt^2},$$

et, par suite,

(1) $$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta.$$

Telle est l'*équation différentielle* du mouvement du pendule simple.

23. — CAS DES PETITES OSCILLATIONS.

Si nous supposons θ assez petit pour qu'on puisse confondre l'arc avec le sinus, on écrira

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta.$$

Multiplions les deux membres par $2\frac{d\theta}{dt}$:

$$2\frac{d^2\theta}{dt^2}\frac{d\theta}{dt} = -2\frac{g}{l}\theta\frac{d\theta}{dt}.$$

Le premier membre est la dérivée de $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ et le second celle de $-\sqrt{\frac{g}{l}}\theta^2$; on a donc

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\sqrt{\frac{g}{l}}\theta^2 + c;$$

la constante se détermine facilement en remarquant que. au pour $\theta = \alpha$, $\frac{d\theta}{dt}$, qui n'est autre chose que la vitesse de pesante, est nulle; on aura donc

$$o = -\sqrt{\frac{g}{l}}\alpha^2 + c$$

et

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\sqrt{\frac{g}{l}}(\alpha^2 - \theta^2)$$

ou

$$\frac{d\theta}{\sqrt{\alpha^2 - \theta^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}}\,dt.$$

Le premier membre est la dérivée de arc sin $\frac{\theta}{\alpha}$; on a donc

$$\text{arc sin}\,\frac{\theta}{\alpha} = \sqrt{\frac{g}{l}}\,t + c'$$

ou

$$\theta = \alpha \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + c'\right).$$

Choisissons, comme origine du temps, l'instant où le r trouve au point C' symétrique de C; on voit que t sera nul θ sera égal à $-\alpha$; on aura donc

$$-1 = \sin c' \qquad \text{et} \qquad c' = -\frac{\pi}{2};$$

l'équation du mouvement devient

$$\theta = \alpha \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t - \frac{\pi}{2}\right) = -\alpha \cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t;$$

appelons T le temps d'une oscillation double, c'est-à-dire que le pendule met à aller de C' en C et à faire retour en C' qu'on appelle la *période* du mouvement pendulaire; on v sera nul pour

$$t = \frac{T}{4},$$

ce qui s'écrit

$$o = -\alpha \cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,\frac{T}{4};$$

donc

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\,\frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}$$

et

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}}; = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

le temps t d'une demi-oscillation est donc

$$(1) \qquad t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

C'est la formule habituelle du pendule et, par suite, on a

$$(2) \qquad \theta = -\alpha \cos 2\pi \frac{t}{T}.$$

Cette équation fait connaître la position du pendule en fonction du temps; c'est ce qu'on appelle l'*élongation;* on en déduit

$$(3) \qquad \frac{d\theta}{dt} = V = \alpha\frac{2\pi}{T}\sin 2\pi\frac{t}{T},$$

équation qui fait connaître à chaque instant la vitesse du pendule.

La discussion de ces trois équations fait connaître toutes les lois du mouvement pendulaire.

1° En particulier, comme la formule (1) ne contient aucun angle, on voit que *la durée des petites oscillations du pendule simple est indépendante de leur amplitude ;*

2° *En un lieu déterminé, la durée des oscillations est proportionnelle à la racine carrée de la longueur du pendule.*

Ces deux lois ont été déduites de l'observation par Galilée.

Mais ce qu'il importe avant tout de remarquer, c'est que ces formules du pendule s'appliqueront à tous les cas où le problème étudié conduira à l'équation différentielle d'où nous sommes partis.

Ainsi, elles représenteront les lois du mouvement pendulaire d'un corps soumis à des forces électriques ou magnétiques, pourvu que leur champ, comme le champ de la pesanteur dans le cas du pendule, soit uniforme; elles représenteront aussi les lois du mouvement d'un corps qui, écarté de sa position d'équilibre, y sera ramené par une force proportionnelle à l'écart.

24. — CAS DES OSCILLATIONS D'AMPLITUDE QUELCONQUE.

Nous avons obtenu, avant de supposer θ très petit, l'équation

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta.$$

Multiplions les deux membres de cette équation par $2\,d\theta$, nous aurons

$$2\,d\theta \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{2g}{l}\sin\theta\, d\theta\,;$$

le premier membre est la dérivée de $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$, le second de $\frac{2g}{l}\cos\theta$. On peut donc écrire

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}\cos\theta + c.$$

Les conditions de l'expérience vont nous servir à déterminer cette constante; pour $t = 0$, nous devons trouver $\theta = \alpha$ et $\frac{d\theta}{dt} = 0$; cela exige que l'on ait

$$0 = \frac{2g}{l}\cos\alpha + c,$$

ce qui donne la valeur de la constante. Remplaçons-la par sa valeur, et il vient

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\alpha),$$

d'où, en prenant les racines carrées et tirant la valeur de dt :

$$dt = \pm\sqrt{\frac{l}{2g}}\,\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}.$$

L'intégration effectuée donne, tous calculs faits, pour le temps de la demi-oscillation

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\sin^4\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\sin^6\frac{\alpha}{2} + \ldots\right].$$

Si, sans être infiniment petit, α l'est assez pour qu'on puisse confondre les sinus avec les arcs et négliger les termes en $\sin^4\frac{\alpha}{2}$, on a la formule très usitée

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right).$$

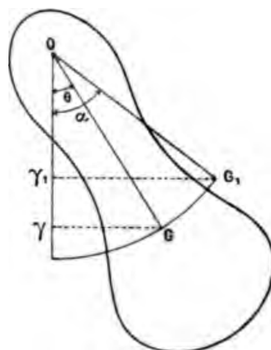
25. — PENDULE COMPOSÉ.

Les calculs précédents ne s'appliquent qu'à l'idéal pendule simple. En pratique, pour constituer un pendule, on suspend une masse pesante à une tige dont la masse n'est pas négligeable. C'est ce qu'on

appelle un ***pendule composé***. Nous sommes donc ramenés, pour étudier ce cas, à chercher la loi du mouvement pendulaire d'un corps solide de forme et de masse quelconques, oscillant autour d'un axe horizontal ne passant pas par son centre de gravité.

Soit un corps quelconque (*fig.* 26) dont le centre de gravité est en G. Nous supposerons ce corps mobile autour d'un axe horizontal passant par le point O. Joignons OG, et posons $OG = a$.

Fig. 26.



Quand, sous l'action de la pesanteur, le corps oscillant passe de la position OG_1 à la position OG, le travail dépensé a pour expression

$$\mathfrak{T} = Mga(\cos\theta - \cos\alpha);$$

appliquons à ce corps le théorème des forces vives : soit m une masse faisant partie du corps oscillant et soit ω sa vitesse angulaire, vitesse qui est la même, évidemment, pour toutes les molécules du corps supposé solide et indéformable soit r sa distance au point O. Nous avons, pour cette molécule m,

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2,$$

et, pour chaque molécule du corps, nous aurons une relation analogue, ce qui nous donnera

$$\sum \frac{1}{2}mv^2 = \sum \frac{1}{2}m\omega^2 r^2.$$

Or, on appelle ***moment d'inertie*** du corps oscillant autour de l'axe O et l'on représente par I l'expression

$$I = \sum mr^2.$$

Nous avons donc, dans le cas actuel,

$$Mga(\cos\theta - \cos\alpha) = \frac{1}{2}\omega^2 I.$$

Nous allons nous placer ***uniquement dans le cas des oscillations très petites***.

Remplaçons $\cos\theta$ et $\cos\alpha$ par leur valeur en fonction de θ et α, en

nous limitant aux premiers termes du développement; il vient

$$\frac{1}{2} M g a (\alpha^2 - \theta^2) = \frac{1}{2} \omega^2 I;$$

comme

$$\omega = \frac{d\theta}{dt},$$

on a

$$M g a (\alpha^2 - \theta^2) = I \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2,$$

ou

$$\frac{d\theta}{\sqrt{\alpha^2 - \theta^2}} = \sqrt{\frac{M g a}{I}}\, dt.$$

L'équation ne diffère de celle trouvée pour le pendule simple par la substitution de $\sqrt{\frac{I}{M g a}}$ à $\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Le calcul, conduit de la même façon, donnerait donc la d d'une demi-oscillation

$$(1) \qquad t = \pi \sqrt{\frac{I}{M g a}}.$$

I, nous l'avons vu, est, par définition, le *moment d'inerti* corps oscillant, par rapport à l'axe O; Mga est le *moment stat* maximum de ce corps par rapport au même axe, car, si nous su sons le centre de gravité du corps arrivé sur l'horizontale pa par le point de suspension, sa distance au point O est a et poids, agissant au bout du bras de levier a, est précisément Nous avons donc, sous une autre forme,

$$(2) \qquad t = \pi \sqrt{\frac{\text{Moment d'inertie}}{\text{Moment statique}}}.$$

26. — PENDULE SIMPLE SYNCHRONE D'UN PENDULE COMPOSÉ.

Si le pendule se réduit à un pendule simple, nous avons

$$I = m a^2$$

et

$$t = \pi \sqrt{\frac{m a^2}{m a g}},$$

et nous retrouvons la formule précédemment établie

$$t = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Comparons les deux formules que nous avons trouvées pour le pendule simple et le pendule composé, chacune dans le cas des petites oscillations

$$t = \pi\sqrt{\frac{I}{Mga}}, \qquad t = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

On voit que, dans le cas du pendule simple, l'expression $\frac{I}{Ma}$ se réduit à a.

Posons donc

$$l = \frac{I}{Ma},$$

l sera la longueur d'un pendule simple ayant la même durée d'oscillation que le pendule composé dont le centre de gravité est à une distance a du centre de suspension.

On appelle, en Mécanique rationnelle, *rayon de giration* d'un corps dont le moment d'inertie est Ω, par rapport à cet axe, une longueur K définie par la relation

$$\Omega = \sum m\rho^2 = MK^2.$$

Mais on démontre également que *le moment d'inertie d'un corps autour d'un axe quelconque est égal au moment d'inertie autour d'un axe passant par le centre de gravité, augmenté du produit de la masse totale du corps* M *par le carré de la distance* a *de l'axe nouveau au centre de gravité.*

On a donc

$$I = \sum mr^2 = M(a^2 + K^2).$$

Si nous remplaçons I par cette valeur dans la formule qui donne la valeur de l, nous aurons

$$l = a + \frac{K^2}{a}.$$

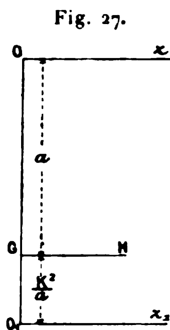
On voit, par cette formule, que l est toujours plus grand que a.

Il peut en différer très peu ou beaucoup. Si, à l'instar de Bouguer et de La Condamine, de Borda, de Biot, on constitue un pendule d'une sphère de matière dense, suspendue à un fil long et fin, l est fort peu différent de a; si, au contraire, on réalise un système complexe oscillant comme le *métronome* des musiciens, on voit que l et a varient en sens inverse l'un de l'autre.

27. — RÉCIPROCITÉ DE L'AXE DE SUSPENSION ET DE L'AXE D'OSCILLATION.

Soit OZ l'axe de suspension d'un pendule composé; appelons, comme précédemment, a la distance du centre de gravité à cet axe (*fig.* 27); menons par G un axe GH parallèle à OZ et soit K le rayon de giration par rapport à la droite GH. Menons une droite parallèle à GH, à une distance de G égale à $\frac{K^2}{a}$: nous aurons ainsi une droite O_1Z_1 qui s'appelle l'*axe d'oscillation* du pendule.

Fig. 27.



On doit à Huyghens le remarquable théorème suivant :

Si l'on fait osciller le pendule composé autour de son axe d'oscillation, l'ancien axe de suspension devient le nouvel axe d'oscillation.

Si, en effet, nous faisons osciller le pendule autour de O_1Z_1, le rayon de giration, par rapport à GH, est encore égal à K et la longueur du pendule synchrone, dans ce nouveau cas, est

$$l_1 = O_1G + \frac{K^2}{O_1G},$$

c'est-à-dire

$$l_1 = \frac{K_2}{a} + \frac{K_2}{\frac{K^2}{a}} = a + \frac{K_2}{a}.$$

Nous verrons, en parlant du *pendule réversible* de de Prony, une élégante application de ce théorème.

28. — EMPLOI DU PENDULE A LA MESURE DU TEMPS.

L'unité de temps est la seconde sexagésimale de temps moyen ou la 86400e partie du jour solaire moyen. L'instrument qui sera le type de ceux qui servent à mesurer le temps sera donc celui qui fera une demi-oscillation dont la durée sera exactement d'une seconde, c'est-à-dire le pendule battant la seconde, dont nous avons donné la théorie.

Les pendules métalliques ont l'inconvénient de se dilater sous l'action de la chaleur. Aussi a-t-on imaginé des pendules *compen-*

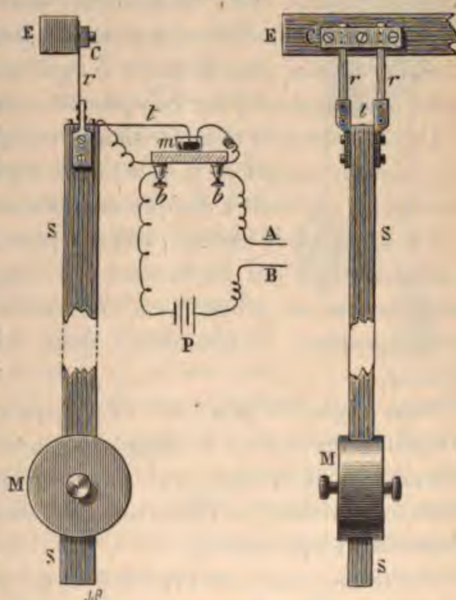
sateurs qui, au moyen d'un système de deux dilatations contraires, maintiennent constantes la distance entre le point de suspension et le centre de gravité de la masse oscillante : tels sont le pendule de Graham et le pendule à gril. Nous nous contenterons de les citer sans les décrire.

On peut employer le pendule de deux manières : en le laissant osciller librement, auquel cas ses oscillations, après avoir diminué d'amplitude, finiront par s'éteindre; ou bien en *entretenant* son mouvement par l'intervention d'une force périodique qui conserve aux oscillations leur amplitude initiale. Nous allons étudier successivement les deux méthodes.

29. — PENDULE OSCILLANT LIBREMENT.

Un pendule à secondes très bon et très simple est celui qui est formé d'une tige de bois de sapin verni, très sec et très droit de fil. Ce pendule est sensiblement indifférent aux variations de température, car le coefficient de dilatation linéaire du sapin dans le sens des fibres est seulement de 3 millionièmes; de plus, sa grande simplicité de construction en fait un instrument précieux. Il est, d'ailleurs, susceptible d'une précision extrême; il suffit d'en faire un réglage suffisamment minutieux.

Fig. 28.



Voici la description d'un pendule à secondes très employé dans les laboratoires de Physique.

La tige est une règle plate de sapin SS (*fig.* 28) portant une masse de fonte M, que l'on assujettit à la hauteur convenable à l'aide d'une vis de pression. A la partie supérieure de cette tige se trouvent deux pièces de cuivre qui servent de points d'attache à deux petits ressorts plats en acier *rr*. Ces ressorts sont réunis par une barrette

métallique C, fixée elle-même très solidement à une forte équerre fixe E. Cette équerre est boulonnée dans un mur ou fixée à un support spécial et très stable.

Perpendiculairement à la tige S, et dans son plan d'oscillation, est fixée une petite tige de cuivre *t*, recourbée à son extrémité, qui se termine par une pointe de platine affleurant à la surface du mercure *m* contenu dans un petit godet placé sur une tablette d'ébonite fixée à côté du pendule sur le même support que lui. Le mercure d'une part, la tige *t* d'autre part, sont en communication, par deux fils fins, aux deux bornes *b* auxquelles aboutissent les conducteurs polaires d'une pile P, qui contient dans son circuit les appareils enregistreurs qui conviennent à l'expérience que l'on exécute. A chaque oscillation, le courant est interrompu et établi ; on transmet donc à tous les appareils intercalés dans le circuit de la pile des signaux périodiques espacés d'une seconde.

Nous verrons, en parlant des inscripteurs, comment on peut enregistrer graphiquement les indications du pendule à secondes ; mais souvent un observateur a besoin de suivre de l'œil le déplacement de l'organe mobile d'un instrument, tout en comptant les secondes. Dans ce cas, il installera à côté de son appareil un électro-aimant dont l'armature sera attirée à chaque seconde : le bruit ainsi produit suffit parfaitement pour compter les secondes.

Une disposition extrêmement commode et simple consiste à intercaler dans le circuit de la pile P un téléphone que l'on tient à l'oreille ; on entend un bruit à chaque oscillation du pendule.

Un tel pendule oscille pendant plus d'une heure, il se prête donc parfaitement à des expériences de longue durée. La mesure de la seconde par ce procédé est infiniment plus précise qu'à l'aide des chronographes à secondes, dont l'exactitude laisse souvent à désirer.

Pour régler ce pendule, on compare la durée d'un grand nombre d'oscillations à une horloge astronomique ou à un chronomètre marin très bien réglé sur une horloge ; on inscrit, par exemple, 3600 oscillations, et l'intervalle de temps doit être exactement une heure de temps moyen.

Toutefois, pour des expériences de plus longue durée, on a besoin d'un instrument dont le mouvement soit assuré d'une manière permanente. C'est dans ce but qu'ont été imaginés les *pendules à mouvement entretenu* dont nous allons maintenant nous occuper.

30. — PENDULE ENTRETENU MÉCANIQUEMENT. — ÉCHAPPEMENT A ANCRE.

Tous les pendules entretenus sont en même temps des *compteurs de temps*, le mécanisme entretenant servant également de moteur à une horloge. C'est Huyghens qui, le premier, a songé à appliquer à la régulation des horloges la loi de l'isochronisme des oscillations du pendule.

Un axe O tend à tourner sous l'influence d'un moteur (*fig.* 29). Le moteur figuré sur la gravure par un poids P, supporté par une corde enroulée sur un treuil Q, n'agit en général sur l'axe O que par l'intermédiaire d'une série plus ou moins compliquée de roues dentées; mais son effort tend toujours à faire tourner la roue à rochet H. A l'état de repos, ce mouvement est empêché par une *ancre* à deux dents, GE, dont une dent bute contre une des dents de la roue à rochet et l'empêche de tourner.

Fig. 29.

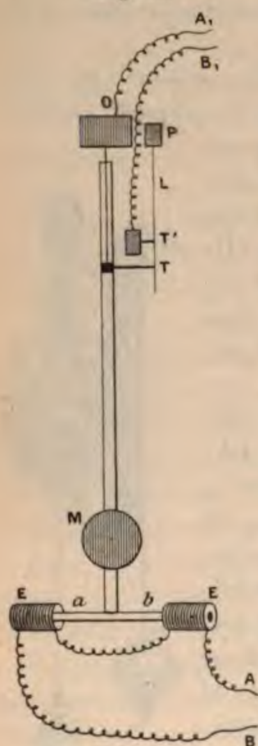


Cette ancre est solidaire d'un pendule AB par l'intermédiaire d'une fourchette C et d'un axe DF. Quand le pendule marche, la pointe E se relève et abandonne la roue dentée qui tourne d'un petit angle; mais, aussitôt, la pointe opposée s'abaisse, s'engage dans les dents et arrête la roue. A l'oscillation suivante, elle se relève à son tour, mais E descend vers la roue et s'engage non plus dans l'échancrure où elle était précédemment, mais dans la suivante, de sorte que, pour une oscillation double, la roue avance d'une dent. Le treuil marche donc d'un angle égal à chaque oscillation et, si son axe prolongé est muni d'une aiguille mobile sur un cadran, cette aiguille parcourt des arcs égaux en des temps égaux. En regardant la figure, on voit que le travail dépensé par le poids en descendant est employé à donner, à chaque oscillation, une petite impulsion à l'ancre solidaire du pendule. Celui-ci retrouve donc l'énergie que lui faisaient perdre les frottements et la résistance du milieu, et son mouvement s'entretient avec la même amplitude. Ce système s'appelle un *échappement à ancre*.

31. — PENDULE ENTRETENU ÉLECTRIQUEMENT.

Bien plus élégante est la solution donnée (janvier 1897) par M. Lippmann, pour l'entretien électrique des pendules.

Fig. 30.



La théorie mathématique montre que, quand une force, même instantanée, agit sur un pendule en marche à un instant quelconque de son oscillation, le mouvement de ce pendule est troublé. Il n'y a qu'un seul cas où le mouvement du pendule ne soit pas troublé par une impulsion tangentielle : c'est celui où cette impulsion, qui doit toujours être instantanée, agit rigoureusement au moment où le pendule passe par la verticale.

M. Lippmann a réalisé d'une manière très élégante cette condition par le dispositif suivant :

Le pendule OM (*fig.* 30) porte à sa partie inférieure un aimant *ab* qui pénètre librement dans deux électro-aimants E, E, parcourus par le même courant : ce courant, qui doit être instantané, est le courant de décharge d'un condensateur électrostatique qui se trouve fermé en TT' chaque fois que le pendule passe dans la verticale. (Ce condensateur n'est pas représenté sur la figure.) A cet effet, le pendule porte une lame T, solidaire de sa tige, et une lame fixe T' est assujettie sur le bâti qui porte l'instrument. Quand le pendule est au repos, un fil de platine très mince PL vient appuyer à la fois sur les tranches des deux lames T et T', et ferme le courant; on voit par la figure que, dès que le pendule se meut, si peu que ce soit, le courant est interrompu. La force attractive, provenant du passage du courant fermé en TT' dans les électro-aimants E, n'agit donc que rigoureusement lors du passage dans la verticale. Elle est donc entretenante sans être perturbatrice.

Pour maintenir le condensateur en charge on emploie un *relais* télégraphique polarisé, qui bascule à chaque oscillation et renverse à chaque fois le sens du courant dans les électro-aimants E; en même

temps, aux passages *pairs,* il charge le condensateur et, aux passages *impairs,* il le décharge; le mouvement de bascule effectué par l'armature de l'électro-aimant du relais permet aussi de faire intervenir une pile locale pour donner à un appareil quelconque un mouvement périodique. Il peut donc actionner une minuterie, un appareil inscripteur, etc.

Le pendule installé au laboratoire des recherches physiques de la Sorbonne marche avec une pile d'éléments Leclanché et son fonctionnement et sa précision ne laissent rien à désirer.

32. — SUBDIVISION DE LA SECONDE. — DIAPASON.

Le pendule n'est pas le seul instrument exécutant des vibrations isochrones : à température constante, un corps sonore exécute aussi des vibrations de même durée. Cette durée pouvant être très courte, on utilise cette propriété pour réaliser des fractions de seconde très petites, et l'on se sert surtout du diapason.

Un *diapason* est une verge d'acier recourbée en forme de fourchette, et qui vibre en donnant une note musicale déterminée. Si la température reste constante, la hauteur de la note l'est aussi, et l'appareil exécute en une seconde toujours le même nombre d'oscillations. On obtient facilement un instrument donnant 500 ou 1000 vibrations par seconde : chacune d'elles dure donc $\frac{1}{500}$ ou $\frac{1}{1000}$ de seconde. Si l'on munit d'un style l'une des branches du diapason, ce style tracera sur un cylindre tournant d'un mouvement uniforme une courbe sinusoïdale, à chaque période de laquelle correspondra une oscillation de l'instrument.

Malheureusement, le mouvement vibratoire de cet instrument a une amplitude rapidement décroissante. Aussi le diapason ne pourrait-il pas servir à mesurer le temps pendant une expérience de quelque durée sans un artifice spécial, qui consiste dans l'entretien électrique du mouvement vibratoire. A côté de l'une ou des deux branches du diapason, on place un électro-aimant dont la branche même du diapason forme l'armature; le tout est disposé comme une sonnerie trembleuse, et la branche vibrante elle-même, en touchant un contact ou en s'en éloignant, établit ou interrompt le courant synchroniquement avec le mouvement vibratoire; la branche mobile est, par suite, attirée régulièrement, et le mouvement est entretenu aussi longtemps qu'on le désire.

Il est bon, néanmoins, de contrôler, par l'observation d'une hor-

loge bien réglée, la durée d'un grand nombre d'oscillations; car l'attraction électromagnétique altère légèrement la durée de la vibration.

Disons enfin, pour terminer ce qui a trait à la mesure des petits intervalles de temps, que l'on peut recourir à d'autres appareils que le diapason : l'oscillation d'un corps suspendu à un fil de torsion, par exemple, permet, si le fil est gros et court, d'avoir une série d'oscillations isochrones très rapides.

33. — CHRONOMÈTRES.

Pour mesurer le temps dans une expérience de quelque durée, on peut recourir à des appareils spéciaux : les horloges et les chronomètres.

Une horloge astronomique est le type de l'instrument parfait pour la mesure du temps; elle a comme moteur un poids, c'est-à-dire une force constante et, si elle est maintenue à température constante, son échappement, commandé par un pendule oscillant isochroniquement, commandera un rouage qui tournera d'un mouvement périodiquement uniforme.

Nous ne décrirons pas ici le mouvement des horloges astronomiques : c'est le mouvement classique de l'horloge, construit seulement avec un soin et un art infinis. Le réglage se fait à l'aide d'observations méridiennes.

Le seul inconvénient de l'horloge est sa fixité : elle n'est pas transportable. Aussi les navigateurs, et souvent les physiciens, lui préfèrent-ils un instrument moins parfait, quoique très précis lui-même : le chronomètre marin.

Dans cet instrument, la force motrice est, non plus la pesanteur, mais l'élasticité d'un ressort d'acier, et la force qui règle les oscillations du régulateur est également l'élasticité d'un ressort hélicoïdal en acier, qui fait osciller l'ancre d'un échappement identique à celui des horloges.

Il est dès lors évident qu'une double cause d'altération proviendra de la variation de la température : le balancier, étant un cercle métallique dont la circonférence a une grande masse par rapport aux rayons, changera de dimensions avec la température, comme un pendule ordinaire; mais, de plus, la force motrice des rouages et celle qui fait osciller le balancier varieront aussi, puisque ce sont des élasticités de flexion.

La construction et le réglage d'un chronomètre exigent donc beau-

coup plus de précautions que ceux d'une horloge. L'habileté des constructeurs, guidée par les résultats de belles recherches mathématiques, est pourtant venue à bout de toutes les difficultés. Grâce à des balanciers compensés pour la température, à la réduction des frottements, on a aujourd'hui des chronomètres excellents, même pour les mesures astronomiques. Ces instruments demandent à être toujours horizontaux; ils sont, à cet effet, suspendus à la Cardan dans une cassette cubique fermée par un couvercle de glace.

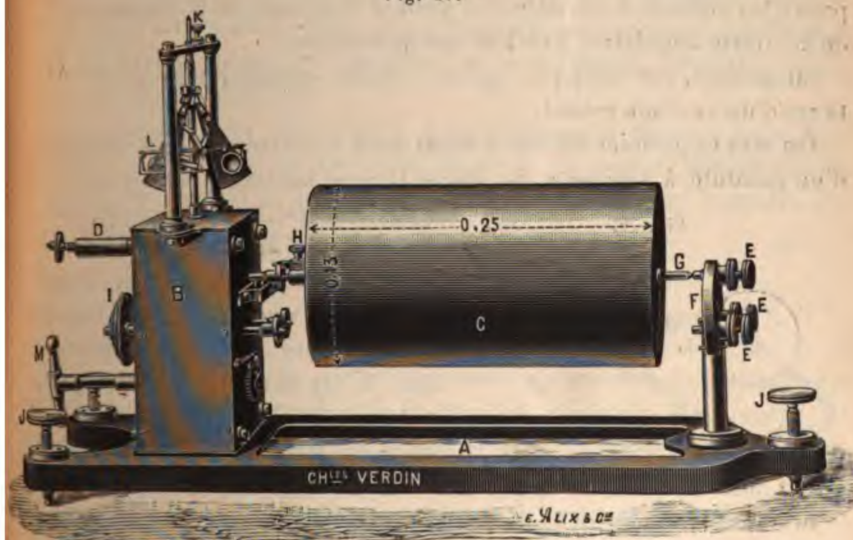
Il est presque inutile de dire que, en raison de leur délicatesse, les chronomètres craignent les chocs, les variations brusques de température et le voisinage des champs magnétiques intenses.

34. — CYLINDRE ENREGISTREUR.

Nous avons indiqué des appareils qui oscillent ou vibrent isochroniquement, et peuvent même envoyer périodiquement le courant électrique dans un circuit déterminé.

Le complément nécessaire de ces instruments est le cylindre enregistreur. Il se compose essentiellement (*fig.* 31) d'un cylindre mû

Fig. 31.



par un mouvement d'horlogerie, rendu isochrone par un régulateur centrifuge à ailettes. Sur ce cylindre est collée une feuille de papier noircie à la fumée.

Parallèlement à l'axe de ce cylindre est un chemin de fer sur lequel se meut un chariot commandé par une longue vis de bronze. Cette vis peut être mue par un mouvement d'horlogerie séparé; mais il est préférable de rendre son mouvement solidaire de celui du cylindre par une courroie sans fin.

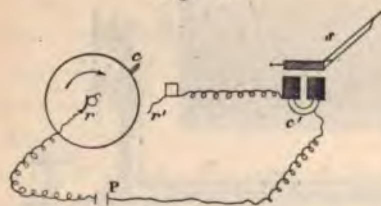
Le chariot mobile porte une tige verticale, sur laquelle peuvent se fixer, à la hauteur et dans les azimuts que l'on veut, deux autres tiges, qui portent à leurs extrémités de très petits électro-aimants. Les armatures de ces électro-aimants portent des styles en barbes de plume qui viennent affleurer les surfaces du cylindre. Quand ces styles sont immobiles et que le système est en mouvement, ils tracent une hélice sur le cylindre; mais, si ces styles sont animés d'un mouvement périodique de va-et-vient, par exemple, si le courant qui les commande est interrompu périodiquement par une branche de diapason, l'hélice sera dentelée, et, si l'on connaît exactement la vitesse de rotation du cylindre, on compte le nombre des dents pendant un tour et l'on en déduit le nombre de vibrations.

Cette déduction suppose le mouvement de rotation du cylindre rigoureusement isochrone, condition rarement réalisée. Si l'on dispose d'un pendule à secondes, on peut se dispenser de la connaissance de la vitesse angulaire. Voici de quelle manière.

Supposons, par exemple, qu'on veuille enregistrer le nombre de tours d'un système rotatif.

On met le premier électro-aimant dans le circuit de l'interrupteur d'un pendule à secondes; on munit la roue tournante d'un contact c (*fig.* 32) qui, à chaque tour, vient buter contre un ressort r' et ferme ainsi le circuit d'une pile P qui traverse la roue elle-même à l'aide d'un frotteur r appuyant sur son axe. C'est dans ce circuit qu'on place le second électro-aimant c' dont le style s fera, par conséquent, une oscillation à chaque tour et tracera une dent sur le cylindre.

Fig. 2.



Si l'on dispose les deux électro-aimants côte à côte, on aura deux courbes juxtaposées (*fig.* 33) : les sinuosités de l'une correspondent aux oscillations du pendule, celles de l'autre aux tours de la roue. Il n'est donc plus nécessaire que le cylindre enregistreur tourne d'un mouvement uniforme : il suffit de compter le nombre de dents de la

courbe des rotations comprise entre deux dents de la courbe des oscillations pour déduire le nombre des tours effectués en une seconde

Fig. 33.



par la roue étudiée. Le pendule sert ainsi à la mesure directe des vitesses.

35. — MESURE DES FORCES PAR LE PENDULE.

La formule

$$t = \pi\sqrt{\frac{\text{moment d'inertie}}{\text{moment statique}}}$$

s'applique immédiatement à un corps qui exécute des oscillations infiniment petites, dans les conditions où se produisent celles du pendule sous l'action d'une force qui ne remplit qu'une seule condition : elle doit être constante en grandeur et en direction ; elle caractérise alors un champ uniforme.

Le pendule peut donc servir à la mesure des forces ; sous des formes différentes, c'est ce même appareil qui permet d'explorer le champ terrestre de la pesanteur, le champ magnétique terrestre et les champs électriques.

36. — MESURE DE L'INTENSITÉ g DE LA PESANTEUR.

En particulier dans le cas de la pesanteur, le pendule fait connaître, s'il est au repos, la direction de la force, et, s'il est en mouvement, il permet de calculer l'intensité du champ de la pesanteur en un lieu quelconque.

Nous avons trouvé, comme expression de la loi des oscillations du pendule simple, la formule

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

dans laquelle t représente la durée d'une demi-oscillation, l la lon-

gueur du pendule simple synchrone d'un pendule composé quelconque, et g l'intensité de la pesanteur au lieu de l'expérience.

La détermination de g est donc ramenée à la mesure de deux grandeurs : une longueur l et un temps t.

Trois méthodes peuvent être employées pour la mesure de la durée d'une oscillation : la méthode des passages, la méthode des coïncidences et la méthode stroboscopique; et les expériences relatives à la mesure de la longueur du pendule sont de deux sortes : celles de Borda et celles de Kater.

37. — MÉTHODE DES PASSAGES.

La méthode des passages consiste à observer combien de fois un pendule de longueur connue passe dans la verticale pendant un temps compté par une horloge astronomique bien réglée; cette méthode, quelque fastidieuse qu'elle puisse paraître, a pourtant été employée par de nombreux expérimentateurs.

M. Berget l'a rendue d'un emploi facile et précis par la disposition suivante, qui permet même de se passer de l'horloge de comparaison :

On sait, depuis les travaux d'Edmond Becquerel, que, si l'on recouvre deux lames d'argent d'une légère couche de sous-chlorure d'argent violet, et qu'on plonge ces deux lames dans l'acide chlorhydrique un peu étendu, on peut réunir ces deux lames par un fil, traversant un galvanomètre, sans observer de courant tant que les deux lames sont dans l'obscurité; mais, si l'une d'elles est frappée par un rayon lumineux, aussitôt un courant prend naissance, accusé par une déviation instantanée de l'aiguille du galvanomètre.

M. Berget munit le pendule à observer d'un miroir qui, à chaque oscillation, lance un rayon lumineux sur une ouverture pratiquée dans la boîte qui contient la pile de Becquerel : à chaque oscillation le galvanomètre dévie. Il est facile de lui faire enregistrer à lui-même le nombre de ses déviations : à chacune d'elles l'aiguille de l'instrument vient buter contre une goutte de mercure et ferme le circuit d'une pile locale; cette pile, traversant un récepteur de télégraphe Morse, actionne l'instrument à chaque oscillation du galvanomètre, qui se trouve ainsi accusée par un point imprimé sur la bande de papier bleu.

Pour compter le temps, on braque, dans le plan méridien, une lunette. On commence l'expérience quand une étoile quelconque

passe devant le fil du réticule; on l'arrête quand elle y repasse. Il s'est alors, par définition, écoulé vingt-quatre heures sidérales, soit quatre-vingt-six mille quatre cents secondes. On n'a plus qu'à compter le nombre des traits sur la bande bleue. On règle le mouvement de déroulement de la bande de manière à avoir sensiblement un trait par millimètre. On a donc moins de 100^m de bande à dérouler. Les traits s'y comptent par dix et cent pour éviter les erreurs On a, ainsi, le temps sensiblement à $\frac{1}{100000}$ près.

Cette méthode a le triple avantage de supprimer l'horloge de comparaison et, par conséquent, les erreurs que comporte son réglage, de laisser le pendule *absolument libre*, l'enregistrement se faisant grâce à des rayons lumineux qui sont, en somme, des *leviers sans poids* et enfin de supprimer, par l'enregistrement du phénomène, les erreurs personnelles dues aux observateurs.

38. — MÉTHODE DES COINCIDENCES.

Cette méthode a été, pour la première fois, mise en expérience par Borda.

On compare à un pendule à secondes le pendule dont on cherche la durée d'oscillation. Pour cela on note le moment où les deux pendules passent sur la verticale dans le même sens; on dit qu'il y a *coïncidence*. Cette coïncidence cesse à l'oscillation suivante et ne se reproduit qu'au bout d'un certain temps. Si, pendant ce temps-là, le pendule à secondes a fait n oscillations complètes, le temps écoulé est $2n$ secondes, l'autre pendule a fait $n \pm 1$ oscillations et, par suite, le temps d'une demi-oscillation est

$$t = \frac{n}{n+1};$$

il n'est pas nécessaire d'insister, car cette expérience réalise empiriquement pour les coïncidences des oscillations, par définition même, ce que le *vernier* réalise pour la coïncidence des traits de deux règles divisées.

La cause d'erreur est, du reste, la même que pour le vernier. On sait que, dans cet instrument, on ne peut guère pousser l'approximation au delà de $\frac{1}{20}$ de millimètre; car, si l'on gagne en précision absolue, en revanche on hésite, pour la coïncidence, entre deux ou trois traits voisins, et, en somme, l'erreur est plus considérable. Il en est de même pour la coïncidence des pendules : de sorte que, par la mé-

thode de Borda, le rapport du nombre d'oscillations est donné par le rapport de deux nombres entiers connus, *au plus* à une unité près.

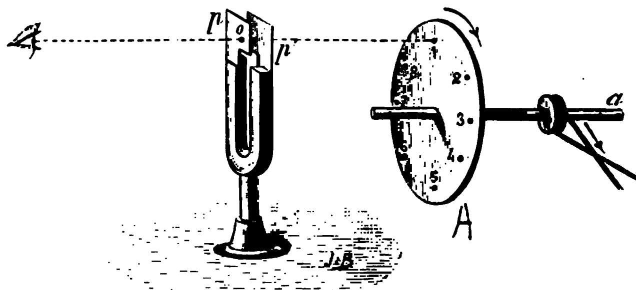
En employant des pendules dont la tige, opaque, se détache sur une fente brillante, le colonel Defforges, du Dépôt de la Guerre, a augmenté la précision dans l'observation des coïncidences, sans toutefois arriver à la rigueur des deux méthodes imaginées dans ces dernières années par M. Lippmann. Ces deux méthodes sont : la méthode stroboscopique et la méthode électrique.

39. — MÉTHODE STROBOSCOPIQUE.

Cette méthode, d'un usage général en Physique, est un type de précision expérimentale. Aussi la décrirons-nous avec quelque détail, étant donné qu'elle rentre dans la catégorie des procédés généraux de mesure des grandeurs : elle est, en effet, la méthode la plus précise que l'on connaisse pour mesurer les vitesses de rotation.

Soit, pour fixer les idées, à mesurer la vitesse de rotation d'un arbre tournant a (*fig.* 34). Nous calerons sur cet arbre un disque

Fig. 34.



blanc A, portant un certain nombre de traits ou de points noirs, angulairement équidistants : il y en a, sur la figure, huit que l'on a numérotés.

Cela posé, plaçons en avant de ce disque un appareil susceptible de produire des interruptions de lumière rigoureusement périodiques : par exemple un diapason D dont chaque branche porte une plaque p percée d'un trou o. Quand le diapason est en équilibre, ces deux trous laissent passer un rayon lumineux qui permet de voir le trait 1 du disque; mais, dès que le diapason se met à vibrer, l'œil ne verra plus le disque qu'au moment où, pendant le mouvement

vibratoire, les deux trous, repassant par la position d'équilibre, se trouveront de nouveau l'un devant l'autre.

Supposons que, pendant l'intervalle qui sépare deux passages du diapason à sa position d'équilibre, le disque tourne exactement de $\frac{1}{8}$ de tour, autrement dit que le signal 8 se substitue au signal 1. Au repos, l'œil voyait directement le trait 1 à travers les deux trous; il y a eu interruption, puis, de nouveau, pendant le temps très court du passage du rayon visuel à travers les deux trous ramenés en face l'un de l'autre par la vibration, l'œil voit un autre trait, le trait 8, à la place où, tout à l'heure, il voyait le trait 1. Comme cette substitution se fait très rapidement, grâce à la persistance de l'impression lumineuse, on croit ne voir qu'un seul trait qui semble immobile. Il en serait de même si, au lieu du trait 8, un trait d'ordre quelconque se substituait périodiquement au trait 1. En d'autres termes, on obtiendra une immobilité apparente toutes les fois que la durée de rotation du disque sera un multiple exact de la durée d'une demi-oscillation ou d'une vibration simple du diapason.

Supposons maintenant que la vitesse de substitution de deux points du disque avance un peu sur le diapason : au rétablissement du rayon lumineux à travers les deux trous, l'œil ne verra plus le trait 8 substitué au trait 1; le trait 8 aura passé un peu au delà de la position initiale, de sorte que l'œil le verra un peu à droite; il en sera de même au passage suivant. Les traits du disque auront donc l'air de se mouvoir dans le sens de sa rotation avec une vitesse apparente égale à la différence des vitesses réelles des deux corps en expérience, disque et diapason. Le mouvement apparent aurait lieu en sens inverse si le disque, au lieu d'être en avance, se trouvait en retard.

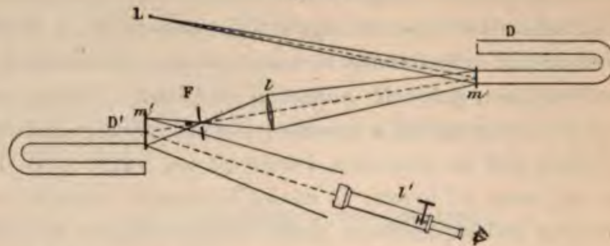
M. Lippmann a utilisé la méthode stroboscopique pour comparer les durées de vibration de deux diapasons D, D′, munis de miroirs m, m' (*fig.* 35).

Nous prendrons comme source lumineuse une fente éclairée L : la lumière se réfléchit en m et vient donner sur une fente F une image réelle de la fente L à l'aide d'une lentille interposée, l; après une seconde réflexion sur le miroir m', les rayons sont reçus dans une lunette l'.

Si les deux diapasons sont immobiles, on voit dans la lunette une bande verticale brillante. Si le diapason D′ vibre seul, le faisceau arrivera toujours jusqu'en m', mais il sera un peu dévié par suite du déplacement continuel du miroir m' qui vibre avec c; par suite, au lieu d'un trait brillant immobile, on verra dans la lunette un trait

animé d'un mouvement très rapide; par suite de la persistance de impressions sur la rétine, l'apparence sera celle d'un rectangle lum neux.

Fig. 35.



Mais, si le diapason D se met à vibrer à son tour, l'éclairage de l fente F n'a plus lieu que par intervalles, aux moments seulement o le diapason D passe par sa position d'équilibre. Si, pendant que D exécute une vibration complète, l'éclairement de la fente F a lie p fois, on aura p lignes brillantes différentes, dues aux réflexions su le miroir m' dans p positions différentes de ce miroir.

Si le nombre p est entier, le diapason D est toujours frappé pa chacun des p rayons intermittents à la même phase de son mouvemen vibratoire. Les p bandes brillantes paraissent donc fixes dans le cham de la lunette. Mais, si p est un nombre fractionnaire, les lignes lumi neuses ne sont plus fixes : elles semblent être les génératrices d'u cylindre tournant autour de son axe. Voici par quelles considération M. Lippmann rend compte de cette apparence.

D'abord, il remarque qu'on peut prendre un angle comme variabl d'un mouvement périodique vibratoire. En effet, soit mn (*fig.* 36

Fig. 36.

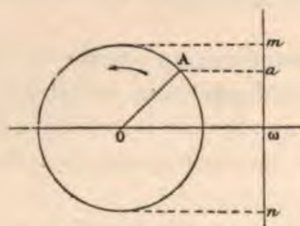
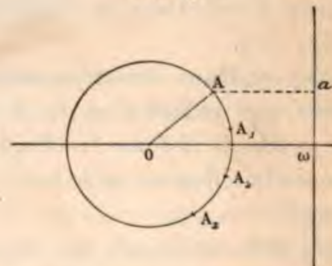


Fig. 37.



l'amplitude totale d'un tel mouvement, une oscillation de pendul par exemple : à chaque position a correspondra sur un cercle O u point A dont a serait la projection.

Nous pouvons donc prendre, pour représenter le mouvement du diapason D', un système ainsi formé d'un cercle et d'une droite (*fig.* 37).

Le temps sera proportionnel à AOω, l'écart correspondant de la branche vibrante à partir de sa position d'équilibre sera $a\omega$.

Si le diapason D' est éclairé chaque fois qu'il repasse par la même position, on aura dans la lunette une bande brillante unique; sa trace sur le plan de la figure est a.

Mais si les éclairs lancés périodiquement à travers la fente F par le diapason D rencontrent le diapason D' à des positions différentes, mais correspondant à des temps égaux, la position de D' à chaque illumination de la fente correspondra à des points A, A_1, A_2, A_3, ... terminant des arcs égaux, et qui seront donc les sommets d'une ligne brisée régulière inscrite dans la circonférence O.

La condition nécessaire et suffisante pour que cette ligne se ferme ou pour que les points A, A_1, A_2, ..., A_n soient les sommets d'un polygone régulier inscrit, est qu'il y ait un rapport commensurable entre l'arc AA_1 et 2π, ou entre une vibration simple p, de D, et une vibration double q, de D'.

Si $\frac{p}{q}$ est une fraction dont le numérateur soit égal à 1, le polygone est convexe, les lignes lumineuses sont fixes; de même si $\frac{p}{q}$ est commensurable, car le polygone est alors étoilé.

Mais, si $\frac{p}{q}$ est incommensurable, la ligne brisée ne se ferme pas; le point A_n ne tombe pas en A, et tout se passe comme si le cercle O tournait lentement : c'est l'apparence observée dans la lunette.

Si T désigne la durée d'une oscillation complète de D', et θ la durée d'une demi-oscillation de D, l'expérience indique que p demi-oscillations de D durent le même temps que q oscillations de D'. Donc

$$p\theta = q\mathrm{T},$$

d'où l'on tire le rapport cherché

$$\frac{\mathrm{T}}{\theta} = \frac{p}{q}.$$

39 *bis*. — COMPARAISON DES DURÉES D'OSCILLATION DE DEUX PENDULES.

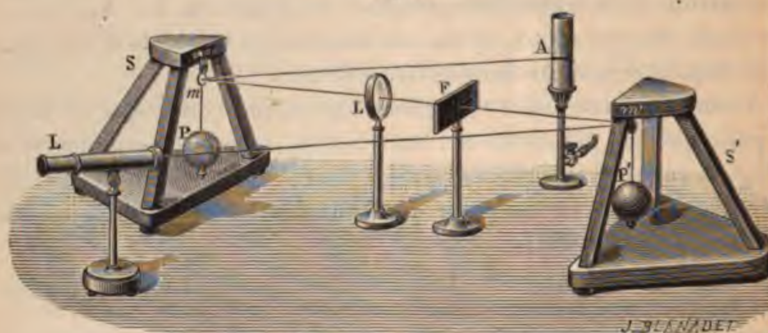
Le colonel autrichien von Sterneck a appliqué cette méthode à la comparaison des durées de vibration de deux pendules :

Chacun des deux pendules P, P' (*fig.* 38), porté par un support

indépendant, porte sur sa tige un petit miroir mm', dont le plan perpendiculaire au plan d'oscillation du pendule correspondant source lumineuse est une fente horizontale A, et l'observation se à l'aide d'une lunette L munie d'un réticule micrométrique.

Le même raisonnement que dans le cas des diapasons montre l'on verra dans le champ de la lunette deux lignes lumineuses, puis le rapport $\frac{T}{\theta}$ est sensiblement égal à 2. Ces lignes ne sont plus d' parence continue, car les oscillations sont en général trop lentes p

Fig. 38.



que l'impression sur l'œil persiste de l'une à l'autre, mais jaillis comme un éclair à intervalles égaux; et si les pendules ont exacten la même durée d'oscillation, les bandes sont symétriquement plac et les éclairs jailliront toujours à la même place; ils se déplacer au contraire, à chaque apparition si l'un des pendules avance retarde, et paraîtront se superposer au moment des coïncidences de l'échelle micrométrique. Il suffit alors de mesurer, à l'aide l'échelle même, la distance de l'une d'elles au 0 pour avoir l'élon tion du pendule D' quand le pendule D passe par la verticale.

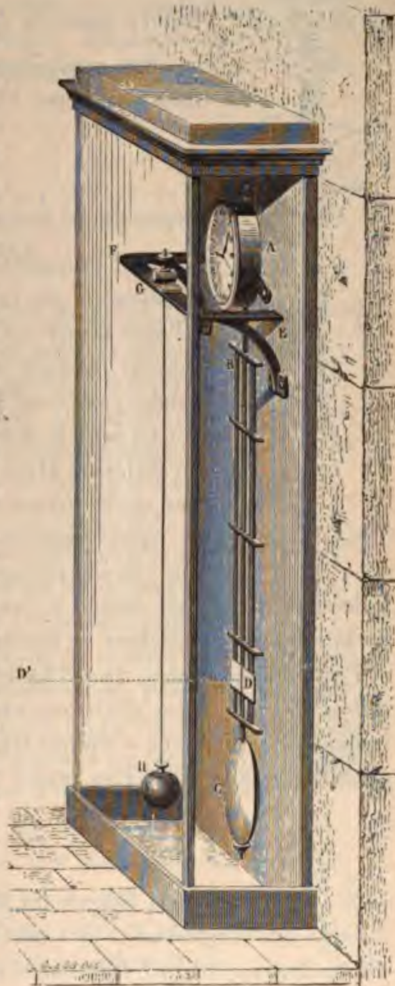
La méthode de M. von Sterneck est beaucoup plus précise celle de Borda, car elle donne le rapport du nombre d'oscillations celui de deux nombres fractionnaires qui sont connus à une pe fraction près de leur valeur.

40. — EXPÉRIENCES DE BORDA.

Borda a cherché à réaliser le pendule simple, autant que fair pouvait. A cet effet, il a pris une sphère de platine et l'a suspen

à un fil d'acier très fin. L'extrémité supérieure du fil est fixée à un couteau G oscillant sur un plan d'acier F (*fig.* 39), l'autre est assujettie dans une monture terminée en calotte sphérique de même rayon que la sphère de platine : à l'aide d'un peu de suif interposé, l'adhérence entre la calotte et la sphère est suffisante pour assurer la cohésion du système. Le tout, fixé dans une cage de verre, oscille devant le balancier D d'une horloge astronomique bien réglée, qui servira à la détermination de la durée des oscillations par la méthode des coïncidences.

Fig. 39.



Le pendule ainsi réalisé n'est pas simple : 1° à cause de la masse du fil; 2° à cause de celle du couteau; 3° parce que la sphère est munie d'une pièce auxiliaire servant à la suspendre. 4° de résistance de l'air.

Voici le très ingénieux procédé imaginé par Borda pour éliminer l'influence du couteau.

Il fait osciller le couteau *seul,* qui se comporte alors comme un métronome (*fig.* 40). En déplaçant la masse m, on arrive à lui donner une durée d'oscillation égale à celle du pendule total; tout se passera donc, quand pendule et couteau seront réunis, comme si le couteau n'existait pas.

Pour éliminer les défauts d'homogénéité de la sphère S, à chaque expérience, on la fait glisser dans la calotte sphérique qui la soutient; on calcule, par des opérations assez complexes, d'ailleurs, le moment d'inertie de la calotte sphérique; quant à celui de la sphère, il suffit de la peser et d'en connaître le rayon.

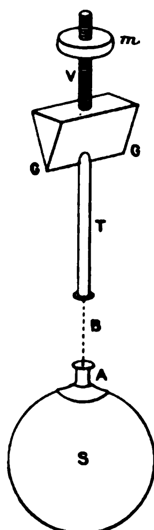
Le calcul donne, pour exprimer la longueur du pendule simple

synchrone, l_1, la formule

$$l_1 = l + \frac{\frac{2}{5}a^2}{l},$$

l désignant la distance du couteau au centre de la sphère et a le rayon de celle-ci. La longueur du pendule de Borda diffère donc de l d'une quantité $\frac{2}{5}\frac{a^2}{l}$, qui, dans le cas des expériences de Borda, est égale à $\frac{1}{4}$ de millimètre environ. On aura donc g par la relation

Fig. 40.



$$t = \pi\sqrt{\frac{l + \frac{2a^2}{5l}}{g}}\left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right).$$

Pour connaître exactement l, Borda approchait, en dessous de la sphère, un plan horizontal mobile à l'aide d'une vis micrométrique; il le soulevait légèrement jusqu'à ce qu'il y ait contact entre lui et la sphère, ce dont on s'assurait en observant entre ces deux corps la flamme d'une bougie placée en arrière; on enlevait alors le pendule et on le remplaçait par une règle suspendue de la même manière, mais dont la partie inférieure portait une languette à vernier qui venait, par son propre poids, au contact du plan; la lecture de la règle donne la longueur du fil augmentée du diamètre de la sphère. Ce dernier se mesure au compas d'épaisseur.

Pour déterminer α, une échelle divisée est placée en arrière du pendule et l'on vise les divisions extrêmes suivant lesquelles se projette le fil. Si l'expérience n'est pas très longue, on mesure α_1 au commencement, α_2 à la fin et l'on prend comme valeur moyenne

$$\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}.$$

Si l'expérience est longue on s'appuie sur le théorème de Borda qui dit que *les amplitudes des oscillations décroissent en progression géométrique quand les temps croissent en progression arithmétique.*

Borda a trouvé ainsi, à Paris (Observatoire), le nombre

$$g = 980,88.$$

L'expression numérique de l'intensité de la pesanteur est donc de

981 dynes environ par gramme-masse, à Paris, et l'accélération due à la pesanteur est représentée sensiblement par 981 unités. On en déduit la longueur du pendule simple à secondes :

$$L = 99^{cm},3827.$$

Biot reprit ces expériences en les perfectionnant : il fit osciller le pendule dans une cage séparée de celle de l'horloge, le suspendit à un fil non magnétique, employa des plans de suspension en agate. Il trouva ainsi

$$L = 99^{cm},3845.$$

Fig. 41.



41. — MÉTHODE DU PENDULE RÉVERSIBLE DE DE PRONY. EXPÉRIENCES DE KATER.

On doit au chevalier de Prony l'idée du pendule aujourd'hui adopté partout et qui a été pour la première fois mis en expérience par le capitaine anglais Kater.

Ce pendule (*fig.* 41) se compose essentiellement d'une tige CC', assez massive, en bronze, terminée par deux pointes P, P'. Deux couteaux C, C' sont fixés à cette barre, perpendiculairement à sa longueur; une masse M, fixe, est placée à l'une des extrémités de la barre, au delà du couteau C', et entre les deux couteaux peut se mouvoir un chariot analogue à celui qui porte la lunette du cathétomètre, composé de deux masses embrassant la tige : l'une m, plus considérable, peut se fixer en un point quelconque par une vis de pression v; l'autre, m', une fois la masse m fixée, peut s'en rapprocher plus ou moins par la manœuvre d'une vis micrométrique v'.

La distance des deux couteaux a été, par construction, établie de manière que le pendule ait à peu près la même durée d'oscillation, qu'on le fasse osciller autour de C ou autour de C'. L'égalité rigoureuse s'obtient par tâtonnements en déplaçant très légèrement le système mm'. Quand l'égalité des deux oscillations, autour de C et C', est obtenue, les arêtes des deux couteaux représentent les axes de suspension et d'oscillation du pendule composé. Donc, en vertu du théorème d'Huygens, pour avoir la longueur l du pendule simple synchrone,

il suffira de mesurer au comparateur la distance l des arêtes des deux couteaux.

42. — RÉSULTATS.

Variations de g. — En reprenant cette méthode, en y apportant des perfectionnements de détails et en observant avec une habileté et une précision remarquables, le colonel Defforges a trouvé à Paris

$$g = 980,99,$$

en tenant compte des corrections importantes dues à l'influence de l'air.

L'air agit, en effet :

a. Par sa *poussée* hydrostatique, résultant du principe d'Archimède : c'est Bouguer et de la Condamine qui, les premiers, ont signalé cette cause d'erreur.

b. Par sa *résistance au mouvement :* cet effet est extrêmement faible, surtout pour des oscillations de petite amplitude.

c. Parce qu'il est, dans une certaine mesure, *entraîné* par le pendule. Bessel a étudié cette cause d'erreur qui fait que, en réalité, le pendule entraîne une masse un peu plus grande que la sienne.

d. Par sa *viscosité :* M. Stokes a donné des formules empiriques qui permettent de faire cette correction.

Les nombres suivants vont nous donner une idée de l'importance d'ensemble de ces corrections. Borda n'avait pas tenu compte de ces diverses causes d'erreur et avait trouvé pour g la valeur 980,88. En appliquant à ses mesures les corrections indiquées plus haut on trouve pour Paris

$$g = 980,96,$$

nombre sensiblement égal à celui du colonel Defforges.

Variation de g avec l'altitude. — Le calcul montre que l'on doit avoir (27)

$$g - dg = g_1 = g\left(1 - \frac{2h}{R}\right);$$

cette formule n'est applicable que pour des variations positives de h. En effet, en s'enfonçant dans l'intérieur de la Terre, la loi de variation n'est plus la même. C'est ce qu'a vérifié M. Airy en constatant que, au fond des mines de Harton, à la profondeur de 384^m, le pendule faisait en 24 heures $2\frac{1}{4}$ oscillations de plus qu'à la surface. On

conclut de là que l'action de la pesanteur augmente à mesure qu'on s'enfonce dans le sol et que, par suite, la densité de la Terre va en augmentant de la surface au centre.

Variations avec la latitude. — Si l'on réunit toutes les mesures de g faites aux différents points de la Terre et réduites, par le calcul, au niveau de la mer, on peut les représenter en fonction de la valeur g_{45} de l'intensité de la pesanteur à la latitude de 45°, par la formule

$$g = g_{45} - A \cos 2\lambda,$$

dans laquelle $g_{45} = 9,806$, $A = 0,025028 = \text{const.}$, et λ est la latitude du lieu. Cette expression rend suffisamment compte des résultats de l'expérience.

PESANTEUR.

LOIS DE LA CHUTE DES CORPS.

43. — VÉRIFICATIONS EXPÉRIMENTALES.

Dans un espace qui n'est pas trop étendu, la pesanteur peut être considérée comme une force constante en grandeur et en direction; tous les corps subissent son action et les mouvements qu'ils prennent sont soumis aux deux lois suivantes :

1° *La pesanteur agit également sur tous les corps.*

2° *Le mouvement des corps qui tombent est uniformément accéléré.*

Vérification de la première loi. — L'observation du pendule permet de vérifier la première loi : en effet, Borda a constitué la sphère de son pendule de diverses substances, en lui conservant le même rayon : toujours, pour une même longueur de fil, il a observé la même durée d'oscillation.

Newton a donné une démonstration plus élégante, mais moins précise, de l'exactitude de la loi, en prenant un long tube de verre contenant des corps de masses inégales : grains de plomb, plumes, papier, etc.; si l'on fait le vide dans ce tube et qu'on le retourne, tous les corps qu'il contient arrivent en bas au même instant. Laisse-t-on rentrer de l'air dans le tube, leurs vitesses de chute sont inégales, l'air ralentissant, par sa résistance, leur mouvement d'autant plus que leur surface est plus grande par rapport à leur masse. La classique expérience du *marteau d'eau* est encore une preuve à l'appui de la loi.

Vérification de la seconde loi. — Le mouvement d'un corps tombant, sous l'action de la pesanteur, est uniformément accéléré.

Nous savons que l'équation d'un tel mouvement est, pour un mo-
bile partant du repos,

$$e = \frac{1}{2}\gamma t^2, \tag{1}$$

d'où, en dérivant pour avoir la vitesse,

$$v = \gamma t; \tag{2}$$

nous aurons donc à vérifier séparément :

1° *Loi des espaces : les espaces parcourus* par le corps qui tombe *sont proportionnels aux carrés des temps employés à les parcourir.*

2° *Loi des vitesses : les vitesses* acquises par le corps qui tombe *sont proportionnelles aux temps employés à les acquérir.*

Trois appareils ont été imaginés pour faire ces vérifications : le plan incliné, dû à Galilée; la machine d'Atwood, et enfin l'enregistreur du général Morin, le seul qui permette la vérification *directe* des lois énoncées; c'est donc par lui que nous commencerons.

44. — APPAREIL DU GÉNÉRAL MORIN.

Cet instrument est le seul qui vérifie directement les lois de la pesanteur; mais le grand intérêt que présente l'étude de cette méthode expérimentale provient de ce qu'elle est le premier exemple de l'*enregistrement* d'un phénomène mécanique.

Imaginons une feuille de papier quadrillé, collé sur un grand tableau vertical, bien plan, se déplaçant dans son plan d'un mouvement de translation horizontal uniforme. Laissons tomber, devant ce tableau, un corps pesant muni d'un crayon qui affleure la surface du papier; il y tracera une courbe. Supposons figurés deux axes, l'un horizontal et l'autre vertical, passant par la position origine du mobile; comptons sur l'axe vertical des z les distances positivement de haut en bas; l'équation du mouvement du corps pesant est

$$z = \frac{1}{2}gt^2.$$

Mais, en même temps, le tableau se déplace avec une vitesse horizontale a constante par hypothèse; et si nous comptons les x sur l'axe horizontal positivement en sens contraire du mouvement,

déplacement de la feuille sera à chaque instant

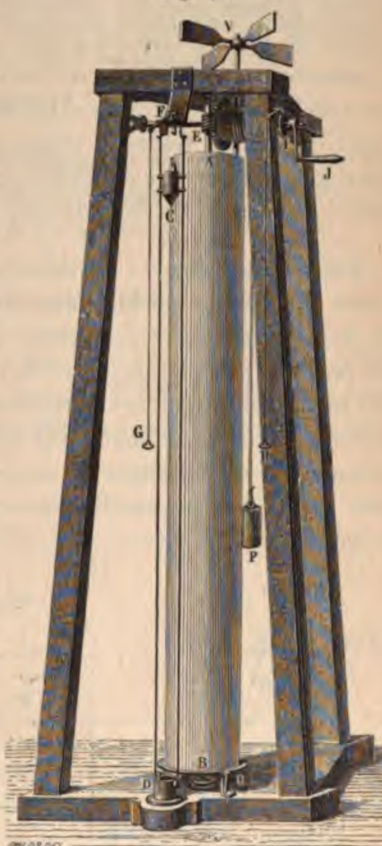
$$x = at;$$

éliminant t entre ces deux équations,

$$\frac{x^2}{z} = \frac{2a^2}{g},$$

équation d'une parabole : la *courbe représentative* du mouvement d'un corps qui tombe, dans les conditions de l'expérience, doit donc être une parabole.

Fig. 42.



Pour réaliser commodément ce dispositif, voici l'appareil tel que Morin le construisit :

Le tableau est supposé enroulé sur un cylindre mobile autour d'un axe vertical (*fig.* 42) supporté par trois madriers; au lieu d'avoir à déplacer un plan d'un mouvement uniforme, nous sommes donc ramenés à faire tourner un cylindre avec une vitessse angulaire constante. Un poids moteur P et des transmissions dentées fournissent le mouvement qui est uniformisé par la résistance de l'air sur des ailettes V, dépendant du système tournant, et dont on peut varier l'inclinaison pour faire varier la vitesse de rotation du cylindre.

Parallèlement au cylindre mobile, glissant sur deux fils d'acier tendus, tombe le corps pesant C; on lui a donné une forme destinée à diminuer le plus possible l'action exercée sur lui par la résistance de l'air. Ce corps porte un crayon horizontal qu'un léger ressort appuie sur la feuille de papier blanc dont est recouvert le cylindre.

Le corps est soutenu par un crochet F que l'on déclenche en tirant la corde G.

Pour expérimenter, on remonte le poids moteur P à l'aide de la manivelle J; on place le corps pesant C au haut de sa course et on lâche le poids moteur : le cylindre tourne avec une vitesse d'abord croissante, puis uniformisée par la résistance de l'air sur le moulinet V : le son produit par le mouvement de ce moulinet, en prenant une hauteur constante, annonce que le mouvement de rotation est devenu sensiblement uniforme. On peut également faire inscrire sur une bande du cylindre noircie de fumée les vibrations d'un diapason dont les branches sont perpendiculaires à l'axe du cylindre; l'observation montre que les sinuosités décrites sont équidistantes, c'est-à-dire le mouvement de rotation uniforme lorsque le poids moteur a parcouru environ les deux tiers de sa course. Le crayon trace alors un cercle sur le cylindre AB. A ce moment, on tire la corde G : le corps C tombe, trace en tombant une courbe sur la feuille de papier AB. On déroule celle-ci sur un plan et l'on peut vérifier la loi des espaces et la loi des vitesses.

Loi des espaces. — La valeur de z (*fig.* 42) est donnée par la distance MP d'un point M de la courbe au cercle tracé par le crayon dans sa position de départ; la valeur de t est représentée par l'abscisse OP du point P, comptée à partir du point O, toujours assez mal marqué sur la courbe; pour le déterminer exactement, on supposera que la courbe soit effectivement une parabole dont OP est la tangente au sommet; il suffira alors de mener deux tangentes quelconques et de leur élever des perpendiculaires aux points P, P_1, où elles coupent la tangente au sommet (*fig.* 43); leur point de rencontre F est le

Fig. 43.

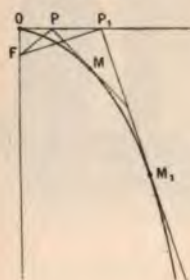


Fig. 44.

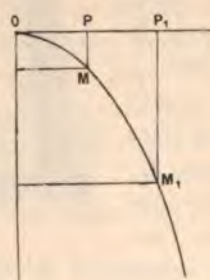
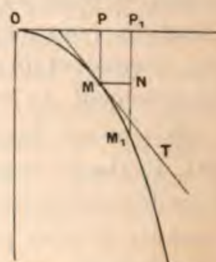


Fig. 45.



foyer; l'axe et, par suite, le point O se trouvent connus exactement.

Les mesures graphiques des ordonnées montrent la proportionnalité des carrés des temps aux espaces correspondants (*fig.* 44).

Loi des vitesses. — Considérons les positions M et M_1 occupées sur la courbe (*fig.* 45) par le corps pesant aux temps t et $t + \Delta t$; NM_1 représente l'espace parcouru sur la verticale pendant le temps Δt et, par suite, le quotient $\frac{NM_1}{\Delta t}$ exprime la vitesse moyenne pendant ce temps; or les temps t et $t + \Delta t$ sont proportionnels aux abscisses OP et OP_1; Δt est donc proportionnel à MN et l'on a

$$v' = k\frac{NM_1}{NM} = K \operatorname{tang} M_1 MN$$

à la limite, lorsque Δt tend vers zéro et que le point M_1 tend vers le point M; la corde MM_1 tend vers la tangente en M, et v' exprime la vitesse v du mobile au point M, c'est-à-dire au temps t; on a

$$v = k \operatorname{tang} TMN.$$

Il suffit donc de vérifier que la tangente trigonométrique de l'angle que fait la tangente à la courbe avec l'horizontale est proportionnelle au temps pour en conclure la loi analogue des vitesses.

45. — PLAN INCLINÉ DE GALILÉE.

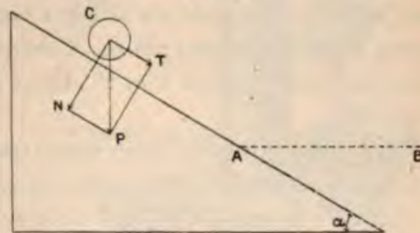
Soit un corps pesant C, placé sur un plan incliné (*fig.* 46). Le poids P de ce corps se décompose en une force CN, normale au plan, et détruite par la résistance de ce plan supposé indéformable, et une force tangentielle CT, qui met le corps en mouvement; on a

$$CT = P \sin\alpha,$$

et, comme les forces sont proportionnelles aux accélérations,

$$\gamma = g \sin\alpha;$$

Fig. 46.



si donc nous vérifions la constance de γ, celle de g sera vérifiée aussi. On peut, dès lors, légitimement substituer au mouvement de la chute libre le mouvement de la chute ralentie sur le plan incliné de Galilée : la nature du mouvement n'est pas changée. Plus α est petit, plus le mouvement est lent et facile à étudier.

On observe ainsi, en faisant durer la descente une, deux, trois, ... secondes, des espaces parcourus qui sont entre eux comme les nombres 1, 4, 9, ... La loi des espaces est donc vérifiée.

Pour vérifier la loi des vitesses, rappelons-nous que la vitesse, à un instant donné, dans un mouvement uniformément accéléré, se mesure par la vitesse du mouvement uniforme que prendrait le mobile si, à l'instant de l'expérience, la force agissante cessait d'agir.

Comme la force agissante est $P \sin\alpha$, il n'y a, pour la supprimer, qu'à annuler $\sin\alpha$. Donc, pour avoir la vitesse au point A, il n'y aura qu'à raccorder avec le plan incliné un plan horizontal AB et à mesurer l'espace parcouru en une seconde, sur ce plan, par le corps C: ce sera la vitesse cherchée.

On trouve ainsi, si l'on place le plan horizontal au point où arrive C après une seconde de chute, une vitesse v; en le plaçant au point où arrive le corps C après deux secondes de chute, on observe une vitesse $2v$, et ainsi de suite. La loi des vitesses est donc vérifiée.

46. — MACHINE D'ATWOOD.

La machine d'Atwood, l'un des plus ingénieux appareils de toute la Physique expérimentale, a pour but, comme le plan incliné de Galilée, de rendre plus facile l'observation d'un corps en mouvement sous l'action de la pesanteur, par un ralentissement de son mouvement, et sans que la nature de ce mouvement soit altérée. Ce ralentissement a aussi pour effet de diminuer l'importance de la résistance de l'air au mouvement du corps étudié.

La machine se compose essentiellement d'une poulie très mobile, sur laquelle s'enroule un fil assez léger pour qu'on puisse pratiquement le supposer sans poids. A chaque extrémité du fil sont suspendus deux poids égaux P et P'. Dans ces conditions, le système est en équilibre.

Ajoutons, d'un côté seulement, une surcharge p; le système se met en mouvement du côté de la surcharge et la chute se fait avec lenteur.

En effet la surcharge p est obligée d'entraîner les deux poids égaux à P; elle met donc en mouvement un poids total $2P+p$ avec une accélération plus faible γ; si ce poids total tombait en chute libre, on aurait une accélération g. Écrivons que les forces sont proportionnelles aux accélérations, il vient

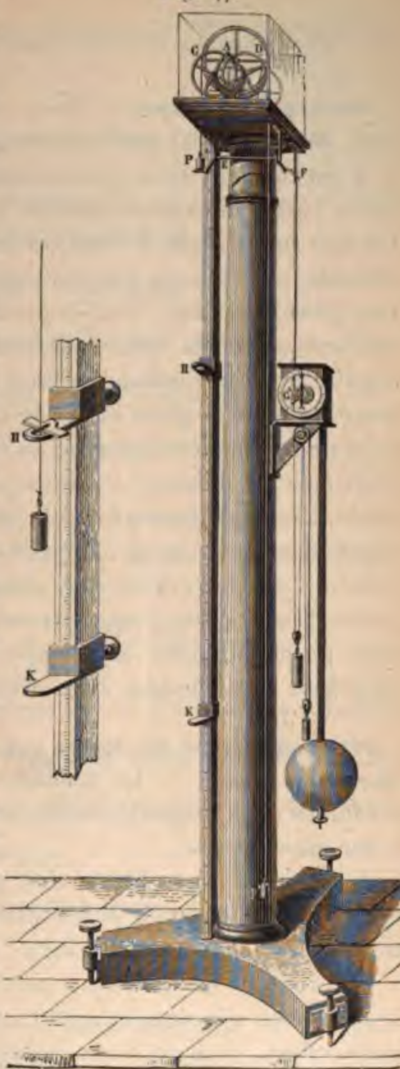
$$\frac{p}{2P+p} = \frac{\gamma}{g},$$

d'où

$$\gamma = g\frac{p}{2P+p};$$

$\frac{p}{2P+p}$ étant un facteur invariable, on voit que, si l'on constate la constance de γ, celle de g en résultera : ledit facteur étant, d'ailleurs, toujours plus petit que 1, le mouvement sera ralenti, mais sans que sa nature soit altérée. Le principe de l'appareil est donc légitime.

Fig. 47.



L'instrument se complète par une colonne de bois, qui soutient la poulie, et une horloge à secondes. Une règle de 2^m est fixée parallèlement à la colonne (*fig.* 47) et c'est devant cette règle que se meut le poids surchargé.

Au commencement de l'expérience, le poids surchargé est soutenu au zéro de la règle par une plate-forme à bascule que l'horloge fait tomber, quand son aiguille passe au zéro. On cherche, par tâtonnements, où il faut placer un curseur plein, de la forme de celui qui est dessiné en K, pour que le poids surchargé vienne le frapper au bout d'une seconde. Soit e la division de la règle à laquelle il faut le placer. On fait de même pour arrêter le corps au bout de 2, 3, ... secondes ; on trouve qu'il faut placer le curseur à des divisions $4e$, $9e$, ... La loi des espaces est donc vérifiée.

L'espace parcouru pendant n secondes peut servir à une mesure approchée de g; on a, en effet,

$$e = \frac{1}{2}\gamma t^2;$$

mais

$$\gamma = g\frac{p}{2P+p};$$

donc

$$e = \frac{1}{2} g \frac{p}{2P + p} t^2,$$

et l'on peut tirer g de cette équation où tout est connu.

Mesure des vitesses. — Pour avoir la vitesse à un instant donné, il faut, à ce moment, que la force motrice cesse d'agir.

A cet effet, on donne, à la surcharge, une forme allongée : c'est une petite barre, largement entaillée à son centre, comme on le voit en H. On fixe sur la règle, à l'endroit où arrive la surcharge au bout d'une seconde de chute, un curseur évidé, qui arrête la surcharge en laissant passer le poids. Celui-ci continue à se mouvoir d'un mouvement uniforme, dont la vitesse est précisément égale à la vitesse qu'avait acquise le corps tombant au bout d'une seconde. Pour la mesurer, on place un curseur plein en K, de façon que le poids P, débarrassé, au bout de la première seconde, de sa surcharge, vienne le frapper à la deuxième; la distance des deux curseurs, diminuée de la hauteur du poids P, est la vitesse cherchée. Soit v cette vitesse. En répétant cette expérience après 2, 3, ... secondes de chute, on trouve entre les curseurs des intervalles qui, diminués chaque fois de la hauteur du poids P, sont égaux respectivement à $2v$, $3v$, ... Les vitesses sont donc proportionnelles aux temps. Si $t = 1$, $\gamma = v$; la distance v mesure donc l'accélération du mouvement dans la machine d'Atwood.

Proportionnalité des forces aux accélérations qu'elles impriment à une même masse. — La machine d'Atwood permet de montrer que les forces sont proportionnelles aux accélérations qu'elles impriment à une même masse.

A cet effet, sur chacun des poids P, mettons deux surcharges égales chacune à p. Le poids total sera $2P + 4p$, et, dans ces conditions, le système est en équilibre.

Enlevons un des poids p à gauche et portons-le à droite; le système se mettra en mouvement sous l'action d'une force motrice $2p$; nous mesurerons, au bout d'une seconde, un espace dont le double est égal à l'accélération γ_1 dans ces conditions.

Cela fait, reprenons le dernier poids p qui reste à gauche et portons-le à droite; la surcharge est $4p$, double de la précédente. Le poids total n'a, d'ailleurs, pas changé; c'est toujours $2P + 4p$. On observe, dans ces conditions, au bout d'une seconde de chute, un espace parcouru e_2 et, par conséquent, une accélération $\gamma_2 = 2e_2$.

Or, on trouve

$$\gamma_2 = 2\gamma_1;$$

les forces sont donc bien proportionnelles aux accélérations qu'elles impriment à une même masse.

47. — CORPS PESANT SE DÉPLAÇANT SUIVANT LA VERTICALE.

1° La pesanteur agit seule; le mouvement est rectiligne et uniformément accéléré et représenté par les formules

$$h = \frac{1}{2}gt^2, \quad v = gt, \quad v = \sqrt{2gh};$$

2° S'il y a une vitesse initiale verticale de haut en bas,

$$h = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2, \quad v = v_0 + gt, \quad \sqrt{v^2 - v_0^2} = \sqrt{2gh};$$

dans ces deux cas, h, v, v_0 et g sont comptés positivement de haut en bas;

3° La vitesse initiale est dirigée de bas en haut; comptons h, v, v_0 et g positivement de haut en bas; les formules représentatives du mouvement sont encore, mais avec $v_0 < 0$,

$$h = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2, \quad v = v_0 + gt, \quad \sqrt{v^2 - v_0^2} = \sqrt{2gh};$$

la vitesse s'annule au bout d'un temps $t = -\frac{v_0}{g}$; le corps est alors parvenu à une hauteur $h = -\frac{v_0^2}{2g}$. Quand le corps repasse au point de départ l'espace qu'il a parcouru est algébriquement nul, on a donc

$$0 = v_0 + \frac{1}{2}gt,$$

et, en portant la valeur de t qu'on en déduit dans l'expression de la vitesse, il vient

$$v = -v_0;$$

le corps passe donc au point d'où il est parti avec une vitesse égale et de signe contraire à la vitesse initiale.

48. — MOUVEMENT DES PROJECTILES.

La vitesse v_0 initiale fait un angle α avec l'horizon. — Soient z la verticale du point origine et v_0 la grandeur et la direction de la vitesse initiale (*fig.* 48).

Le mouvement dû à la vitesse initiale v_0 peut se décomposer en deux, l'un suivant Ox de vitesse $v_0 \cos\alpha$, l'autre suivant Oz de vitesse $v_0 \sin\alpha$.

Le mouvement uniforme suivant Ox sera donc représenté par l'équation

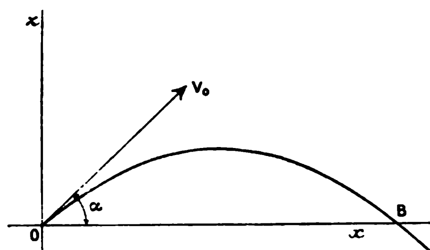
$$x = v_0 \cos\alpha\, t,$$

et le mouvement suivant Oz sera celui d'un corps lancé de bas en haut avec une vitesse initiale $v_0 \sin\alpha$, c'est-à-dire

$$z = v_0 \sin\alpha\, t - \tfrac{1}{2} g t^2.$$

La trajectoire sera le résultat de la composition de ces deux mouvements; on obtiendra son équation par l'élimination de t; il vient

Fig. 48.



$$z = x \tang\alpha - \tfrac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha}:$$

c'est l'équation d'une parabole à axe vertical tangente à l'origine à la droite v_0.

On appelle *amplitude du jet* et l'on désigne par a la distance OB à laquelle la courbe coupe l'axe des x, et qui est

$$a = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha;$$

pour une valeur donnée de v_0, a est donc maximum pour $\alpha = 45°$. La hauteur maximum h du projectile est la valeur de z correspondant à $x = \frac{a}{2}$, ou

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

C'est la hauteur à laquelle arriverait le projectile lancé verticalement de bas en haut avec une vitesse $v_0 \sin\alpha$. Le temps employé par le projectile à parcourir l'amplitude a est

$$t = \frac{v_0 \sin 2\alpha}{g \cos\alpha} = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Pour atteindre un point de coordonnées x_1, z_1 en lançant le projectile avec une vitesse v_0, il faut donner à la bouche à feu une incli-

naison α qu'on obtiendra en résolvant par rapport à α l'équation

$$z_1 = x_1 \operatorname{tang}\alpha - \tfrac{1}{2} g \frac{x_1^2}{v_0^2}(1 + \operatorname{tang}^2\alpha);$$

il existe donc deux paraboles qui passent par le point M : l'une est la parabole B de *tir battant,* qui sert à renverser l'obstacle, l'autre la parabole E de *tir écrasant* (*fig.* 49).

La condition de réalité des racines peut se ramener à la forme

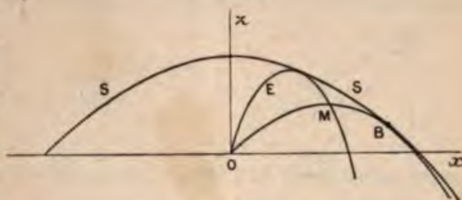
$$z_1 < \frac{v_0^2}{2g} - \tfrac{1}{2} g \frac{x_1^2}{v_0^2};$$

or, l'équation

$$z = \frac{v_0^2}{2g} - \tfrac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2}$$

est l'équation d'une parabole ayant la droite Oz pour axe. Tous les points compris dans l'intérieur de cette parabole SS satisfont à l'équation de condition; les points qui sont en dehors ne peuvent donc certainement être atteints, d'où son nom de *parabole de sûreté.*

Fig. 49.



On reconnaît facilement qu'elle est l'enveloppe des paraboles de tir.

49. — CORPS PESANT SE DÉPLAÇANT SUR UN PLAN INCLINÉ.

On peut traiter la même série de problèmes; si la vitesse v_0 est dirigée suivant la ligne de plus grande pente, les formules générales sont, en appelant e l'espace parcouru sur le plan incliné,

(1) $$e = v_0 t + \tfrac{1}{2} g \sin\alpha\, t^2,$$

(2) $$v = v_0 + g \sin\alpha\, t,$$

(3) $$\sqrt{v^2 - v_0^2} = \sqrt{2ge \sin\alpha}.$$

En particulier, si le mobile se déplace sur le plan incliné sans vitesse initiale et du haut en bas, la formule (3) devient

$$v = \sqrt{2ge \sin\alpha};$$

or, $e \sin\alpha$ exprime la hauteur de chute; donc, sur divers plans inclinés

partant d'un même point, des mobiles partis en même temps de cette origine possèdent des vitesses égales quand ils passent sur une même horizontale.

Mais ils ne passent pas en même temps sur cette horizontale; en effet, au bout d'un même temps t, ils ont parcouru des espaces $h = \frac{1}{2}gt^2$ sur la verticale, $e = \frac{1}{2}g \sin\alpha . t^2$ et $e' = \frac{1}{2}g \sin\alpha' . t^2$ sur deux plans inclinés d'angles α et α'; on a donc

$$\frac{e}{\sin\alpha} = \frac{e'}{\sin\alpha'} = h;$$

e et e' sont donc les projections de h sur les plans inclinés : le lieu des points M est donc la sphère décrite sur AB comme diamètre (*fig.* 50).

Cette remarque permet de résoudre un autre problème : Sur quel plan incliné doit descendre un corps pesant partant d'un point A

Fig. 50.

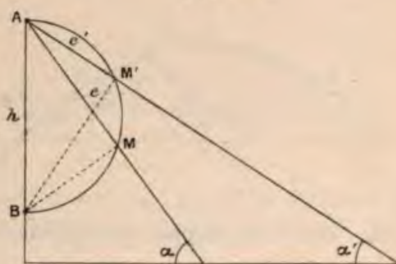
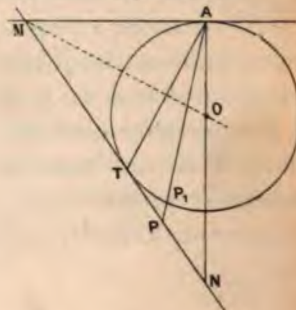


Fig. 51.



pour arriver dans le temps le plus court sur un plan incliné MN placé au-dessous de lui (*fig.* 51).

Nous savons que les corps partis du point A sur divers plans inclinés sont, à un instant donné, sur une sphère qui a son centre sur la verticale du point A et qui passe par ce point : considérons celle de ces sphères qui est tangente à MN et soit T le point de contact; le mobile doit descendre sur le plan AT. S'il descend, en effet, suivant la pente AP, il sera arrivé en P_1 seulement quand le mobile qui descend sur le plan AT sera déjà en T.

GRAVITATION UNIVERSELLE.

50. — LOI DE LA GRAVITATION UNIVERSELLE.

Deux particules matérielles s'attirent mutuellement avec une force f proportionnelle au produit de leurs masses m et m', inversement proportionnelle au carré de leur distance r et dirigée suivant la droite qui les joint :

$$f = G \frac{mm'}{r^2}. \tag{1}$$

Cette loi a été énoncée par Newton sous forme d'hypothèse pour expliquer les mouvements des astres. Elle a été vérifiée constamment par l'accord des calculs auxquels elle a servi de base, avec les observations astronomiques. Elle est susceptible aussi, comme nous allons le voir, de vérifications expérimentales directes.

Le facteur G est appelé constante de la gravitation, c'est une grandeur physique dont les dimensions sont $L^3 M^{-1} T^{-2}$ ainsi qu'il résulte immédiatement de l'équation de définition (1).

51. — DENSITÉ MOYENNE DE LA TERRE.

La pesanteur est un cas particulier de la gravitation universelle. Elle représente l'attraction exercée par la Terre sur les corps placés dans son voisinage. On démontre que cette attraction est la même que si toute la masse de la Terre était réunie en son centre.

Si nous désignons par R le rayon de la Terre, et par M sa masse, le poids d'une masse m placée à la surface de la Terre sera

$$mg = G \frac{Mm}{R^2}.$$

La densité moyenne Δ de la Terre est définie par l'égalité

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \Delta,$$

d'où

$$g = \frac{4}{3}\pi R \Delta . G.$$

Dans le système d'unités C.G.S.

$$\frac{\pi R}{2} = 10^9 \text{ cm},$$

d'où

$$g = \frac{8}{3}\Delta . G . 10^9. \qquad (2)$$

L'accélération de la pesanteur g est connue. Nous avons ainsi une relation entre G et Δ, qui permet de calculer l'un de ces nombres quand on connaît l'autre. Le problème est donc le même de déterminer la constante de la gravitation ou la densité moyenne de la Terre.

Remarquons que nous ne possédons aucun moyen de déterminer *directement* la densité moyenne de la Terre ou d'un astre quelconque.

L'équation (2) permet de se faire une idée de l'ordre de grandeur de G. La densité moyenne Δ de la Terre ne peut être supérieure à 20 : g est de l'ordre de 1000 : par suite G est de l'ordre de 10^{-8}, c'est-à-dire très petit.

52. — DÉTERMINATION EXPÉRIMENTALE DE G.

1° **Par l'attraction de masses terrestres.** — Une montagne isolée peut être considérée comme une excroissance du globe. Les données géodésiques permettent de calculer approximativement son volume : par des déterminations géologiques effectuées sur des échantillons aussi nombreux et aussi variés que possible, on aura sa densité moyenne; par conséquent, on connaîtra à peu près sa masse.

On comparera l'attraction de cette masse à celle de la Terre. Cette comparaison s'effectuera en mesurant la déviation d'un fil à plomb placé successivement au nord et au sud de la montagne. Ou bien encore, on déterminera les périodes d'oscillation d'un même pendule

placé d'abord au sommet de la montagne, puis à la même altitude, sans montagne interposée. Cette dernière peut être calculée.

En exprimant que la différence entre les deux périodes est due à l'attraction de la montagne, on déduira des nombres obtenus le rapport de la densité de la montagne à celle de la Terre : cette dernière sera connue et l'équation (2) permettra de calculer G.

Il est inutile d'insister sur les nombreuses causes d'incertitude inhérentes à cette méthode.

2° **Par l'attraction d'une couche concentrique.** — En supposant la Terre formée de couches concentriques, de densité différente, la pesanteur observée à une certaine profondeur est la différence entre la pesanteur à la surface et l'attraction de la couche extérieure au point d'observation. Mais les mesures ne sont susceptibles d'aucune précision à cause des irrégularités locales.

3° **Méthodes directes : expériences de laboratoire.** — Ces méthodes consistent à mesurer directement l'attraction qui s'exerce entre deux masses connues, de dimensions usuelles. D'après ce que nous savons de l'ordre de grandeur de G, cette attraction est fort petite et la détermination est très délicate. On emploie, pour la mesurer, soit la balance ordinaire, soit la balance de torsion.

a. **Balance ordinaire.** — La première méthode a été utilisée par von Jolly, par Poynting, par Richarz et Krigar-Menzel. Les expériences de ces derniers physiciens ont été effectuées à la forteresse de Spandau, près de Berlin, avec l'aide du Ministère de la Guerre d'Allemagne. Les ressources matérielles mises à la disposition des expérimentateurs leur ont permis de réaliser un dispositif de proportions très considérables dont nous allons décrire les grandes lignes.

Une balance d'excellente construction, placée dans les conditions de stabilité convenables, était installée dans une casemate, protégée le mieux possible contre les variations de température et d'humidité. Un système de supports permettait de suspendre à chaque bras du fléau deux sphères de platine : l'une pleine, l'autre creuse, placées à des niveaux différents, la sphère pleine étant, d'un côté, à la partie supérieure, de l'autre à la partie inférieure. Par un mécanisme manœuvré de l'extérieur, l'observateur pouvait arrêter la balance et intervertir, simultanément, dans chacun des niveaux, les positions des sphères pleine et creuse. Les différences de pesées, observées à la suite de cette interversion, permettent de calculer la perte de poids

éprouvée par la sphère pleine entre les deux niveaux. Cette détermination est aussi importante que la détermination principale, car l'effet de la variation de g avec l'altitude est du même ordre de grandeur que l'attraction exercée par la masse artificielle.

Ensuite, on établit une masse de plomb formée d'environ 3000 briques de $10^{cm} \times 10^{cm} \times 30^{cm}$ pesant à peu près 100000^{kg}. Les sphères se trouvent, l'une au-dessus, l'autre au-dessous de cette masse de plomb. Par une nouvelle série de pesées, on détermine la différence de poids apparente des sphères selon qu'elles se trouvent au-dessus ou au-dessous du bloc de plomb, différence due à l'attraction du bloc. Elle est de $1^{mg},3$ environ, d'où $\Delta = 5,505$.

b. **Balance de torsion.** — Un levier très léger suspendu à un fil long et fin porte à ses extrémités deux petites sphères pesantes. Deux masses, beaucoup plus grosses, sont placées au voisinage des premières. On détermine leur attraction sur les petites sphères, soit par la déviation du levier qu'elle provoque, soit par la variation de la période d'oscillation.

Cette méthode a été employée par Cavendish, par Baily, par Reich, par Cornu et Baille, par Boys et par le P. Braun.

Cornu et Baille ont montré que pour tous les appareils géométriquement semblables, en maintenant invariable la période d'oscillation par un choix convenable du fil de torsion, on devait obtenir le même angle de déviation, quelles que fussent les dimensions.

Boys, appliquant ce principe, a pu réduire à des proportions pour ainsi dire microscopiques son dispositif, grâce à l'emploi des fils de quartz. Ces fils, dont il a indiqué le mode de préparation, sont doués d'une très grande ténacité et d'une élasticité presque parfaite, et leur couple de torsion est faible. Aussi, Boys a-t-il pu effectuer des mesures avec un appareil dont les dimensions linéaires étaient à peu près 150 fois plus petites que celles adoptées par ses devanciers.

Cette réduction de dimensions a, entre autres avantages, celui de faciliter la protection des pièces mobiles contre les courants de convection qui constituent une des causes d'erreur les plus importantes.

Le levier, long seulement de $2^{cm},3$, servait de miroir pour la mesure des déviations : il portait deux petites sphères d'or pesant chacune $1^{g},30$ (ou $2^{g},65$ ou $3^{g},98$); les masses attirantes étaient des sphères de plomb pesant chacune 7407^{g}, placées à 15^{cm} l'une de l'autre et à 15^{cm} au-dessus du levier.

Boys a trouvé, comme valeur probable de Δ, $5,527$: l'écart

maximum entre les déterminations isolées ne dépasse pas 0,015.

En compensant par un flotteur le poids des sphères suspendues M. Burgess a pu accroître les dimensions de celles-ci, tout en conservant un fil de quartz très fin : ce qui lui a permis d'obtenir des déviations beaucoup plus considérables.

53. — VARIOMÈTRES D'EOTVÖS.

Ces variomètres permettent de déterminer la variation de la pesanteur entre deux points très rapprochés. Le principe est le suivant : Si une balance de torsion se trouve dans un champ de force variable, la pesanteur n'étant pas la même aux divers points de la balance et au centre de gravité autour duquel se font les oscillations, il en résulte des couples qui tordent le fil. La somme des moments de ces couples peut s'exprimer en fonction des dérivées des composantes de la pesanteur et, d'autre part, se mesurer par les déviations observées.

Le fléau de torsion du variomètre porte les masses suspendues soit à la même hauteur aux deux extrémités, soit à des hauteurs différentes. L'appareil tout entier est enfermé dans une boîte métallique qui le protège contre les courants de convection et les variations irrégulières de température. La protection est assez efficace pour qu'on puisse observer, même en pleine campagne, sous une simple tente.

Résultats. — Toutes les expériences effectuées permettent d'affirmer que la gravitation est indépendante de la nature des masses.

La densité moyenne de la Terre est voisine de 5,5, ce qui conduit pour la constante de la gravitation à la valeur

$$G = 6,2.10^{-7}.$$

ÉLASTICITÉ.

54. — PROPRIÉTÉS ÉLASTIQUES DES CORPS NATURELS. DÉFORMATIONS ÉLASTIQUES ET DÉFORMATIONS PLASTIQUES OU PERMANENTES.

La Mécanique rationnelle ou générale a pour objet la recherche et l'étude des lois de l'équilibre statique et de l'équilibre dynamique, qui régissent les phénomènes produits par l'action des forces sur les solides invariables, c'est-à-dire non susceptibles de changer de forme sous l'influence de ces forces. Il peut bien y avoir déplacement relatif de différents solides associés ensemble, si les liaisons existant entre eux ne suffisent pas pour maintenir fixes leurs positions mutuelles (lois de la gravitation, mécanismes et machines). Mais dans un solide invariable constitué par un système de points matériels, la distance mutuelle de deux quelconques de ces points est considérée comme absolument immuable, quelle que soit la grandeur des forces qui tendraient à les écarter ou à les rapprocher l'un de l'autre.

Il n'existe pas dans la nature de solides répondant à cette définition, qui est un postulatum fondamental de la Mécanique rationnelle. Tous les corps existants, sans exception aucune, se déforment, dans une mesure toujours appréciable, sous l'action des forces extérieures. Il en résulte que les lois générales établies par la Mécanique pour les solides hypothétiques formés de points matériels dont les positions mutuelles ne sauraient être modifiées par aucune cause, peuvent être inapplicables aux corps naturels, ou n'être applicables qu'avec certaines restrictions, toutes les fois que l'immuabilité absolue de forme est une donnée essentielle du problème à résoudre. Par exemple, certains mécanismes, théoriquement impeccables, peuvent ne pas fonctionner si quelques éléments éprouvent des déformations susceptibles de les écarter notablement du profil géométrique que la

théorie leur attribuait : il se produit des grippements qui arrêtent le mouvement et mettent l'appareil hors d'usage.

Tant que les grandeurs des forces appliquées à un solide naturel ne dépassent pas une certaine limite, variable avec la nature de la matière constitutive de ce corps, avec sa forme, avec la distribution des forces qui le sollicitent, la déformation disparaît dès que celles-ci cessent d'agir. Le solide revient exactement à sa forme primitive, et l'on constate que ses propriétés n'ont éprouvé aucun changement. Le renouvellement périodique et indéfini de la même cause produira toujours identiquement le même effet. On dit alors que la limite d'élasticité de la matière n'a pas été dépassée, et que le corps n'a éprouvé qu'une déformation élastique.

Si l'on fait croître indéfiniment les grandeurs des forces sollicitant le solide naturel, il arrive toujours un moment où la déformation n'est plus susceptible de disparaître entièrement, si la cause qui l'a provoquée cesse d'agir. Une fraction plus ou moins importante de cette déformation subsiste quand le corps est soustrait à l'action des forces extérieures. On la qualifie de *déformation plastique* ou *permanente*.

On constate alors que les propriétés élastiques de la matière ont éprouvé certains changements. La limite d'élasticité a varié. En outre l'équilibre moléculaire est souvent instable, si bien que l'application renouvelée et périodique d'une même force peut déterminer des déformations plastiques nouvelles et progressives, et même, ainsi que l'a constaté Wœhler, donner lieu, après un nombre suffisant d'épreuves identiques, à la désagrégation ou à la rupture de la pièce expérimentée. On donne le nom de *métaux écrouis* à ceux qui, par l'application de forces ayant donné lieu à un dépassement de la limite d'élasticité, ont éprouvé des changements sensibles dans leurs propriétés. L'écrouissage d'une barre de fer s'opère par exemple en la martelant à froid.

Certains corps plastiques, comme les matériaux terreux, les métaux mous ou malléables, tels que le plomb, ont une limite d'élasticité peu élevée et généralement mal définie, et présentent, d'autre part, à un haut degré le phénomène de la déformation plastique.

D'autres corps sont élastiques, comme le caoutchouc, ou bien cassants comme le verre, les pierres dures, la fonte blanche, etc., n'éprouvant que des déformations permanentes insignifiantes et peu appréciables : il est également malaisé, pour cette cause, de reconnaître de façon nette leurs limites d'élasticité.

Enfin la plupart des matériaux durs, métaux tels que le fer, l'acier, le cuivre, les bois résistants, etc., comportent des périodes d'élasticité et de plasticité bien caractérisées et de grandes amplitudes dont la délimitation peut s'effectuer avec beaucoup de précision.

La déformation élastique se manifeste toujours de façon complète dans un temps très court. Il arrive, au contraire, que la déformation plastique, correspondant à l'action immédiate d'une force donnée, ne se réalise entièrement qu'après un temps plus au moins long, qui est nécessaire pour que la matière écrouie arrive à un état d'équilibre définitif. On qualifie de *viscosité* cette propriété des corps.

Si la limite d'élasticité était dépassée, on fait croître indéfiniment les forces sollicitant un corps naturel, on finit par atteindre la limite de rupture : il se produit une désagrégation de la matière ou une cassure de la pièce. La déformation permanente que l'on constate à ce moment sur les débris du solide est dite *déformation de rupture*.

On qualifie de *fragilité* la propriété que présente un corps de se rompre ou de se désagréger par l'effet d'un choc. La fragilité se mesure par la quantité de force vive nécessaire pour rompre une pièce de forme et de volume déterminés.

La limite de rupture et la fragilité sont, comme la limite d'élasticité, susceptibles d'être modifiées par l'écrouissage.

L'observation et l'analyse des phénomènes de déformation qui précèdent et qui suivent la limite d'élasticité, jusqu'à la rupture, sont du domaine de la Physique. On n'a pu jusqu'à présent découvrir que pour les phénomènes se rapportant à la période d'élasticité, des lois générales, applicables à tous les matériaux de la nature et à tous les systèmes de forces qui leur sont appliquées. Ces lois constituent la base fondamentale de la théorie de l'Élasticité, science purement analytique, qui est une branche de la Mécanique rationnelle, et a pour objet l'étude des relations existant entre la déformation des corps parfaitement élastiques, leurs formes géométriques et la distribution des forces qui les sollicitent. La résistance des matériaux, science demi-mathématique, demi-expérimentale, s'occupe spécialement de l'étude des matériaux semi-élastiques que fournit la nature et de leur emploi dans les constructions.

Ainsi qu'il a été dit ci-dessus, on n'a pu encore déduire, des observations sur les phénomènes de plasticité, que des règles et des formules empiriques d'envergure restreinte, n'offrant guère d'intérêt que pour les constructeurs et les praticiens, et non des lois générales comparables à celles de la théorie de l'Élasticité.

55. — LOI DE HOOKE.

Le principe fondamental de la théorie de l'Élasticité et de la résistance des matériaux est constitué par la loi physique de Hooke : dans les corps parfaitement élastiques, et dans les corps naturels où la limite d'élasticité n'a pas été atteinte, il y a proportionnalité entre la déformation et la force qui la détermine, entre la cause et l'effet. Les déplacements subis par les différents points du corps par rapport à des axes fixes de l'espace, qui servent à définir la déformation, sont des fonctions linéaires des forces extérieures.

56. — TRACTION ET COMPRESSION : MODULE DE YOUNG. CONTRACTION LATÉRALE : COEFFICIENT DE POISSON.

Si l'on suspend verticalement un fil ou un barreau prismatique, et que l'on accroche à son extrémité un poids P, dirigé suivant l'axe géométrique de la pièce, on constate que celle-ci, ainsi soumise à un effort de traction simple, éprouve un allongement perceptible et mesurable. Soient s l'aire de la section transversale, l la longueur initiale du barreau ou du fil, Δl l'allongement qu'il a subi. En vertu de la loi de Hooke, on a la relation

$$\Delta l = \alpha l \frac{P}{s}.$$

Le coefficient α, qui ne dépend que des propriétés élastiques de la matière constitutive de la pièce expérimentée, a pour inverse le coefficient ou module d'élasticité longitudinale E :

$$\Delta l = \frac{1}{E} l \frac{P}{s}.$$

Ce coefficient d'élasticité longitudinale E, ou module de Young, est toujours un nombre très grand, lorsqu'on prend le kilogramme pour unité de force et le mètre pour unité de longueur. Par exemple, il est égal à 2×10^{10} pour le fer ou l'acier doux de construction, à 1×10^{10} pour la fonte de fer et le cuivre rouge, à 4×10^{9} pour l'étain, etc. On le réduit parfois au millionième de cette valeur numérique en adoptant pour unité de surface le millimètre carré.

Si au lieu de soumettre une pièce prismatique à un effort de traction simple, en appliquant à ses deux extrémités des forces égales et

de sens contraire dirigées vers l'intérieur, on le fait travailler à la compression simple, en dirigeant les deux forces l'une vers l'autre, la même formule est applicable à condition de changer le signe de P.

Le corps éprouve un raccourcissement proportionnel à $\frac{P}{s}$, et le rapport $\frac{Pl}{s\Delta l}$ est toujours égal au coefficient spécifique E.

On constate d'autre part que sous l'influence de l'effort de traction simple, qui donne lieu à un allongement du barreau, les dimensions de la section transversale diminuent.

Soient d le diamètre primitif de la pièce, supposée cylindrique; Δd la diminution subie par ce diamètre. On a

$$\Delta d = -\beta d \frac{P}{s}.$$

Le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ est le coefficient de contraction latérale η, ou coefficient de Poisson.

On démontre dans la théorie de l'Élasticité que lorsqu'un corps homogène est isotrope, c'est-à-dire a les mêmes propriétés élastiques dans toutes les directions issues d'un point, le coefficient de contraction latérale est nécessairement égal à $\frac{1}{4}$.

La déformation longitudinale est fournie par la relation

$$\Delta l = \frac{1}{E} l \frac{P}{s},$$

et la déformation latérale, par la relation

$$\Delta d = -\frac{1}{4E} d \frac{P}{s}.$$

Pour une pièce travaillant à la compression simple, les mêmes formules s'appliquent à condition de changer le signe de P.

On qualifie en pratique de *travail élastique* de la matière, le rapport $\frac{P}{s}$ de la force à la section de la barre. Les variations subies par les dimensions du solide sont, comme on le voit, proportionnelles à ce travail élastique.

Dans les corps hétérotropes (structure cristalline, fibreuse, irrégulière) où les propriétés élastiques varient suivant la direction que l'on considère, le coefficient η est généralement compris entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$. M. Bauschinger a trouvé expérimentalement, pour différentes variétés d'acier Bessemer, des valeurs de η variant de 0,2 à 0,39.

Le coefficient η ne peut en aucun cas atteindre la valeur $\frac{1}{2}$: il est impossible en effet d'admettre que le volume d'un corps puisse s'accroître quand on le comprime, et se réduire quand on l'étire.

Il semble que le caoutchouc n'éprouve aucune variation de volume, ni par la traction, ni par la compression : il faudra conclure de ce fait d'observation que le coefficient de contraction latérale y est très voisin du maximum $\frac{1}{2}$.

Il est possible que le liège, comprimé longitudinalement, ne subisse aucune déformation latérale. Mais il n'y a aucune conclusion à tirer de cette observation qui s'applique à un corps présentant à son intérieur de nombreux vides, dont l'aplatissement peut compenser le gonflement propre de la matière comprimée.

Les formules énoncées ci-dessus étant absolument générales, elles s'appliquent à tous les corps, quelle que soit leur forme, et notamment aux corps creux. L'allongement a toujours pour expression $\frac{l}{E}\frac{P}{s}$, et toute dimension transversale a de la section, diamètre extérieur, diamètre intérieur, épaisseur de la paroi, etc., éprouve le changement $-\frac{\eta a}{E}\frac{P}{s}$.

Si l'on soumet un solide en forme de parallélépipède rectangle à l'action de six forces égales deux à deux et de sens opposés, respectivement appliquées normalement et en leurs centres de gravité à chaque groupe de deux faces parallèles, les variations de longueur de ses côtés se calculent par les formules suivantes, où l'on attribue à chaque force P′, P″, P‴ le signe convenable (+ pour un effort de traction, — pour un effort de compression). Nous supposons d'ailleurs la matière isotrope :

$$\Delta a = \frac{a}{E}\left[\frac{P'}{s'} - \eta\left(\frac{P''}{s''} + \frac{P'''}{s'''}\right)\right],$$

$$\Delta b = \frac{b}{E}\left[\frac{P''}{s''} - \eta\left(\frac{P'}{s'} + \frac{P'''}{s'''}\right)\right],$$

$$\Delta c = \frac{c}{E}\left[\frac{P'''}{s'''} - \eta\left(\frac{P'}{s'} + \frac{P''}{s''}\right)\right].$$

Il faut poser dans ces formules : $s' = bc$; $s'' = ac$; $s''' = ab$.

Lorsqu'on fait croître indéfiniment les forces P′, P″, P‴, il arrive toujours un moment où la rupture se produit. On dit alors que l'on atteint la limite de rupture, *par traction* ou *par écrasement*.

Dans le cas de la traction simple ou de la compression simple on appelle *charge de rupture* ou travail élastique de rupture le rapport

à la section transversale s de la force qui a provoqué le phénomène.

Dans le cas du parallélépipède tiré ou comprimé sur ses différentes faces, la charge de rupture pour la face S′, qui serait $\frac{P'}{S'}$ dans le cas du travail simple, s'abaissera si P″ et P‴ sont de signe opposé à P′, par exemple si P′ était un effort de traction, P″ et P‴ sont des efforts de compression.

Dans le cas opposé, si P″ et P‴ sont de même signe que P′, la charge de rupture se relèvera. Enfin quand un corps est comprimé uniformément sur toutes ses faces : $\frac{P'}{S'} = \frac{P''}{S''} = \frac{P'''}{S'''}$, il n'y a jamais rupture, quelles que soient les grandeurs de ces forces. La limite d'élasticité est également fort élevée, et quelques physiciens pensent même qu'elle n'existe plus : le corps reprendrait toujours son volume primitif dès qu'il est soustrait à la compression.

56 *bis*. — DÉFORMATION TANGENTIELLE, TRANSVERSALE. PAR GLISSEMENT OU CISAILLEMENT.

Considérons un solide en forme de parallélépipède rectangle, dont les côtés aient pour longueurs a, b et c. Supposons que deux de ses faces parallèles, par exemple les faces a, b, soient sollicitées par deux forces F, égales entre elles, de direction parallèle au côté b, mais de sens opposés, situées respectivement dans ces deux faces et passant par leurs centres de gravité. Le travail tangentiel de glissement ou de cisaillement sera pour une face $\frac{F}{S}$, et pour l'autre $-\frac{F}{S}$.

Le couple constitué par ces deux forces donnera lieu à une déformation tangentielle, transversale ou par glissement, qui se manifestera dans les deux faces b, c, du parallélépipède perpendiculaires aux précédentes et parallèles aux forces F : chacune de ces faces, primitivement rectangulaire, se transformera en un parallélogramme. Si nous désignons par ω le changement éprouvé de ce chef par l'angle primitivement droit des deux côtés adjacents de cette face, on aura la relation

$$\omega = \frac{1}{G}\frac{F}{S}.$$

G est le coefficient d'élasticité transversale ou tangentielle de la matière. On démontre, dans la théorie de l'élasticité, que pour les corps isotropes il existe, entre le coefficient d'élasticité transversale G, le coefficient d'élasticité longitudinale E et le coefficient de contrac-

tion latérale η ou $\frac{1}{4}$, la relation

$$G = \frac{E}{2(1+\eta)} = \frac{2}{5} E.$$

Cette même relation est également applicable à des corps hé
tropes pour lesquels le coefficient η est différent de $\frac{1}{4}$, mais
certaines directions seulement, qui sont des axes de symétrie
matière, au point de vue de sa structure et de ses propriétés élastiq

57. — TORSION.

Considérons une pièce cylindrique, pleine ou creuse, sur laq
agissent deux couples T et — T, égaux et de sens opposés, s
dans deux plans normaux à l'axe du cylindre. Le solide éprou
une déformation par torsion : une génératrice primitivement r
ligne se changera en un arc d'hélice. On appelle *angle de torsi*
l'angle que fait l'hélice avec l'axe du cylindre : c'est aussi l'angle
a tourné une section tranversale par rapport à la section qui e
distante de l'unité de longueur.

En vertu de la loi de Hooke on a, entre l'angle de torsion
couple de torsion correspondant, la relation bien connue

$$\theta = \frac{T}{G I_p}.$$

G, qui prend ici le nom de *module de torsion*, est le coeffi
d'élasticité transversale ou tangentielle dont il a été déjà parlé. I
le moment d'inertie polaire de la section de la pièce. Si celle-ci e
cylindre plein, de rayon r, on a

$$I_p = \frac{\pi r^4}{2}.$$

Si celle-ci est un anneau dont les rayons intérieur et exté
sont r et r', on a

$$I_p = \frac{\pi(r^4 - r'^4)}{2}.$$

58. — DÉTERMINATION DU MODULE DE TORSION.

Coulomb, qui a étudié la torsion des fils, et Wertheim, qui a
sur des barres cylindriques, ont eu recours, dans leurs expérie
à deux méthodes : la méthode statique et la méthode dynamique

a. **Méthode statique.** — Le fil, fixé par son extrémité, est maintenu vertical par un poids suspendu à l'autre extrémité. La grandeur de la tension produite par ce poids est sans influence sur le module de torsion. A l'extrémité du fil est attaché un levier horizontal : au bout de ce levier est fixé un cordon flexible qui passe ensuite sur une poulie, à axe horizontal très mobile et supporte, à son extrémité, un plateau dans lequel on peut mettre des poids marqués. Entre le levier et la poulie, le cordon est horizontal. Un index horizontal fixé à l'extrémité du fil peut se déplacer au-dessus d'un cercle divisé. On note la position de l'index, quand le fil n'est pas tordu, puis sa position quand on a placé un poids P dans le plateau : la différence fait connaître l'angle de torsion θ. Si d est la longueur du bras de levier, le moment du couple torseur est Pd; le module de torsion sera

$$G = \frac{\theta I_p}{Pd} = \frac{\theta . \pi r^4}{2Pd},$$

si r est le rayon du fil.

Cette méthode n'est susceptible de précision que pour les fils gros, permettant d'employer des couples assez forts pour que l'influence des frottements soit négligeable.

b. **Méthode dynamique ou des oscillations.** — Le fil fixé à sa partie supérieure est tendu par un poids : on le tord d'un certain angle, puis on l'abandonne à lui-même. Le couple de torsion, qui tend à le ramener vers sa position d'équilibre, étant constamment proportionnel à l'angle d'écart, le fil effectuera des oscillations pendulaires. Si T est le moment du couple par unité d'angle, I le moment d'inertie du système oscillant, la période des oscillations sera :

$$t = \pi\sqrt{\frac{I}{T}},$$

d'où

$$T = \frac{\pi^2 I}{t^2}.$$

Il est aisé de déterminer t; I se réduit au moment d'inertie du poids tenseur : si celui-ci a une forme géométrique simple, on pourra calculer I d'après ses dimensions et l'équation ne contiendra plus d'autre inconnue que T.

Cette méthode s'applique même à des couples très faibles; les frottements n'influent pas sur la période des oscillations, mais seulement sur leur décrément.

Dans les limites d'élasticité le couple est rigoureusement propor-

tionnel à l'angle d'écart : aussi l'amplitude admissible pour les oscillations n'est pas limitée à des valeurs très faibles, comme dans le cas du pendule ordinaire.

59. — FLEXION.

La flexion est la déformation que subit une barre sollicitée par des forces normales à son axe. Son étude constitue le principal problème traité dans la théorie de l'élasticité et de la résistance des matériaux. Nous n'envisagerons ici que le cas particulier d'un barreau prismatique rectiligne, sollicité par une force unique P normale à son axe et dirigée suivant un axe de symétrie de la section transversale. On peut disposer l'expérience de trois façons différentes :

1° Encastrer la barre à une extrémité, et appliquer la charge à l'autre extrémité, supposée libre;

2° Maintenir, par appuis simples, les deux extrémités de la pièce et appliquer la force au milieu de la longueur;

3° Encastrer les deux extrémités de la barre sur deux supports et appliquer encore la force au milieu de la distance mutuelle des sections d'encastrement.

Désignons par I le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe perpendiculaire à la direction de la force P; par l la longueur de la barre. La flèche de flexion f, c'est-à-dire le déplacement éprouvé par l'axe dans la direction de la force au droit de la section d'application de cette force, se calculera par l'une des formules suivantes

(1) $$f_1 = \frac{1}{3}\frac{Pl^3}{EI},$$

(2) $$f_2 = \frac{1}{48}\frac{Pl^3}{EI},$$

(3) $$f_3 = \frac{1}{192}\frac{Pl^3}{EI}.$$

On voit que l'on a, toutes choses égales d'ailleurs,

$$f_1 = 16 f_2 = 64 f_3.$$

a. **Étude expérimentale de la flexion**. — Pour déterminer la flèche on peut employer le cathétomètre ou une méthode optique, qui est plus sensible. On fixe à l'extrémité du barreau, ou en son milieu, un petit miroir et l'on détermine l'angle dont tourne ce miroir par la méthode de Poggendorff. Le dispositif est choisi de manière qu'il y ait une relation simple entre cet angle et la flèche : en particulier, celui de König est très sensible.

b. **Plan des fibres neutres.** — Supposons une barre partagée en lames planes, minces, perpendiculaires à la direction de la charge. Quand la barre fléchit et se courbe, les lames supérieures se raccourcissent et deviennent concaves vers l'extérieur; les lames inférieures s'allongent et deviennent convexes : il existe donc une lame intermédiaire qui ne change pas de longueur : on la désigne sous le nom de *plan des fibres neutres*.

Les règles étalons de longueur ont une forme telle que le plan des fibres neutres soit à découvert et c'est sur ce plan qu'on trace les traits de repère qui limitent la longueur de l'étalon.

STATIQUE DES LIQUIDES ET DES GAZ. ÉCOULEMENT DES LIQUIDES.

I. — HYDROSTATIQUE.

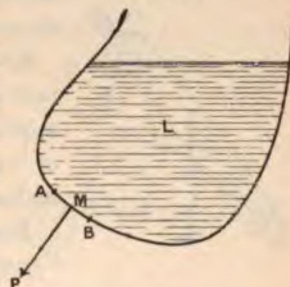
60. — PRESSIONS DANS LES LIQUIDES.

Un liquide est un corps qui, occupant à une température donnée un volume constant, étant très peu compressible, n'a pas néanmoins la propriété d'avoir une forme propre et prend celle des vases dans lesquels il est enfermé.

L'Hydrostatique a pour but d'étudier les relations qui existent entre les forces agissant sur les liquides et les actions que les liquides exercent sur les corps solides en contact avec eux, lorsqu'il y a équilibre.

Logiquement, il faudrait commencer l'étude de l'équilibre des liquides par celle des phénomènes capillaires : en effet, ces derniers étudient le cas général de la forme des liquides en contact immédiat avec les solides. Mais l'Hydrostatique, qui n'en est qu'un cas particulier, étant susceptible d'une exposition plus élémentaire, c'est par elle que nous commencerons l'étude des liquides, sauf à voir ensuite, en étudiant la capillarité, leurs propriétés générales à l'état statique.

Fig. 52.



Pression. — Soit (*fig.* 52) un vase de forme tout à fait quelconque contenant un liquide L, et considérons une portion AB de la paroi de ce vase. Si nous venons à rendre

mobile cet élément de paroi, supposé plan, *l'expérience montre* que, pour l'empêcher de se déplacer, il faut lui appliquer une force *normale,* dirigée de dehors en dedans. On en conclut que le liquide exerce, inversement, une poussée normale sur AB, tendant à chasser cet élément en dehors : nous représenterons cette poussée par la force P.

Si l'élément AB est horizontal et présente une surface de 1^{cm^2} la force P est, par définition, la *pression* du liquide sur l'élément AB.

Si l'élément AB a une surface S, et que P représente l'effort qu'il supporte, la *pression moyenne* sur cet élément sera $\frac{P}{S}$.

Enfin, si l'élément S tend vers zéro, la pression P diminue elle-même. On appelle *pression au point* M la limite du rapport

$$p = \frac{dP}{dS}.$$

Dimensions de la pression. — La pression étant le quotient d'une force par une surface a donc pour dimensions

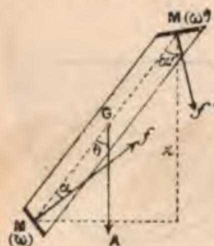
$$(p) = \frac{LMT^{-2}}{L^2} = L^{-1}MT^{-2}.$$

61. — THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'HYDROSTATIQUE.

Dans un liquide pesant en équilibre, la différence des pressions en deux points est égale au produit du poids spécifique du liquide par la différence de niveaux des deux points.

Considérons, en effet (*fig.* 53), un cylindre liquide, dont la section soit très faible et dont les bases, inclinées sur l'axe d'une manière quelconque, soient des éléments de surface ω et ω'.

Fig. 53.



Les deux bases supportent des actions normales f et f' ; le poids du liquide est une force A appliquée au centre de gravité G du cylindre, et les pressions sur la surface latérale sont normales à cette surface en chaque point.

Écrivons, ce qui est une des conditions de l'équilibre, que la somme des projections des forces, sur une direction quelconque, est nulle ; nous pouvons prendre comme direction celle des génératrices du cylindre. Dans ce cas, nous n'avons pas à nous occuper des pressions latérales dont les projections

sont nulles, et nous n'aurons à considérer que les forces f, f', A. Nous aurons donc

$$f\cos\alpha - f'\cos\alpha' - A\cos\theta = 0. \tag{1}$$

Désignons par s la section droite du cylindre, par l la longueur de la droite MM', qui réunit les centres de gravité de ses deux bases, par ϖ *le poids spécifique* du liquide, c'est-à-dire le poids de l'unité de volume. Nous aurons

$$A = sl\varpi;$$

mais

$$s = \omega\cos\alpha = \omega'\cos\alpha';$$

nous aurons donc, en substituant dans (1) et en supprimant le facteur commun s :

$$\frac{f}{\omega} - \frac{f'}{\omega'} = l\varpi\cos\theta.$$

Mais $l\cos\theta$ est la distance verticale z des points M, M'; de plus, si nous nous reportons à la définition de la pression, $\frac{f}{\omega}$ est la pression p au point M; $\frac{f'}{\omega'}$ est la pression p' en M; on a donc

$$p - p' = z\varpi, \tag{2}$$

équation qui est homogène, car le produit $z\varpi$ a des dimensions ($L^{-1}MT^{-2}$) identiques aux dimensions d'une pression.

62. — COROLLAIRES.

1° *La pression supportée par un élément de surface est indépendante de l'orientation de cet élément;* en effet, si par M' nous faisons passer un plan quelconque et si nous appelons f_1 l'action normale sur la section ω_1, nous pouvons écrire, puisque z est nul,

$$\frac{f_1}{\omega_1} = \frac{f'}{\omega'}.$$

2° *La pression est la même en tous les points d'un même plan horizontal, pris au sein d'un liquide en équilibre.*

En effet, dans ce cas, $z = 0$, donc $p = p'$.

3° *La surface libre d'un liquide pesant en équilibre est plane et horizontale.*

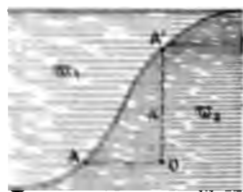
Prenons, en effet, deux éléments de la surface libre : la pression

y est la même. Donc $p = p'$; donc $z = 0$; la surface est par conséquent horizontale.

4° *Quand deux liquides, non miscibles, sont dans le même vase :*

a. Ils se superposent par ordre de densités, les plus denses étant au fond.

Fig. 54.



b. La surface de séparation de deux liquides consécutifs est plane et horizontale.

La première partie se vérifie expérimentalement par le dispositif classique connu sous le nom de *fiole des quatre éléments;* la seconde partie se démontre aisément. Soient A et A' (*fig.* 54) deux points de la surface de séparation supposée de forme quelconque, et z leur différence de niveau; nous avons pour le liquide de poids spécifique ϖ_1

$$p - p' = z\varpi_1,$$

et pour le liquide de poids spécifique ϖ_2

$$p - p' = z\varpi_2,$$

d'où

$$z(\varpi_1 - \varpi_2) = 0,$$

mais, par hypothèse, $\varpi_1 \gtrless \varpi_2$; donc $z = 0$. La surface de séparation est donc un plan horizontal.

63. — VASES COMMUNICANTS.

Le théorème fondamental est indépendant de la forme du vase qui contient le liquide; il suppose cependant le filet liquide non interrompu de M en M'. Prenons deux vases communicants (*fig.* 55). Nous pouvons appliquer successivement le théorème aux filets *bg*, *gf*, *fe*, *ed*, *dc*, *ca*; on voit ainsi que le théorème s'applique à déterminer la différence de pression entre *a* et *b*, de la même manière que s'il n'y avait qu'un seul vase. Tous les résultats précédents (surface libre horizontale, pressions égales en tous points d'un plan horizontal, surface horizontale de séparation de deux liquides) s'appliquent donc aux vases communicants.

Fig. 55.



Dans deux vases communicants contenant deux liquides, les hauteurs des surfaces libres, au-dessus de la surface de séparation, sont en raison inverse du poids spécifique des liquides.

Fig. 56.

Soient, en effet, deux vases A et B (*fig.* 56) qui communiquent entre eux; ils contiennent de B en C un liquide de poids spécifique ϖ'; au-dessus de ce liquide et dans le vase de gauche de C en A est un liquide de poids spécifique $\varpi < \varpi'$. La surface de séparation C plane et horizontale appartenant aux deux liquides, nous écrirons que la pression y est la même des deux côtés, ce qui donne

$$h\varpi = h'\varpi',$$

d'où

$$\frac{h}{h'} = \frac{\varpi'}{\varpi}.$$

Cette condition fixe le niveau de la surface de séparation par rapport aux surfaces libres; mais elle ne permet pas de décider si cette surface est en C ou en C'; il faut y joindre cette seconde condition : *le tube de communication est entièrement rempli par le liquide le plus dense* qui résulte de ce fait que dans chacun des vases A et B les liquides sont soumis à la loi de superposition par ordre de densité décroissante.

Le *niveau d'eau* des arpenteurs est une application des vases communicants contenant un seul liquide.

64. — PRINCIPE DE PASCAL.

Toute pression exercée sur une portion de paroi plane se transmet également sur toute autre portion plane de paroi égale en surface à la première; ce qui revient à dire que *les actions exercées sur deux éléments de surface sont proportionnelles à ces éléments.*

Soit (*fig.* 57) une portion finie de surface plane S plongée dans un liquide; un élément ω de cette surface supporte une action f. Menons dans le liquide un plan horizontal AB, et soit p la pression dans ce plan. Nous avons

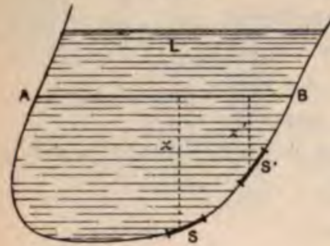
$$\frac{f}{\omega} = p + \varpi z,$$

ϖ étant le poids spécifique du liquide et z la distance de l'élément ω au plan horizontal AB ; on aura donc

$$f = p\omega + \varpi z \omega;$$

si nous faisons la somme des forces élémentaires f pour tous les éléments ω qui constituent la portion de paroi S, nous aurons une action totale F dont l'expression sera

Fig. 57.



$$F = pS + \varpi \sum z\omega;$$

mais, si Z représente la distance du centre de gravité de l'élément S au plan AB, on démontre en Géométrie que

$$\sum z\omega = SZ;$$

nous aurons donc

$$F = pS + \varpi SZ$$

et, divisant par S,

$$(1) \qquad \frac{F}{S} = p + \varpi Z.$$

Nous aurons de même, pour un autre élément d'étendue S', et dont le centre de gravité serait à une distance Z' du plan AB,

$$(2) \qquad \frac{F'}{S'} = p + \varpi Z'.$$

Si nous retranchons (1) et (2) membre à membre, il vient

$$(3) \qquad \frac{F}{S} - \frac{F'}{S'} = \varpi(Z - Z').$$

Ce théorème analogue au *théorème fondamental* s'énonce ainsi :

Dans un liquide pesant en équilibre, la différence des pressions moyennes sur deux parois planes plongées dans ce liquide est égale au produit du poids spécifique du liquide par la différence de niveau de leurs centres de gravité.

Supposons maintenant que le plan AB devienne un piston, supportant un effort supplémentaire, et que, par conséquent, la pression, aux divers points de ce plan, devienne p', supérieure à p. Les actions exercées sur S et S' deviennent F_1 et F'_1, respectivement

supérieures à F et à F′; mais nous aurons toujours, ϖ_1 étant la nouvelle valeur du poids spécifique du liquide comprimé,

$$(4) \qquad \frac{F_1}{S} - \frac{F'_1}{S'} = \varpi_1(Z - Z').$$

Si enfin nous supposons $\varpi_1 = \varpi$, c'est-à-dire *si nous nous plaçons dans le cas d'un liquide incompressible,* nous aurons, en retranchant membre à membre (3) et (4),

$$\frac{F_1 - F}{S} = \frac{F'_1 - F'}{S'},$$

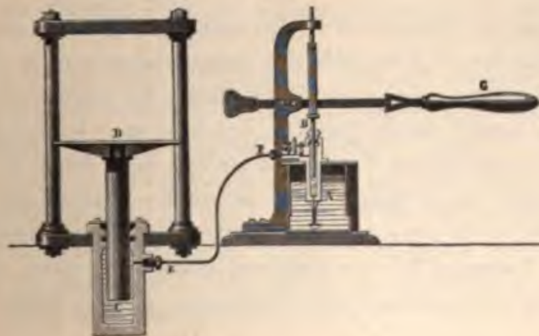
c'est-à-dire que *les variations des actions exercées par le liquide sont proportionnelles aux surfaces des éléments pressés :* c'est le *principe de Pascal.*

65. — PRESSE HYDRAULIQUE.

Les vérifications de ce principe sont nombreuses : Pascal prenait un tonneau solide, complètement rempli d'eau. Dans un trou, pratiqué sur son fond, s'emboîtait la partie inférieure d'un tube de quelques mètres de hauteur, mais de très faible section. Le tonneau, parfaitement étanche, se met à fuir de tous côtés dès que le tube est rempli d'eau : ses douves se disjoignent, en effet, sous l'influence de la pression proportionnelle à leur surface, que supporte chacune d'elles.

La *Presse hydraulique* (*fig.* 58) est une des plus heureuses applications du principe de Pascal. Elle se compose de deux corps de

Fig. 58.



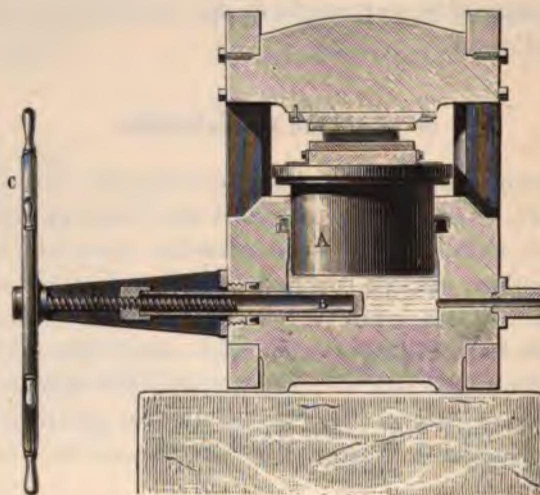
pompe, A, C, d'inégales sections, s et S. Le corps de pompe A sert à constituer une pompe aspirante et foulante, manœuvrée par un

levier G. Le grand corps de pompe contient un piston C qui supporte un plateau B; entre ce plateau et un obstacle fixe se placent les corps à comprimer.

Si, comme dans le cas de la figure, le rapport des diamètres des pistons est de 1 à 4, le rapport de leurs sections sera de 1 à 16. Le rapport des bras de levier est d'ailleurs de 1 à 12. Donc, un effort de 100^{kg}, appliqué au levier G, représente 1200^{kg} sur le petit piston, et 1200×16 ou 19200^{kg} sur le grand piston.

Desgoffe a encore porté plus loin la limite de compression en munissant le grand cylindre d'un piston supplémentaire B (*fig.* 59),

Fig. 59.



commandé par un volant à vis C. On comprime d'abord au maximum avec le petit piston, et l'on achève la compression avec le volant à vis.

Sous ces énormes pressions, l'étanchéité du joint entre le piston et le corps de pompe serait difficile à réaliser sans le classique dispositif du *cuir embouti* que l'on voit à gauche de la lettre A. Il suffit de jeter un regard sur la figure pour se rendre compte que l'accroissement même de la pression aura pour effet d'appliquer davantage les lèvres de l'anneau de cuir embouti contre le piston, d'une part, contre la paroi de la rainure qui le contient, d'autre part.

66. — PRESSION SUR LE FOND DES VASES. APPAREIL DE MASSON.

Il résulte de l'équation (1)

$$\frac{F}{S} = p + \varpi Z, \tag{1}$$

que, dans un vase dont le fond est horizontal, le surcroît de pression dû au liquide qu'il contient est égal au poids d'un cylindre de ce liquide ayant la surface S de fond comme base, et comme hauteur la distance Z de ce fond au niveau libre. Cette pression est indépendante de la forme du vase : c'est ce qu'on vérifie avec l'appareil de Masson (*fig.* 60).

Fig. 60.



Cet appareil se compose d'un tube cylindrique F sur lequel peuvent se visser successivement trois vases M, M′, M″; l'un, M′, cylindrique et de même section que le tube F; le second M, conique; le troisième, M″, cylindrique mais de petite section.

Sous le tube F se trouve un plateau rodé BC, qui est appliqué de haut en bas contre le fond du tube F, par un cordon accroché au-dessous du plateau D d'une balance, dont l'autre plateau porte des poids P.

Supposons qu'on visse le récipient conique sous le tube F; on verse de l'eau dans le récipient, et l'on constate que le fond BC se détache pour une certaine hauteur de liquide versé en M. On note cette hauteur et l'on constate que, quelle que soit la forme de celui des vases qu'on substitue à M, le fond se détache toujours pour la même hauteur de liquide versé, ce qui correspond à des poids très différents, et ce qui montre bien que la pression sur le fond BC ne dépend que de la hauteur du liquide versé.

67. — PRESSION SUR LES PAROIS LATÉRALES.

Si nous écrivons la relation (1) sous la forme

$$F = pS + SZ\varpi, \tag{2}$$

nous voyons que *la pression due au liquide sur une paroi latérale est égale au poids d'un cylindre de liquide ayant comme base cette paroi et comme hauteur la distance verticale de son centre de gravité au niveau libre du liquide.*

Les appareils classiques connus sous le nom de *flotteur à réaction* (*fig.* 61) et de *tourniquet hydraulique* (*fig.* 62) montrent l'exis-

Fig. 61.



Fig. 62.



tence des pressions sur les parois latérales, par le fait que ces pressions, quand elles ne sont pas équilibrées par la pression égale et contraire, ce qui arrive quand on permet l'écoulement du liquide, impriment au récipient un mouvement qui démontre leur existence.

68. — PARADOXE HYDROSTATIQUE.

Résultante des pressions exercées par un liquide sur les parois du vase qui le contient. — *La résultante de toutes les pressions exercées par un liquide sur les parois du vase qui le contient est égale au poids du liquide.*

Prenons trois axes de coordonnées rectangulaires (*fig.* 63) et un vase de forme quelconque; considérons un élément de surface ω sur les parois du vase, et menons trois cylindres ayant ω comme base

commune, et dont les génératrices soient respectivement parallèles à Ox, Oy, Oz. Ces cylindres découpent dans les parois du vase d'autres éléments ω', ω'', ω'''.

Soit d'abord le cylindre $\omega\omega'$, parallèle à Ox. Nous désignerons par α et α' les angles que les normales à ses deux bases ω et ω' font avec l'axe des x. Les pressions normales sur les deux bases du cylindre sont $p\omega$ et $p\omega'$, p étant la valeur de la pression dans le plan horizontal qui contient l'axe du cylindre. Si nous les projetons sur Ox, ces pressions auront comme projection respectivement $p\omega\cos\alpha$ et $p\omega'\cos\alpha'$. Mais, si nous appelons σ la section droite du cylindre, nous aurons

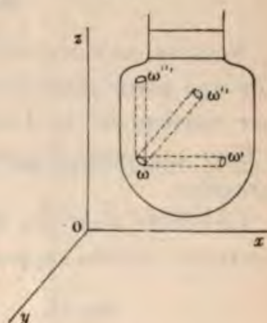


Fig. 63.

$$\sigma = \omega\cos\alpha = -\,\omega'\cos\alpha';$$

donc

$$\varpi\cos\alpha + \omega'\cos\alpha' = 0,$$

et, multipliant par p,

$$p\omega\cos\alpha + p\omega'\cos\alpha' = 0.$$

Donc les composantes suivant Ox des pressions en ω et ω' se détruisent. Comme on peut décomposer toutes les surfaces du vase en éléments pris deux à deux, tels que ω et ω', on voit que la somme des projections sur Ox des actions exercées par le liquide sur les parois du vase qui le contient est nulle.

On aura le même résultat en considérant des cylindres tels que $\omega\omega''$, parallèles à Oy.

Restent les composantes parallèles à Oz. Considérons un cylindre élémentaire $\omega\omega'''$ parallèle à Oz. Les pressions en ω et ω''' sont différentes : soient p et p''' leurs valeurs; il en résulte sur ω et ω''' des actions normales ayant respectivement pour expressions $p\omega$ et $p'''\omega'''$. Soient γ et γ''' les angles que font avec Oz les normales en ω et ω''' : les projections de ces éléments sur un plan horizontal sont $\omega\cos\gamma$ et $-\,\omega''\cos\gamma''$; elles sont égales entre elles et ont comme valeur commune la section droite σ du cylindre. Nous aurons donc pour la somme algébrique des composantes verticales des pressions

$$(p - p''')\sigma = z\varpi\sigma,$$

car, d'après le théorème fondamental, si z est la distance des éléments ω et ω''', on a $p - p''' = z\varpi$. Cette résultante est donc le poids de la colonne liquide $\omega\omega'''$; le résultat est d'ailleurs le même si

l'élément ω''' est découpé dans la surface libre du liquide. Donc la somme de toutes les composantes verticales, *les seules qu'accuse la balance,* est égale au poids du liquide.

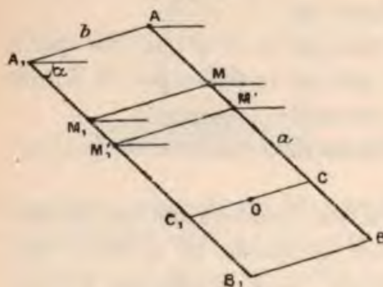
Ainsi s'explique la contradiction apparente de l'expérience faite avec l'appareil de Masson. Mais, dans cet appareil, le fond du vase, agissant seul sur le fléau de la balance, ne fait pas corps avec les parois; les forces verticales exercées sur celles-ci ne lui sont donc pas transmises. C'est cette apparente contradiction qui est connue sous le nom de *paradoxe hydrostatique*.

69. — CENTRE DE PRESSION.

Nous avons calculé la valeur de la pression exercée par un liquide sur une paroi plane du vase qui le renferme; nous avons déterminé, par conséquent, la direction et l'intensité de la force; il nous reste à fixer son point d'application, c'est-à-dire à rechercher le *centre de pression*.

Ce centre sera, par définition, le point d'application de la résultante des actions supportées par les éléments de la paroi; si la paroi est plane, ces actions sont parallèles. Nous pourrons donc déterminer le centre de ces forces parallèles par une application du théorème des moments.

Fig. 64.



Soit ABA_1B_1 (*fig.* 64) une paroi rectangulaire dont un côté, AA_1, se confond avec la surface libre du liquide; posons $AB = a$ et $AA_1 = b$. Soit un point M le long du côté a, à distance $AM = x$ et un point voisin M' tel que $MM' = dx$. Le rectangle élémentaire $MM'M'_1M_1$ a pour surface $b\,dx$ et subit une action égale à

$$f = b\,dx \times x \sin\alpha \times \varpi,$$

ϖ étant le poids spécifique du liquide et α l'angle de la paroi avec l'horizon.

Soit O le centre inconnu de pression; soit $AC = X$ sa distance à l'arête AA_1. Appelons F l'effort sur la paroi entière ABA_1B_1; nous avons démontré que l'on devait avoir

$$F = ab\frac{a}{2}\varpi \sin\alpha.$$

Mais le théorème des moments nous donne

$$FX = \sum fx.$$

Nous aurons donc, en combinant ces deux dernières relations et en remplaçant f par sa valeur,

$$X = \frac{\sum b\,dx \times x \sin\alpha \times \varpi \times x}{ab \times \frac{a}{2} \sin\alpha \times \varpi} = 2\frac{\sum x^2\,dx}{a^2}.$$

Mais $x^2\,dx$ est la différentielle de $\frac{x^3}{3}$. Donc

$$\sum x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + \text{const.}$$

En exprimant que cette équation s'applique successivement pour $x = 0$ et $x = a$, on voit que $\sum x^2\,dx$ se réduit, dans le cas actuel, à $\frac{1}{3}a^3$. Nous aurons donc, en définitive,

$$X = \tfrac{2}{3}a;$$

le centre de pression est donc situé aux $\frac{2}{3}$ de la paroi, à partir du niveau libre du liquide.

70. — PRINCIPE D'ARCHIMÈDE.

Lorsqu'un corps solide est plongé dans un liquide en équilibre, les actions exercées sur sa surface ont une résultante verticale, dirigée de bas en haut, égale au poids du liquide déplacé et appliquée en son centre de gravité.

Fig. 65.



Considérons un corps A (*fig.* 65) plongé dans un liquide et remplaçons, par la pensée, ce corps par un même volume de liquide. Dans cette hypothèse, le liquide soumis à l'étude étant supposé en équilibre, il faut bien admettre qu'il y a équilibre entre le poids du liquide A, isolé par la pensée du reste, et les actions qu'il supporte. Ce poids est donc égal et contraire à la résultante desdites actions.

Donc cette résultante est une force égale et opposée au poids du liquide déplacé par le corps A, agissant de bas en haut et appliquée *au centre de gravité* du volume du liquide déplacé.

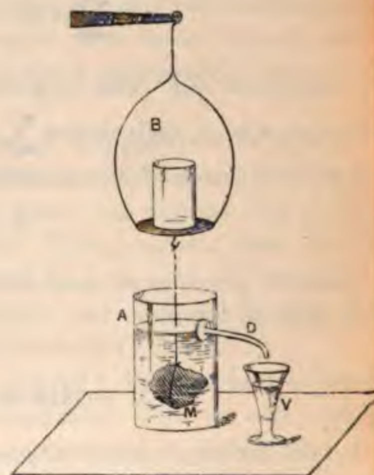
Cette résultante s'appelle *la poussée* et son point d'application s'appelle *le centre de poussée.*

Deux procédés nous permettent de *vérifier* le principe d'Archimède par l'expérience. L'un, classique, est rappelé par la *fig.* 66. Il se compose d'un cylindre plein, suspendu au-dessous d'un cylindre creux de même volume. Le système de deux cylindres accrochés

Fig. 66.



Fig. 67.



sous le plateau d'une balance à crémaillère appelée *balance hydrostatique,* est équilibré dans l'air. Si l'on abaisse le tout de manière que le cylindre plein plonge dans un vase plein d'eau, l'équilibre est détruit en faveur du poids P. Il ne se rétablit que si, avec une pipette on remplit d'eau le cylindre creux A, ce qui vérifie l'énoncé.

La méthode suivante est plus générale (*fig.* 67).

On équilibre sur la balance hydrostatique, et du même côté, un vase vide B et le corps M pendu à un fil; cela fait, en abaissant le fléau, on immerge le corps dans un vase à *trop-plein,* A, rempli jusqu'au bord de son tube de déversement D. Quelle que soit la forme du corps M, il chasse par le tube D un volume de liquide égal au sien. Si l'on recueille ce liquide dans un verre V, on constate qu

l'équilibre, détruit au moment de l'immersion, sera rétabli si l'on verse dans B tout le liquide recueilli en V.

Le mode de démonstration analytique que nous avons employé à propos du paradoxe hydrostatique peut également être mis en usage; il suffit de remarquer que le sens de toutes les forces est changé, et par suite aussi celui de leur résultante.

71. — ÉQUILIBRE DES CORPS IMMERGÉS.

Quelle que soit la forme d'un corps immergé dans un liquide, il est sollicité par deux forces qui agissent en sens contraires : l'une est son poids P, appliqué à son centre de gravité G; l'autre est la poussée du liquide F, appliquée au centre de gravité O du volume liquide déplacé.

Si $P > F$, le corps tombe au fond du vase;

Si $P = F$, le corps reste au sein du liquide, sans monter ni descendre, au point où il se trouve;

Si $P < F$, la poussée fait remonter le corps vers la surface; une portion émerge, au-dessus du niveau libre, et l'équilibre n'a lieu que quand le poids du liquide déplacé par la portion immergée est égal au poids total du corps; on dit alors que le corps flotte.

Dans les trois cas, l'équilibre n'a lieu que quand les deux centres de gravité et de poussée sont sur la même verticale.

Métacentre. — Soit (*fig.* 68) un corps flottant en équilibre. Le poids P, appliqué en G, est donc égal et contraire à la poussée F

Fig. 68.

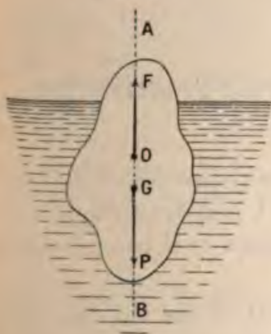
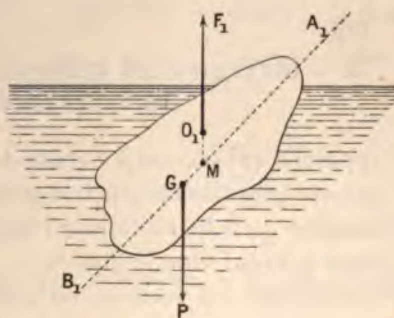


Fig. 69.



appliquée en O. Joignons OG : nous déterminons dans le corps une droite AB.

Dérangeons le corps de sa position d'équilibre et amenons-le à occuper la position de la figure 69 : la droite AB est devenue A_1B_1; G est resté invariable; seul le centre de poussée a changé et est venu en O_1. La force F_1 a donc changé de point d'application. Prolongeons-la jusqu'à sa rencontre avec la droite A_1B_1 en M. Le point M a reçu le nom de *métacentre;* on peut y supposer la poussée F appliquée, et l'on voit que :

La condition pour que l'équilibre soit stable est que le métacentre soit au-dessus du centre de gravité.

II. — COMPRESSIBILITÉ DES LIQUIDES.

72. — COEFFICIENT DE COMPRESSIBILITÉ.

Dans les théories de l'Hydrostatique, on suppose les liquides incompressibles. Les liquides réels sont compressibles, c'est-à-dire que leur volume est fonction de la pression qu'ils supportent.

Soit Δv la diminution qu'éprouve le volume v d'un liquide quand on augmente la pression de Δp, sans changer la température. Δv est proportionnel à v et à Δp :

$$\Delta v = -\beta v \Delta p.$$

Le facteur β est le coefficient de compressibilité moyen entre v et $v + \Delta v$. Le coefficient vrai est la limite de β, quand Δv et Δp tendent vers zéro,

$$\beta = -\frac{1}{v}\frac{dv}{dp}.$$

73. — DÉTERMINATION EXPÉRIMENTALE DU COEFFICIENT DE COMPRESSIBILITÉ.

Les appareils qui servent à l'étude de la compressibilité s'appellent d'une manière générale des *piézomètres*. L'une des difficultés principales tient à ce qu'il faut éliminer l'influence de la compressibilité de l'enveloppe qui renferme le liquide.

Cette enveloppe est formée, en général, d'une ampoule de verre assez large se terminant à sa partie supérieure par une tige capillaire. Dans l'appareil de Regnault, employé après lui par plusieurs autres physiciens, l'ampoule se trouve enfermée dans un vase à parois

épaisses, rempli d'eau; la tige sort du couvercle de ce vase. A l'aide d'un système de tuyaux et de robinets, il est possible de faire agir la pression soit à l'intérieur, soit à l'extérieur seulement de l'enveloppe, soit simultanément à l'intérieur et à l'extérieur. Dans chaque cas, on mesure le volume apparent du liquide et les chiffres obtenus permettent de calculer le coefficient de compressibilité du liquide et aussi celui de l'enveloppe.

M. Amagat emploie un piézomètre ouvert à la partie inférieure, enfermé dans un cylindre d'acier. Dans le fond du cylindre se trouve du mercure et au-dessus de la glycérine. Quand on exerce une pression sur la glycérine, le mercure pénètre dans le tube et transmet la pression au liquide. Pour déterminer le volume, sont disposés le long du tube des fils de platine scellés dans le verre et formant contact électrique. Le cylindre d'acier est maintenu à température constante par de la glace ou de l'eau.

Résultats. — La compressibilité des liquides dépend de la température et de la pression. En général, la compressibilité diminue quand la pression augmente, et les coefficients des divers liquides tendent à prendre des valeurs égales ou à peu près.

La compressibilité de l'eau, sous de faibles pressions, décroît d'abord quand on élève la température jusque vers 50°, passe par un minimum et croît de nouveau. Le minimum est de moins en moins prononcé et finit par disparaître (*fig.* 70).

La compressibilité des autres liquides croît avec la température.

Voici quelques valeurs du coefficient de compressibilité pour des liquides usuels (la pression est supposée exprimée en atmosphères) :

Pression.	Eau.	Alcool.	Éther.	Sulfure de carbone.
atm 1 – 500 atm	$47,5.10^{-6}$	$107,2.10^{-6}$	$76,9.10^{-6}$	$65,7.10^{-6}$
500 –1000	41,6	70,8	56,6	52,7
1000 –1500	35,8	53,7	45,8	42,9
1500 –2000	32,4	45,2	38,5	36,7
2000 –2500	29,2	37,1	33,1	32,9
2500 –3000	26,1	31,7	28,4	29,9

(Amagat).

Le mercure est, de tous les liquides étudiés, le moins compressible, $\beta = 3,92.10^{-6}$.

Compressibilité des dissolutions. — La compressibilité des dissolutions est moindre que celle de l'eau pure, d'autant moindre que la

centration est plus grande : elle diminue quand la température
ve.

III. — CAPILLARITÉ.

74. — PHÉNOMÈNES CAPILLAIRES.

étude élémentaire de l'Hydrostatique nous a conduits à diverses
équences relatives à l'état des liquides en équilibre; on a démon-
ar exemple, que la surface libre d'un liquide en équilibre devait
plane et horizontale; qu'il en était de même de la surface de
ation de deux liquides superposés; que, dans deux vases com-
cants, les niveaux d'un même liquide étaient situés dans un
e plan horizontal.

ut cela est vrai, si l'on considère une portion de liquide très
née de ses parois; mais il n'en est plus ainsi dès que la masse
de étudiée est au voisinage d'un corps solide qui la touche. Alors
ois de l'Hydrostatique semblent en défaut. La surface libre d'un
de qui mouille la substance dont son vase est formé se relève
re les parois et cesse d'être horizontale pour devenir concave;
l'inverse si le liquide ne mouille pas le vase qui le contient.
s deux vases communicants, l'un large, l'autre très étroit, le li-
e ne sera jamais au même niveau; si l'on plonge un tube fin dans
quide qui puisse le mouiller, le liquide monte dans le tube d'au-
plus haut que son diamètre est plus étroit.

est sous cette dernière forme que ces exceptions apparentes aux
de l'Hydrostatique ont d'abord été étudiées et le fait que l'ascen-
du liquide avait lieu dans des tubes dont le diamètre intérieur
à peu près celui d'un cheveu a fait donner à l'ensemble de ces
nomènes le nom de *phénomènes capillaires*.

es phénomènes capillaires se produisent, avons-nous dit, au voi-
ge des parois et sur de petites masses liquides. Ces faits tiennent
xistence des *forces de cohésion*.

75. — EXISTENCE DES FORCES DE COHÉSION.

n liquide ne doit pas être considéré comme un agrégat de molé-
s analogues à un tas de poussière. Il y existe des forces de cohé-
n qui s'exercent entre les molécules liquides et celles de la paroi.
peut mettre en évidence l'existence de ces forces par un certain
mbre d'expériences.

Formons, par exemple, avec de l'acide sulfurique et un tube d'environ 1^m, un baromètre tronqué : la colonne de liquide est soutenue par la pression atmosphérique quand l'appareil est dans l'air; mais on constate qu'elle est encore soutenue si l'on met l'appareil sous la cloche d'une machine pneumatique. C'est, dans ce cas, la force de cohésion qui s'exerce entre le liquide et la paroi qui soutient l'acide sulfurique.

La force nécessaire pour détruire cette cohésion peut être très considérable, comme le montre l'expérience suivante, due à M. Berthelot :

On prend un tube de thermomètre fermé à une de ses extrémités; on y introduit de l'éther, de façon qu'il ne soit pas entièrement rempli et on le ferme à la lampe. On chauffe le tube fermé avec la main, jusqu'à ce que le liquide le remplisse entièrement, en dissolvant la bulle d'air qui persiste au-dessus de lui. Si on laisse le tube se refroidir, la bulle d'air ne reparaît pas et le liquide conserve à froid le même volume qu'il avait à chaud. Chaque élément de liquide subit ainsi une véritable traction qui peut aller jusqu'à 120^{kg} par centimètre carré. Si l'on continue à refroidir le tube de plus en plus, la bulle de gaz reparaît tout à coup et, en même temps, on entend un coup sec, semblable au bruit que produit la rupture d'une baguette de verre : c'est une véritable cassure du liquide.

76. — FORMULE DE LAPLACE.

Les effets capillaires sont intimement reliés aux rayons de courbure de la surface qui limite le liquide au point considéré. Laplace a donné l'équation qui régit le phénomène; cette équation est

$$A = p\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right),$$

A est un coefficient spécifique, R et R' sont les rayons de courbure principaux de la surface, et p la pression capillaire.

On sait que, si l'on prend en général deux plans perpendiculaires entre eux qui se coupent en un point d'une surface, et qu'on appelle r et r' les rayons de courbure des sections faites par ces deux plans, on a

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \text{const.}$$

On désigne cette somme sous le nom de *courbure* de la surface au point considéré.

Pour bien comprendre la nature de la pression capillaire, imaginons un vase ABCD (*fig.* 71), ayant le fond percé d'une ouverture infiniment petite MN. Grâce aux forces de cohésion, le liquide ne s'écoule pas par l'ouverture MN, mais prend, comme l'indique la figure, une forme globulaire. La *pression capillaire p* serait la pression avec laquelle il faudrait maintenir un petit piston placé contre l'ouverture pour empêcher le liquide de s'écouler, en vertu des lois ordinaires de l'Hydrostatique. Dans le cas actuel,

Fig. 71.



cette pression serait hd par unité de surface, h et d étant la hauteur et le poids spécifique du liquide. On aurait donc ainsi

$$A\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)=hd=p;$$

mais on démontre en Analyse que la courbure s'exprime en fonction des dérivées secondes de l'une des coordonnées de la surface par rapport aux deux autres. L'équation précédente est donc une équation différentielle. Cette équation admet une infinité d'intégrales qui varient suivant les conditions limites.

Telle est l'expression de la pression capillaire. Nous allons montrer comment, d'une façon simple, il est possible d'établir cette formule; nous emploierons à cet effet l'élégante méthode due à M. Lippmann.

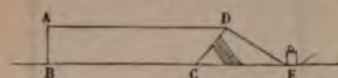
77. — TENSION SUPERFICIELLE.

Considérons les phénomènes capillaires dans le cas, par exemple, d'une colonne liquide soulevée dans un tube de faible diamètre. Imaginons que la surface libre du liquide soit, pour un instant, solidifiée de façon à constituer une paroi qui, avec celles du vase, enferme complètement le liquide. Si cette paroi est élastique, elle servira de manomètre pour mesurer elle-même la pression sous-jacente.

C'est cette substitution théorique d'une membrane élastique à la surface libre du liquide, qui a reçu le nom de *théorie de la tension superficielle*. Nous allons l'exposer en commençant par indiquer les expériences qui permettent d'assimiler réellement la surface libre d'un liquide à une membrane élastique.

Prenons un vase plat ABCD (*fig.* 72) construit de telle façon que la paroi CD, très légère, soit mobile autour de son arête horizontale inférieure C. Une cale de bois et un fil tendu DE maintiennent cette paroi inclinée vers le dehors. On verse de l'eau dans le vase jusqu'à ce que la surface supérieure du liquide vienne mouiller le bord D. La pression hydrostatique tend à rabattre CD sur le plan horizontal; mais, si la couche est peu épaisse, cette pression est faible, et la tension superficielle de la surface libre agissant comme membrane élastique l'emporte sur elle et tend à relever la paroi CD. C'est ce qui arrive si l'on brûle le fil DE, seul obstacle qui résiste à la tension superficielle.

Fig. 72.



Voici une autre expérience, bien faite aussi pour mettre en évidence cette existence d'une tension élastique de la surface d'un liquide : on façonne un cadre fermé, en fil de fer, et on le plonge dans un liquide visqueux qui le mouille; le cadre renferme, quand on le retire, une membrane liquide. Posons sur cette membrane une boucle fermée de fil fin bien mouillé préalablement et perçons, avec un corps sec, la membrane à l'intérieur de la boucle : nous voyons le fil, également tiré dans tous les sens par des tensions normales, prendre la forme circulaire sous l'influence de la tension superficielle.

La célèbre expérience de Plateau dans laquelle une goutte d'huile, déposée avec une pipette au sein d'un liquide de même densité et avec lequel elle ne puisse pas se mélanger, prend d'elle-même la forme sphérique (*fig.* 73), est une autre démonstration de l'existence et de la constance de la tension superficielle.

Fig. 73.

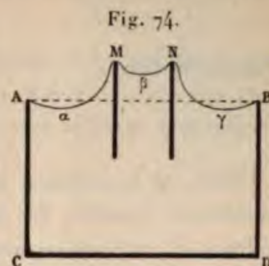


Une analogie très remarquable a conduit naturellement à assimiler la surface libre d'un liquide à une membrane tendue.

Prenons un récipient cylindrique ABCD (*fig.* 74) fermé à sa partie supérieure par une feuille de caoutchouc bien tendue AB, et soulevons cette membrane par un large manchon concentrique MN, placé en dessous : nous verrons la membrane prendre une forme dont la coupe est $\alpha\beta\gamma$. Or, ce profil est justement celui de la surface d'un liquide soumis aux actions capillaires dans un tube mouillé par lui. C'est ainsi que l'on a été conduit à assimiler les deux choses.

Cela posé, remarquons que la tension d'une membrane peut se définir par l'effort qu'il faudrait exercer sur les bords d'une coupure pratiquée dans sa surface, pour maintenir cette coupure fermée. Désignons par A cet *effort par unité de longueur*.

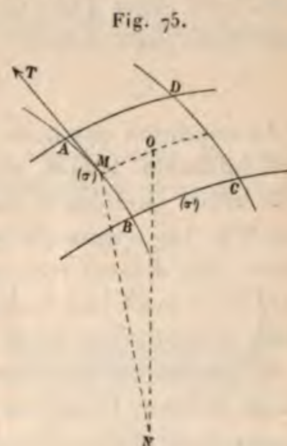
Fig. 74.



Découpons sur la surface liquide un élément de membrane rectangulaire, au moyen de quatre lignes de courbure principales, parallèles deux à deux, ABCD (*fig.* 75); soient σ la longueur de l'un des éléments du contour, σ' celle de l'autre élément. Les forces qui se font équilibre sur l'élément considéré sont :

1° La pression normale du liquide sur la portion considérée (pression hydrostatique) et qui a pour expression $p\sigma\sigma'$, *p étant la pression hydrostatique par unité de surface;*

Fig. 75.



2° Les actions exercées par le reste de la membrane sur l'élément de surface considéré.

Pour qu'il y ait équilibre, il faut que toutes les forces qui agissent sur cet élément aient une résultante normale égale à zéro, c'est-à-dire que l'on ait

$p\sigma\sigma'$ = projections des forces sur la normale.

Évaluons la résultante qui doit faire équilibre à $p\sigma\sigma'$.

Le long de AB, nous avons une force tangente à la surface, proportionnelle à la longueur σ de l'arc AB; cette force sera $A\sigma$; elle représente la tension, et sa projection sur la normale est $A\sigma\cos\alpha$, α représentant l'angle de cette force avec la normale en O.

Or, nous avons

$$\cos\alpha = \text{sin de l'arc MO}.$$

Considérons le cercle osculateur en O, dont le centre est en N; son rayon est $ON = R'$ et nous aurons, en confondant l'arc MO avec la perpendiculaire abaissée de M sur ON,

$$\cos\alpha = \frac{\text{arc}\,\overline{MO}}{\text{rayon de courbure}}, \qquad \cos\alpha = \frac{1}{2}\,\frac{\sigma'}{R'},$$

nous obtiendrons la même valeur pour le côté CD et pour les deux autres côtés. Nous écrirons, par suite,

$$p\sigma\sigma' = A\frac{\sigma\sigma'}{R'} + A\frac{\sigma\sigma'}{R},$$

d'où nous tirons

$$p = A\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

Donc, si la surface libre d'un liquide se comporte comme une membrane tendue, la connaissance de la pression en un point se déduira de la connaissance de la constante A et des rayons de courbure principaux au point considéré, R et R'.

La constante A, qui est, par définition, la *tension superficielle*, s'appelle aussi la *constante capillaire* du liquide étudié; ses dimensions sont celles d'une force par unité de longueur. Elles sont donc exprimées par la formule

$$\tau = MT^{-2}.$$

La condition que nous venons d'obtenir est nécessaire : elle n'est pas suffisante. Il faut, en effet, que la somme des projections sur une droite quelconque soit nulle. Prenons la tangente et projetons sur MT. Les tensions le long de AB, CD se projettent en vraie grandeur; elles doivent être les mêmes en AB et CD. Donc $A = \text{const.}$, car, s'il y avait une variation dans la valeur de A, une des conditions d'équilibre ne serait pas satisfaite.

Il y a des cas où cette condition ne l'est pas. Alors, la surface garde la même forme, mais glisse sur elle-même, sous l'influence des forces tangentielles. Prenons, par exemple, une goutte de mercure placée dans l'eau acidulée et laissons tomber sur le mercure un cristal d'acide chromique. On s'assure aussitôt que la surface n'est plus immobile en constatant l'existence d'un mouvement tourbillonnant qui entraîne le petit cristal. Le phénomène ainsi produit est forcément limité par l'oxydation de la surface. On peut aussi amener dans l'eau acidulée deux électrodes qui arrivent tout près de la surface du mercure mais sans la toucher : les tourbillons se produisent alors indéfiniment.

Telle est la théorie de la tension superficielle : elle a l'avantage d'être d'une grande simplicité et de conduire rapidement à la démonstration de la formule de Laplace. L'illustre mathématicien avait procédé autrement et était parti de l'hypothèse que l'attraction moléculaire ne peut pas s'exercer au delà d'une certaine distance ε; par

suite les molécules susceptibles d'être attirées par une autre molécule sont comprises à l'intérieur d'une sphère ayant cette dernière comme centre et ε comme rayon; c'est la *sphère d'attraction moléculaire.*

Nous ne suivrons pas Laplace dans ses calculs : toutefois, nous pensons qu'il est intéressant de résumer ici la théorie proposée par Gauss, et qui a pour point de départ le principe des vitesses virtuelles.

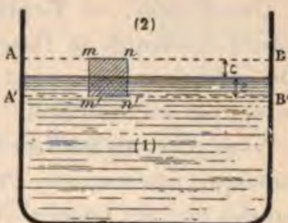
78. — THÉORIE DE GAUSS.

Gauss considère une masse liquide comme composée de points matériels entre lesquels agissent des forces diminuant rapidement avec la distance; or il suppose que ces forces soient fonctions de la distance. Il existe alors une *fonction des forces* Ω telle que ses variations soient égales au travail des forces qui modifient l'état du système. On a donc

$$d\varpi = d\Omega.$$

Cela posé, considérons, par exemple, un liquide dans un vase (*fig.* 76); menons deux surfaces AB, A'B' équidistantes de sa surface libre, de telle façon que leur distance à cette dernière soit toujours égale à ε, rayon de la sphère d'attraction moléculaire. Nous aurons alors trois régions : l'une (1) tout à fait intérieure, l'autre (2) tout à fait extérieure, et enfin la région de séparation (σ) comprise entre AB et A'B'.

Fig. 76.



Tous les termes de Ω relatifs à (1) sont en nombre égal à celui des molécules : leur nombre sera donc proportionnel au nombre total des molécules, c'est-à-dire au volume considéré, et ils se grouperont en termes de la forme $a_1 V_1$, a_1 étant un coefficient convenable. On aurait de même, pour un second liquide, un terme $a_2 V_2$.

Considérons maintenant, dans la région de séparation, un volume élémentaire $mnm'n'$ ayant pour base l'unité de surface : il fournira à Ω certains termes, $A_{1,2}$; un second volume fournirait un terme identique; donc la région (σ) fournira une somme de la forme $A_{1,2} S_{1,2}$, $S_{1,2}$ étant l'aire de la surface de séparation des milieux (1) et (2). Si l'on considérait un troisième milieu (3) et une surface $S_{2,3}$

qui le sépare du milieu (2) on aurait un terme de la forme $A_{2,3}S_{2,3}$. De sorte que l'expression de Ω sera

$$\Omega = a_1 V_1 + a_2 V_2 + \ldots + A_{1,2} S_{1,2} + A_{2,3} S_{2,3} + \ldots.$$

C'est donc une fonction linéaire.

Différentions les deux membres : en admettant l'incompressibilité des liquides, qui entraîne comme conséquence la constance des termes V_1, V_2, ..., il reste simplement

$$d\Omega = \sum A\, dS.$$

La *formule de Gauss* sera donc

$$d\mathfrak{T} = \sum A\, dS.$$

Dans le cas particulier où il n'y a qu'un seul liquide et une seule surface, cette formule se réduit à

$$d\mathfrak{T} = A\, dS, \tag{1}$$

A étant une constante, et dS la déformation de la surface liquide, A est le travail nécessaire pour que la surface liquide varie de 1^{cm^2}. Sa valeur est numériquement égale à celle du coefficient de Laplace.

Corollaires. — Reprenons l'équation (1), et supposons que les forces agissantes se fassent de part et d'autre équilibre entre elles. On aura alors $d\mathfrak{T} = 0$, et, par suite, $dS = 0$, et la surface doit alors passer par un minimum.

Nous pouvons réaliser ce cas et en déduire une conséquence géométrique intéressante. Prenons un cadre en fil de fer réalisant une courbe *gauche* fermée, et plongeons-le dans du liquide *glycérique* : nous retirerons une lamelle liquide qui formera une surface gauche; la pression atmosphérique P s'exerçant sur ses deux faces, nous serons dans le cas de l'équilibre stable; nous aurons donc $dS = 0$, la surface est minimum; mais, si nous appliquons la formule de Laplace

$$P - p = A\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right),$$

en y faisant $P = p$, nous en déduisons

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = 0.$$

Nous démontrons donc *physiquement* ce théorème de Géométrie

analytique à trois dimensions : *toute surface telle que* $\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}=0$ *est une surface minimum.*

Une démonstration simple de ce théorème a été donnée par M. Bertrand.

79. — IDENTITÉ DES FORMULES DE LAPLACE ET DE GAUSS.

Nous avons établi deux formules distinctes pour représenter les phénomènes capillaires : la formule de Gauss

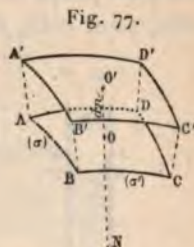
$$d\mathfrak{T} = A\,dS, \tag{1}$$

et celle de Laplace

$$P - p = A\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right). \tag{2}$$

Nous allons montrer qu'on peut passer de l'une à l'autre, et que *la constante* A *est numériquement la même dans les deux cas.*

Fig. 77.



Partons, par exemple, de la formule (2). La différence de pression est $P-p$, rapportée à l'unité de surface, et, sur la surface $\sigma\sigma'$ (*fig.* 77), elle sera $(P-p)\sigma\sigma'$. Supposons que cet élément ABCD se déplace de dn sur la normale. Le travail sera exprimé par

$$d\mathfrak{T} = (P-p)\sigma\sigma'\,dn,$$

ou, remplaçant $P-p$ par sa valeur tirée de la formule (2),

$$d\mathfrak{T} = A\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)\sigma\sigma'\,dx,$$

ce que l'on peut écrire

$$d\mathfrak{T} = A\left(\frac{\sigma}{R}\sigma'+\frac{\sigma'}{R'}\sigma\right)dn,$$

$$d\mathfrak{T} = A\,\frac{d\sigma}{dn}\,dn\,\sigma'+\frac{d\sigma'}{dn}\,dn\,\sigma,$$

$$d\mathfrak{T} = A(\sigma'\,d\sigma+\sigma\,d\sigma'),$$

$$d\mathfrak{T} = A\,d(\sigma\sigma'),$$

et, pour la surface entière,

$$d\mathfrak{T} = A\,dS;$$

nous retombons donc sur la formule de Gauss, avec le coefficient A.

En suivant l'ordre inverse, on pourrait partir de la formule de Gauss et arriver à celle de Laplace.

Ce coefficient A, qu'on appelle la *constante capillaire,* a une valeur spéciale pour chaque liquide et est fonction de la température. Sa connaissance permet de mesurer la force dans certains cas où l'on ne pourrait pas le faire autrement. Par exemple, si nous considérons une goutte liquide aplatie entre deux lames solides, le travail nécessaire aura pour expression la surface de la goutte aplatie multipliée par A.

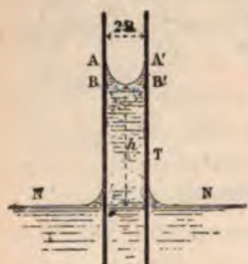
80. — LOI DE JURIN.

L'expérience montre qu'un liquide s'élève dans un tube fin dont il mouille les parois. Il est facile, en partant de nos formules, de rendre compte de ce phénomène.

Soit un tube T (*fig.* 78). S'il est assez étroit, nous pouvons admettre que le ménisque liquide AA' ait la forme hémisphérique.

Exerçons sur la colonne AA' une pression qui en fasse baisser le niveau jusqu'en BB' et appliquons la formule $d\mathfrak{T} = A\, dS$: il nous suffit, pour cela, de chercher l'expression de dS. Or, nous avons un ménisque hémisphérique; ce ménisque reste semblable à lui-même. Seule la portion cylindrique qui mouille la paroi s'allonge; on a donc, en désignant par dh la variation de hauteur du liquide soulevé,

Fig. 78.



$$dS = 2\pi R\, dh,$$

et par suite

$$d\mathfrak{T} = 2A\pi R\, dh.$$

D'autre part, $d\mathfrak{T}$ est le travail d'une certaine pression qui a comme valeur p par unité de surface. Sur la surface du ménisque, elle a comme expression $p\pi R^2$, et le travail est $p\pi R^2\, dh$. Nous aurons donc, en égalant les deux valeurs de $d\mathfrak{T}$,

$$2A\pi R\, dh = p\pi R^2\, dh,$$

d'où nous déduisons

$$p = \frac{2A}{R} = hd.$$

C'est la LOI DE JURIN : *les hauteurs d'un même liquide soulevées dans des tubes capillaires différents sont en raison inverse dse diamètres dc ees tubes.*

Si nous étions partis de la formule de Laplace

$$p = A\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$$

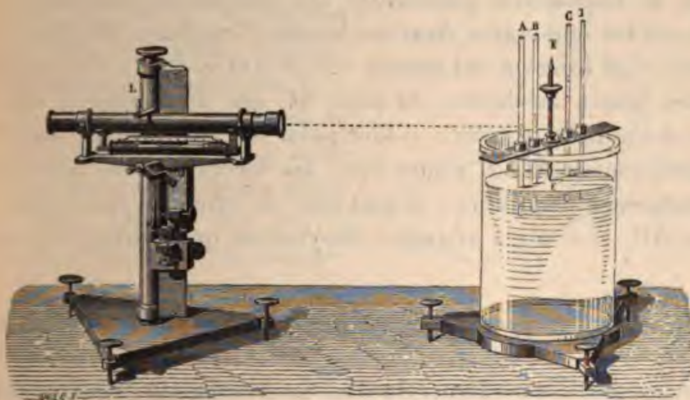
(remarquons que, dans ce cas, R et R' sont égaux tous deux au rayon R du tube, puisque nous supposons le ménisque hémisphérique), il viendrait

$$p = A\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right) = \frac{2A}{R},$$

et nous retrouverions ainsi la loi de Jurin.

Cette loi a été vérifiée expérimentalement, pour la première fois, par Gay-Lussac, qui déterminait à l'aide d'une sorte de cathétomètre les hauteurs soulevées dans des tubes de diamètres différents. La figure 79 représente l'ensemble de la disposition expérimentale qu'il avait adoptée, et qui se comprend sans explication.

Fig. 79.



Remarquons immédiatement que, dans un système mixte formé de parties liquides et solides, tout ce qui ne varie pas est indifférent au point de vue de l'équilibre. Ainsi, si nous prenons un tube T (*fig.* 80) à la paroi intérieure duquel soit fixé un corps quelconque a invariable, le corps a dont le volume est constant n'interviendra pas dans la différentiation et ne modifiera pas la hauteur h du liquide soulevé dans le tube par capillarité. Cette hauteur ne dépend absolument que du diamètre terminal du tube en AB, et nullement du volume dilaté ou rétréci des portions inférieures. Ainsi, dans un vase de la forme de

celui dessiné sur la figure 81, le liquide restera soulevé jusqu'en A, à la même hauteur que si le tube avait, sur toute sa longueur, le diamètre qu'il a en A.

Fig. 80.



Fig. 81.

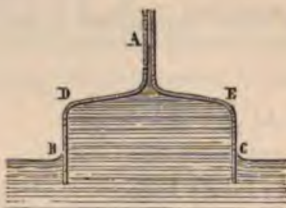
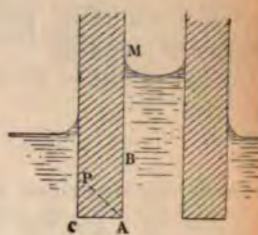


Fig. 82.



Ceci montre combien était inexacte la conception des anciens physiciens, de Laplace en particulier, qui admettaient tout le long des parois solides immergées dans un liquide l'existence de *forces soulevantes*. Ces forces n'ont aucune raison d'être, car, si l'on admet de pareilles forces au-dessus du plan AC qui détermine la base des parois des tubes (*fig.* 82), il faut aussi les admettre le long de la paroi horizontale AC. Il y aura donc des forces latérales horizontales qui rétabliront l'équilibre : le seul plan de symétrie est le plan bissecteur AP, et il n'y a vraiment dissymétrie qu'à partir du point M.

81. — ANGLE DE RACCORDEMENT.

Tout ce que nous venons de dire est absolument général et s'applique non seulement à la surface libre, mais encore à la surface de séparation de deux liquides. Toutefois il y a, dans le cas où plusieurs liquides sont en contact, des points de la surface particulièrement intéressants : ce sont ceux qui sont le long d'une surface terminale. Déposons, par exemple, une goutte d'huile sur de l'eau, elle prendra une forme lenticulaire (*fig.* 83), et, si nous considérons un point du bord, A, ce point sera commun à trois milieux et sera l'intersection des surfaces (1, 2)

Fig. 83.



(1, 3), (2, 3), en désignant par (1, 2) la surface de séparation des milieux (1) et (2).

Les angles que font entre eux les trois plans tangents en A, ou *angles de raccordement,* obéissent à une loi très simple qui est la suivante :

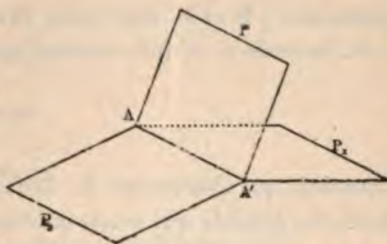
Loi des angles de raccordement. — Si $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{1,3}$, $\alpha_{2,3}$ désignent les angles des plans tangents aux surfaces terminales et $A_{1,2}$, $A_{1,3}$, $A_{2,3}$ les constantes capillaires correspondant aux milieux désignés par les indices, on a la relation

$$\frac{\sin \alpha_{1,2}}{A_{1,2}} = \frac{\sin \alpha_{1,3}}{A_{1,3}} = \frac{\sin \alpha_{2,3}}{A_{2,3}};$$

autrement dit, *si l'on construit le triangle ayant pour côtés les trois constantes capillaires, les angles de raccordement seront les angles de ce triangle.*

Considérons en effet, le long du contour terminal, un élément AA' assez petit pour pouvoir être regardé comme rectiligne (*fig.* 84). Nous aurons alors trois surfaces planes P, P_1, P_2 se raccordant suivant AA'. Ces lames liquides ont des tensions respectives $A_{1,2}$, $A_{1,3}$, $A_{2,3}$, appliquées au milieu de AA'. On est donc ramené à composer trois forces appliquées en un même point. Or, on sait que la condition d'équilibre est précisément que les trois forces forment les trois côtés d'un triangle ayant pour angles les angles que les forces font entre elles.

Fig. 84.



On conclut de là que, si l'on ne peut pas former de triangle avec les trois forces, l'équilibre est impossible. C'est ce qui arrive quand on met de l'eau absolument pure sur du mercure absolument pur : elle s'y étale indéfiniment.

La conclusion de ce qui précède est que les angles de raccordement de plusieurs liquides entre eux sont parfaitement déterminés par la nature même de ces liquides.

Angles de raccordement d'un liquide et d'un solide. — On appelle aussi *angle de raccordement* l'angle d'une paroi avec le plan tangent au ménisque, mené par le point de contact. L'angle, dans ce

cas, n'est pas déterminé aussi nettement que dans le cas du contact des liquides entre eux; ainsi on l'a mesuré pour le mercure et le verre : le résultat varie entre 31° et 47°. Il change d'ailleurs selon que le ménisque termine une colonne montante ou descendante.

Nous verrons plus loin comment on peut, par des procédés optiques, mesurer cet angle de raccordement.

Les méthodes qui servent à déterminer expérimentalement la constante A consistent à réaliser des équilibres capillaires.

82. — DÉTERMINATION EXPÉRIMENTALE DE LA CONSTANTE CAPILLAIRE.

1° **Méthode des tubes.** — Dans le cas où le liquide mouille le verre, la méthode la plus simple consiste à appliquer la loi de Jurin et à mesurer directement la hauteur de liquide soulevée dans un tube fin; h étant la hauteur et d la densité du liquide, on a

$$hd = A\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

Quand le tube est très fin et bien mouillé, le ménisque est hémisphérique : R et R' sont alors égaux tous deux au rayon r du tube, et la formule se réduit, comme nous l'avons vu, à

$$hd = \frac{2A}{r},$$

équation qui détermine A. Il faut toutefois corriger la pression poids du liquide qui serait contenu dans la calotte sphérique form[ée] par le ménisque si l'on prend la hauteur jusqu'au cercle de raccor[de]ment du liquide avec le tube.

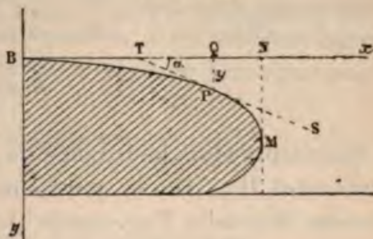
Ce procédé réalise le type d'une méthode sensible, mais peu p[ré]cise : sensible, parce qu'en prenant des tubes très fins on peut av[oir] des ascensions très considérables connues très exactement; peu p[ré]cise, parce que l'angle de raccordement, supposé nul, ne l'est [pas] toujours rigoureusement; et parce que le mouillage du tube n'est [pas] toujours parfaitement réalisé. Les premiers expérimentateurs [ont] obtenu, de ce chef, des erreurs montant à plus de 50 pour 100.

La méthode s'applique d'ailleurs plus difficilement encore [aux] liquides qui ne mouillent pas les parois solides avec lesquelles [ils] sont en contact, comme, par exemple, le mercure sur le verre : au[ssi] a-t-on eu recours à d'autres procédés pour mesurer la consta[nte] capillaire du mercure, si importante à connaître.

2° **Méthode de la large goutte.** — Posons une goutte de mercure sur un plan de verre : elle ne s'y étale pas à la façon d'une goutte d'eau, mais se ramasse en un globule déprimé, ayant la forme d'une surface de révolution. Nous supposerons le rayon du cercle équatorial de ce globule assez grand pour qu'on puisse le considérer comme infini relativement aux rayons de courbure des points voisins du bord.

Traçons donc (*fig.* 85) le profil de la goutte; par le point le plus haut, B, menons une section méridienne et prenons pour axes de coordonnées la tangente Bx et la normale By. Si nous considérons un point P et que nous décrivions autour de ce point un élément de surface dont l'aire soit égale à l'unité, la pression y sera $p = y\Delta$, Δ étant la densité du mercure. D'autre part, l'un des rayons de courbure en P étant très grand, nous négligerons son inverse; l'équation de Laplace se réduit alors à

Fig. 85.



$$y\Delta = \frac{A}{R},$$

ou, en posant $k = \frac{\Delta}{A}$,

$$(1) \qquad ky = \frac{1}{R},$$

R étant le rayon de courbure de la courbe méridienne en P.

Soit α l'angle de la tangente ST au point P avec l'axe des x; on a

$$R\,d\alpha = ds,$$

$$\frac{1}{R} = \frac{d\alpha}{ds},$$

ou, d'après (1),

$$ky = \frac{d\alpha}{ds},$$

$$ky\,ds = d\alpha.$$

Or, on a

$$ds \sin\alpha = dy,$$

donc

$$ky\,dy = \sin\alpha\,d\alpha.$$

Intégrons, il vient

$$\frac{1}{2}ky^2 = -\cos\alpha + \text{const.};$$

la constante est égale à l'unité. Nous avons donc

$$1 - \cos\alpha = \frac{1}{2} k y^2 = \frac{1}{2} \frac{\Delta}{A} y^2$$

ou enfin

$$y = \frac{\sqrt{2A}}{\sqrt{\Delta}} \sqrt{1 - \cos\alpha}.$$

C'est l'équation de la courbe méridienne : elle nous montre que nous aurons A, à condition de déterminer, pour un même point, y et α.

En particulier, si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, nous avons simplement

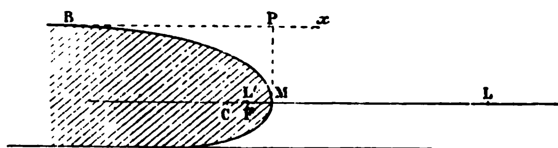
$$h = \sqrt{\frac{2A}{\Delta}};$$

h représente alors la distance du point M au-dessous du plan tangent horizontal Bx. De la précision avec laquelle cette distance sera connue dépendra l'exactitude de la valeur obtenue pour A.

Méthode de M. Lippmann. — La difficulté de la mesure réside dans la détermination exacte du point M. Voici la méthode employée par M. Lippmann en 1886.

Plaçons un point lumineux L (*fig.* 86) à peu près dans le plan

Fig. 86.



équatorial de la goutte : celle-ci faisant, en ce point, l'effet d'un miroir convexe donnera un point lumineux L', très petit, au point F, milieu de son rayon de courbure; la surface étant de révolution, ce point L' donnera naissance à une petite ligne brillante, située dans le plan CL passant par M. On visera cette ligne au cathétomètre; on visera ensuite le plan horizontal supérieur : la différence des cotes fera connaître h.

Cette méthode est précise, et la hauteur du point brillant peut être connue avec beaucoup d'exactitude. En effet, le rayon de courbure en M est, en moyenne, de $1^{mm},5$; la distance focale sera par suite $0^{mm},75$. On voit donc que, si le point L est à une distance de 1^m et que l'on se trompe de 1^{mm} sur la cote du plan dans lequel on l'a

placé, le déplacement correspondant de L′ sera moindre que $0^{mm},001$. Le plan horizontal passant par M est donc connu avec précision.

Pour viser le niveau supérieur, il ne fallait pas songer à apprécier le point équidistant d'un point et de son image vue par réflexion; quelque grand que soit le rayon de courbure de la goutte au sommet, il n'est jamais infini et *l'image n'est jamais symétrique de l'objet*. M. Lippmann a posé sur la goutte un fil de verre de moins de $\frac{1}{20}$ de millimètre d'épaisseur; ce fil déprime la surface de mercure de $\frac{1}{7}$ de son épaisseur environ, soit moins de $0^{mm},01$. On peut viser exactement ce fil, moyennant un éclairement convenable; il est suffisant quand on voit la surface coïncider avec le fil A titre de renseignement, disons que h est égal à 2^{mm} ou 3^{mm}.

M. Lippmann a trouvé ainsi pour le mercure

$$A = 48,$$

en prenant comme unités le millimètre et le milligramme.

Mesure de l'angle de raccordement. — La méthode optique ne nous fournit pas un moyen très précis de déduire de l'expérience de la large goutte la valeur de l'angle de raccordement du mercure et du verre.

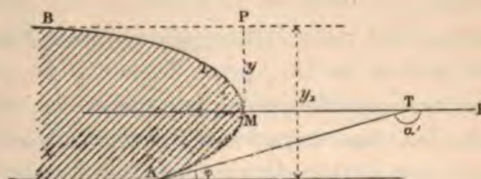
Nous avons vu que l'on avait, en général,

$$y = \sqrt{\frac{2A}{\Delta}}\sqrt{1-\cos\alpha},$$

α étant l'angle de la tangente à la courbe méridienne, au point considéré, avec l'axe des x.

Or, par l'expérience faite pour la fixation du point M (*fig.* 87), pour lequel $\alpha = \frac{\pi}{2}$, nous connaissons déjà la valeur du radical $\sqrt{\frac{2A}{\Delta}}$. Nous avons de plus, en appelant y_1 la distance verticale qui sépare le sommet de la goutte de son plan de base,

Fig. 87.



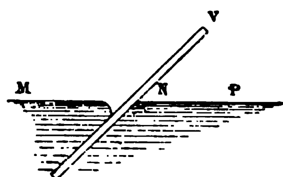
$$y_1 = \sqrt{\frac{2A}{\Delta}}\sqrt{1-\cos\alpha'},$$

α' étant le supplément de l'angle de raccordement; nous tirerons de

là la valeur de $\cos\alpha'$ et, par suite, la valeur de l'angle φ que nous cherchons.

Nous rappellerons ici pour mémoire la méthode donnée par Terquem pour mesurer l'angle de raccordement : on incline peu à peu une lame plongée dans du mercure (*fig.* 88). Il arrive un moment où la portion de surface liquide située dans l'angle aigu VNP est horizontale dans toutes ses parties : l'angle VNP, c'est-à-dire l'angle de la lame, avec le plan horizontal, est alors égal à l'angle de raccordement cherché; comme la lame V peut être fixée à un limbe gradué, on peut ainsi mesurer cet angle assez exactement.

Fig. 88.



Valeur numérique de la constante capillaire (par rapport à l'air).

	Unités		
	mill., milligr., secondes.	C.G.S.	Observateurs.
Eau	8,4	81	Quincke.
Acide sulfurique....	6,0	58,8	Quincke.
Mercure	48,0	470,4	Lippmann.
Alcool.............	2,4	24,5	Quincke.

La constante capillaire diminue en général quand la température s'élève; M. Wolf, par des expériences d'une remarquable précision, a déterminé exactement cette variation. L'addition de substances salines ou acides ne modifie guère la valeur de A pour un liquide donné; mais il n'en est plus de même si l'on ajoute de l'alcool ou de l'éther : la valeur de la constante est fortement diminuée. La faible valeur de A pour l'éther (16, en unité C.G.S.) explique que, si l'on fait arriver de la vapeur d'éther à la surface d'un liquide, on en modifie immédiatement la tension superficielle. Ainsi, si, dans un tube fin, dans lequel une colonne liquide est soulevée, on *verse* de la vapeur d'éther, le liquide baisse du tiers de sa hauteur; si, à droite d'un bain de liquide saupoudré de lycopode sur sa surface, on verse de la vapeur d'éther, on voit la poudre refluer sur la gauche.

Cette étude de la capillarité nous montre que ce sont ses lois qui régissent, dans le cas général, l'équilibre des liquides. Ce n'est que dans le cas où le liquide considéré est très loin de ses parois qu'on peut appliquer les raisonnements de l'Hydrostatique et que les conséquences auxquelles elle conduit sont vérifiées par l'expérience.

IV. — ÉQUILIBRE ET ÉLASTICITÉ DES GAZ.

83. — PRESSION ATMOSPHÉRIQUE.

La Terre est entourée d'une couche d'air dont l'épaisseur nous est inconnue; nous vivons, d'après la très pittoresque expression de Torricelli, submergés au fond d'un océan d'air; cette masse fluide, pesante, qui constitue l'*atmosphère*, exerce à la surface des corps une pression qui a pendant très longtemps passé inaperçue.

La pesanteur de l'air, admise par Aristote, fut démontrée en 1638 par Galilée; son expérience consiste à peser un ballon d'abord plein d'air, pris dans l'atmosphère, puis rempli d'air comprimé, et à observer une augmentation de poids.

Otto de Guéricke, en 1672, après avoir inventé la machine pneumatique, donna de cette propriété une démonstration en suivant une marche inverse; il constatait la diminution de poids qu'éprouve un ballon, lorsque, après l'avoir pesé plein d'air, on le pèse à nouveau après y avoir fait le vide.

Le principe de Pascal, le principe d'Archimède doivent être applicables, avec toutes leurs conséquences, à l'atmosphère, puisqu'elle est constituée par un fluide pesant.

Le premier de ces deux principes de la statique des fluides permet d'interpréter très facilement toute une série d'expériences, dont la plus importante est l'expérience de Torricelli, et dont l'ensemble constitue l'histoire de la découverte de la *pression atmosphérique*.

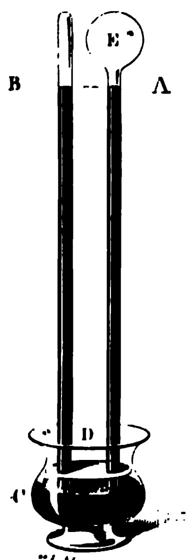
84. — EXPÉRIENCE DE TORRICELLI.

On remplit de mercure des tubes de verre de 1^{m} de long, fermés à un bout; on les bouche avec le doigt et on les retourne sur une cuve à mercure (*fig.* 89); on voit aussitôt le mercure descendre et se fixer à une hauteur d'environ 76^{cm} au-dessus de la surface libre du mercure de la cuve, et cela dans tous les tubes, quelle que soit leur forme.

Torricelli affirma que l'espace resté libre au-dessus du mercure était *vide* de toute matière et comprit que le poids de l'air devait être la cause qui soutenait le mercure dans le tube; et, en effet, considérons, dans le plan horizontal qui passe par la surface libre du mercure dans la cuve, deux éléments de surface d'égale étendue; ils

doivent, puisqu'il y a équilibre, supporter des pressions égales; si l'un d'eux est pris dans l'intérieur du tube, sa pression est mesurée par le poids d'une colonne de mercure de 76^{cm} de hauteur, dont la base est égale à la surface de l'élément; si le second est en dehors du tube, il ne peut supporter d'autre pression que celle qui provient du poids d'une colonne d'air ayant même base que la précédente et s'élevant jusqu'aux limites de l'atmosphère. Cette expérience est donc qualitative et quantitative; elle prouve l'existence et donne une mesure de la pression atmosphérique, de là le nom de *baromètre* donné plus tard au tube de Torricelli. C'est bien un baromètre que le savant italien pensait avoir construit; il dit, en effet, qu'il a fait cette expérience, « non pas pour faire simplement le vide, mais pour avoir un instrument qui pût indiquer les changements de l'air, tantôt plus lourd et plus épais, tantôt plus léger et plus subtil »; mais il croyait avoir échoué dans son but principal : « le niveau, dit-il, change pour une autre cause à laquelle je ne me serais pas attendu, par le froid et le chaud ».

Fig. 89.



Les fontainiers de Florence avaient, longtemps auparavant, signalé ce fait « qu'il n'était pas possible, ni avec les pompes, ni avec les autres machines qui font monter l'eau par attraction, de la faire monter un cheveu plus haut que dix-huit brasses ». La théorie précédente, appliquée à ce cas particulier, montre en effet qu'une colonne d'eau de $10^{m},33$ environ fera équilibre à la pression atmosphérique; les pompes sont donc impuissantes à soulever l'eau à un niveau supérieur à celui-là. Galilée, en discutant cette expérience, avait conclu « qu'il en arriverait de même pour d'autres liquides, comme le vif-argent, le vin, l'huile, etc.; ils monteraient à une hauteur plus ou moins grande que dix-huit brasses, en proportion inverse de leur pesanteur spécifique comparée à celle de l'eau, en mesurant ces hauteurs toujours verticalement ».

Torricelli, en s'inspirant de cette remarque de Galilée, conçut l'idée de l'expérience que nous avons décrite et qui fut exécutée, vers 1644, par son élève Viviani.

85. — EXPÉRIENCES DE PASCAL.

Ces expériences furent reprises par Pascal dès 1646; dans une série d'essais faits à Rouen, il vérifia l'exactitude des idées de Galilée et de Torricelli, en construisant des baromètres avec du mercure, de l'eau, du vin, de l'huile. Enfin, pour savoir si la pesanteur de l'air est la cause de la suspension du mercure dans le tube, il imagina une expérience qui fut exécutée le 19 septembre 1648, par son beau-frère Périer, au haut et au bas du Puy de Dôme.

Voici la très curieuse lettre qu'il écrivit à ce sujet à Périer :

« Je travaille... à chercher des expériences qui fassent voir si les effets que l'on attribue à l'horreur du vide doivent être véritablement attribués à cette horreur du vide, ou s'ils doivent l'être à la pesanteur et pression de l'air; car, pour vous ouvrir franchement ma pensée, j'ai peine à croire que la nature, qui n'est point animée ni sensible, soit susceptible d'horreur, puisque les passions présupposent une âme capable de les ressentir. J'ai imaginé de faire l'expérience ordinaire du vide plusieurs fois en un même jour, dans un même tuyau, avec le même vif-argent, tantôt au bas, tantôt au sommet d'une montagne, élevée pour le moins de cinq ou six cents toises. Vous voyez déjà sans doute que cette expérience est décisive de la question, et que, s'il arrive que la hauteur du vif-argent soit moindre au haut qu'au bas de la montagne, il s'ensuivra nécessairement que la pesanteur et pression de l'air est la seule cause de cette suspension du vif-argent et non pas l'horreur du vide, puisqu'il est bien certain qu'il y a beaucoup plus d'air qui pèse sur le pied de la montagne, que non pas sur son sommet; au lieu qu'on ne saurait dire que la nature abhorre le vide au pied de la montagne plus que sur son sommet. »

Le niveau du mercure s'élevait, dans les deux baromètres destinés aux mesures, observés dans le jardin des Minimes à Clermont, à 26 pouces 3 lignes et demie; l'un d'eux étant transporté à 500 toises de hauteur sur le Puy de Dôme, il ne resta plus que la hauteur de 23 pouces 2 lignes de mercure.

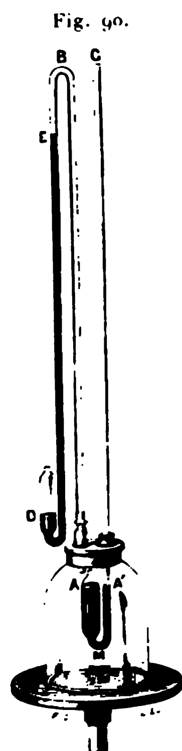
L'expérience fut répétée à Clermont même, en haut et en bas de la plus haute tour de la cathédrale.

Pascal la refit lui-même au haut et au bas de la tour Saint-Jacques-de-la-Boucherie et enfin dans l'escalier d'une maison particulière haut de 90 marches.

On peut répéter dans les laboratoires une expérience très simple, dont l'idée est due à Pascal qui la nommait *l'expérience du vide dans le vide*. L'intérêt qu'elle présente provient de ce qu'elle fait comprendre comment on peut mesurer la pression ou force élastique d'une masse gazeuse.

Une cloche M (*fig.* 90), mise sur la platine d'une machine pneumatique, porte deux baromètres à siphon; la chambre à air A de l'un et la chambre à vide B de l'autre communiquent avec l'intérieur de cette cloche dans laquelle on fait le vide; on observe que le niveau du mercure est en A dans les deux branches du premier, et qu'il existe dans l'autre une dénivellation de 76^{cm}. Vient-on à laisser rentrer l'air dans le récipient, le niveau s'élève dans le tube C et descend dans le tube B. A chaque instant l'air exerce en A une pression qui doit être équilibrée en A' par une colonne de mercure; et aussi à chaque instant la somme des pressions exercées d'une part par l'air dans le tube E et par la colonne de mercure soulevée au-dessus du niveau D doit faire équilibre à la pression atmosphérique qui s'exerce sur cette surface libre.

Fig. 90.



86. — PRESSION ATMOSPHÉRIQUE: FORCE ÉLECTRIQUE DES GAZ.

La pression atmosphérique, et d'une façon plus générale la force élastique, d'un gaz, c'est-à-dire la pression qu'il exerce sur l'unité de surface, est le quotient d'une force par la surface sur laquelle elle s'exerce; ses dimensions sont donc, comme nous l'avons déjà vu, $p = L^{-1}MT^{-2}$; la force élastique doit donc, dans le sytèmes C.G.S., être exprimée en dynes par centimètre carré.

La pression atmosphérique étant supposée représentée à Paris, dans un baromètre à 0°, par une colonne de mercure de 76^{cm} de hauteur, son expression est

[illegible] dynes = [illegible]166 × 10⁶;

c'est donc sensiblement [illegible] × 10⁶, c'est-à-dire une *mégadyne par centimètre carré*; aussi a-t-on proposé de donner à la mégadyne, qui correspond à Paris à une colonne de mercure à 0° de $74^{cm},978$,

le nom de *atmosphère* C. G. S.; on l'appelle aussi une *barie*.

On peut se proposer de calculer quelle est la hauteur de la colonne d'air prise à 0° et sous la pression de 76^{cm} de mercure à Paris au niveau du sol, la densité absolue de l'air étant prise égale à 0,001293, qui ferait équilibre à une pression exprimée par un millimètre de mercure; l'expression de cette pression est

$$p = 1 \times 0^{cm},1 \times 13,596 \times g = 1 \times 0,001293 \times x \times g,$$

d'où

$$x = \frac{1,3596}{0,001293} = 1051^{cm}.$$

Il suffit donc d'élever un baromètre d'environ 10^{m} à partir du sol pour observer une dénivellation de 1^{mm}.

Les physiciens ont l'habitude d'exprimer les pressions ou forces élastiques en millimètres de mercure à 0°; on conçoit très bien que, les pressions étant mesurées au cathétomètre, on soit tenté d'inscrire directement dans les Tables le résultat immédiat de la lecture; en un même lieu et à température constante, ces hauteurs sont proportionnelles aux pressions; soient en effet deux pressions p et p' auxquelles correspondent des dénivellations de mercure à 0°, h et h', en un lieu où l'accélération de la pesanteur est g, on a

$$p^{d} = 1 \times h \times 13,596 \times g,$$

et

$$p'^{d} = 1 \times h' \times 13,596 \times g;$$

d'où

$$\frac{p}{p'} = \frac{h}{h'}.$$

Il n'en est pas moins vrai que ces pressions ainsi exprimées n'ont plus la même signification aux différents points du globe, puisque le poids spécifique absolu du mercure change; il vaudrait mieux que l'observateur prît la peine de transformer lui-même sa lecture en unités absolues, au lieu d'exiger que ce travail soit répété par tous les lecteurs qui auront à faire des comparaisons de pressions.

Les ingénieurs expriment les pressions en kilogrammes par centimètre carré; la pression atmosphérique moyenne est alors exprimée par

$$p^{g} = 1 \times 76 \times 13,596 = 1033^{g},3,$$

c'est-à-dire $1^{kg},0333$; cette expression varie aussi avec la pesanteur; pour un lieu où la pesanteur est g', elle doit être multipliée par $\frac{g'}{g}$,

g étant la pesanteur à Paris. Il n'est pas inutile de remarquer que, à 3 pour 100 près, *l'expression numérique d'une pression est la même en kilogrammes par centimètres carrés ou en atmosphères.*

On convient de ramener toutes les observations barométriques au niveau de la mer et à la latitude de 45°; or les hauteurs des colonnes de mercure sont inversement proportionnelles aux valeurs de g dans les lieux d'observation; si Δ_0 est la masse spécifique, X la hauteur cherchée et γ l'accélération due à la pesanteur à 45°, au niveau de la mer, H la hauteur lue et g l'accélération dans une station à la latitude λ et à un niveau h, on a

$$X \Delta_0 \gamma = H \Delta_0 g$$

et, comme on a

$$g = \gamma(1 - 0,00255 \cos 2\lambda - 0,0000000314\, h),$$

il vient

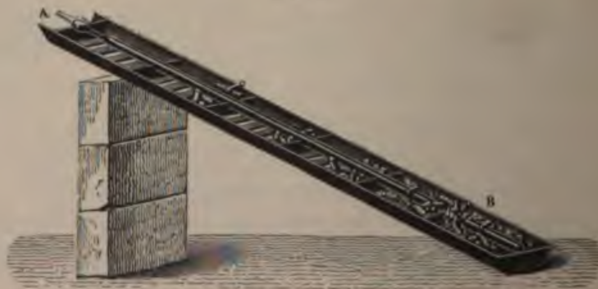
$$X = H(1 - 0,00255 \cos 2\lambda - 0,0000000314\, h).$$

87. — BAROMÈTRE NORMAL.

On appelle *baromètre normal* un tube de Torricelli destiné aux mesures précises de la pression atmosphérique à poste fixe dans un laboratoire.

La construction de cet instrument de précision diffère notablement de celle des baromètres ordinaires; pour ceux-ci, on se contente (*fig.* 91) de prendre un tube de 10^{mm} à 15^{mm} de diamètre,

Fig. 91.



fermé par un bout, soudé par l'autre à une ampoule, de le laver et de le sécher; puis on le place plein de mercure sec, à peu près pur, sur un gril incliné à environ 30°, où l'on fait bouillir le mercure en le chauffant à l'aide de charbons rouges, progressivement du bas vers

le haut, par sections d'environ 10^{cm}; on laisse refroidir, on détache l'ampoule et, bouchant le baromètre, bien plein, avec le doigt, on le retourne sur une cuve.

Le tube du baromètre normal doit avoir de 30^{mm} à 40^{mm} de diamètre, pour que la surface du ménisque présente vers son centre une surface circulaire à l'abri de la dépression capillaire que déterminent les parois du tube; le tube doit être choisi exempt de stries et de bulles qui produiraient pendant la lecture des erreurs de réfraction; il faut le laver, aux acides, à la potasse, à l'alcool, enfin à l'eau et le sécher; sa longueur doit être de 1^{m} environ, une de ses extrémités est fermée, l'autre est étirée au diamètre de 1^{cm} et soudée à un ballon qui porte deux tubulures (*fig.* 92) : l'une effilée à son extrémité en un tube capillaire est fermée, l'autre munie d'un robinet

Fig. 92.



permettra de faire communiquer le baromètre à une trompe à mercure.

On a reconnu qu'il y avait de graves inconvénients à faire bouillir le mercure; il se forme toujours des oxydes dont on ne peut pas se débarrasser, aussi doit on de préférence prendre du mercure pur, tel qu'il provient de la mine, si l'on peut être certain de son origine, ou adopter pour sa purification le procédé de Stas; on met 1^{kg} ou 2^{kg} de mercure dans une capsule en porcelaine, on couvre le métal d'une couche de quelques millimètres d'acide azotique étendu et l'on fait passer 24 heures à l'étuve à 60°; il se forme une solution d'azotate de mercure d'où le mercure est à la longue partiellement précipité par tous les métaux qui constituent les impuretés et qui disparaissent totalement; on trouve à la surface du métal une couche solide cris-

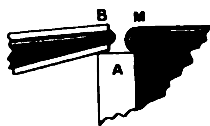
tallisée d'azotates mélangés; le mercure est filtré et séché dans l'acide sulfurique.

On en verse plusieurs kilogrammes dans une capsule, de préférence en fer, et on le porte à 120° sur un fourneau; le tube peu incliné repose sur un gril où, avec quelques charbons, on le maintient à 120°; on fait le vide plusieurs fois, en laissant chaque fois rentrer de l'hydrogène pur et sec; enfin on brise la pointe p, le mercure monte lentement; le remplissage doit durer environ 2 heures, pendant lesquelles on pousse activement le vide à la trompe; le mercure chaud ne contient plus de vapeur d'eau; s'il emporte encore un peu d'azote ou d'oxygène dissous, il les abandonne soit à la surface C, soit à la surface A, ou pendant qu'il descend à l'état de globule sur la paroi du tube.

Quand l'appareil est presque entièrement plein jusqu'au robinet r, on ferme ce dernier et on laisse refroidir; puis on coupe le tube en B dans la partie étirée.

Il faut avoir soin de ne pas toucher le tube et bien se garder de le fermer avec le doigt toujours humide et gras. La cuvette est en fer: on la remplit de mercure sec et pur de façon que les bords soient couverts de mercure formant un ménisque; on approche l'extrémité du tube barométrique, soutenu dans les deux mains qui l'échauffent : il se forme par dilatation une goutte de mercure qui vient rejoindre le mercure de la cuve (*fig.* 93); à cet instant on retourne rapidement le tube; on fixe le tout solidement contre un pilier vertical.

Fig. 93.



88. — LECTURE DU BAROMÈTRE; CORRECTIONS.

Sur le bord de la cuve est fixée une tige en fer filetée terminée par deux pointes dont la distance est connue; la pointe inférieure est amenée exactement au contact du mercure; la pointe supérieure sert aux visées avec le cathétomètre.

La lecture faite sur ce cathétomètre supposé réglé doit être corrigée des effets de la température, qui sont de deux sortes :

Soit la longueur l lue sur la règle de cuivre à $t°$ et qui a été graduée à 0°; si λ est son coefficient de dilatation, chacune des divisions vaut en réalité $(1+\lambda t)$ et par suite les l divisions valent $l(1+\lambda t)=H$. La colonne de mercure de longueur H est à une température t indiquée par un thermomètre placé à moitié hauteur du baromètre et

dont le réservoir plonge dans un tube d'une dizaine de centimètres de haut, formé d'un bout du même tube que le baromètre et plein de mercure. Soit H_0 la hauteur d'une colonne de mercure à 0° qui ferait équilibre à la même pression; soient d_t et d_0 les poids spécifiques du mercure à $t°$ et 0°; on a évidemment

$$H_0 d_0 = H\,dt,$$

et comme

$$d_0 = (1 + mt)\,dt$$

on a

$$H_0 = \frac{H}{1 + m_t}.$$

La hauteur à 0° doublement corrigée est donc

$$H_0 = l\,\frac{1 + \lambda t}{1 + mt}.$$

Pour les calculs on adopte la formule suffisamment exacte

$$H_0 = l[1 - (m - \lambda)t].$$

Il existe des Tables à double entrée qui font connaître le produit $l(m - \lambda)t$ (λ du laiton).

Ce nombre H_0 exprime la pression réduite à 0° en millimètres ou centimètres; nous avons vu plus haut comment on peut l'exprimer en dynes, ou réduire l'observation au niveau de la mer et à la latitude de 45°.

Fig. 94.



89. — BAROMÈTRE DE FORTIN.

Le baromètre de Fortin est un instrument portatif à cuvette; il est à échelle fixe, le mercure est dans la cuvette à un niveau constant pendant les lectures. La cuvette DD en verre est montée sur un tube de buis MN (*fig.* 94); le fond en est formé par une peau que l'on peut élever ou abaisser à l'aide d'une vis Q qui prend appui dans un écrou placé au fond d'un cylindre protecteur de laiton EFGHBC; ce cylindre n'enveloppe que le bas et le haut de la cuvette, laissant visible la partie moyenne où se trouvera le niveau du mercure; des tiges CH relient les deux parties de la monture.

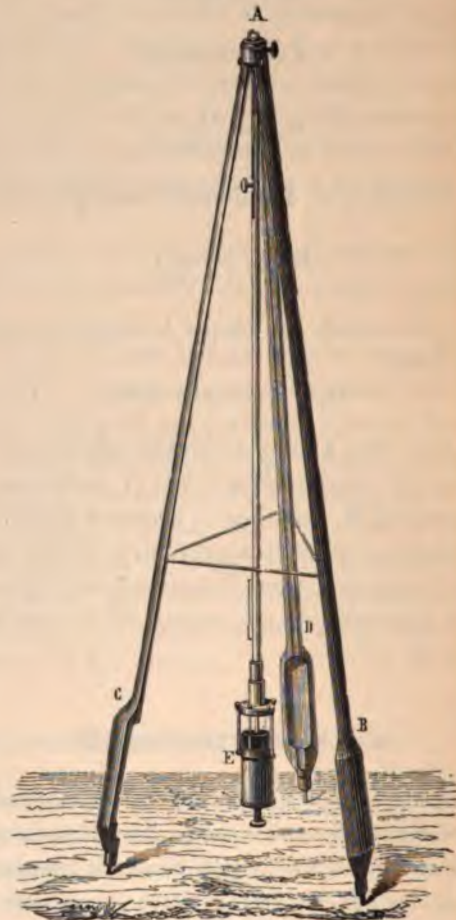
La garniture métallique supérieure est percée d'une ouverture

cylindrique destinée à laisser passer le tube barométrique; ell partout doublée intérieurement de buis; le tube de verre pré un étranglement sur lequel est fixée, par une ligature serrée, une de gant qui vient en dehors se fixer par une seconde ligature s

Fig. 95.



Fig. 96.



tube de buis; le tout constitue une fermeture hermétique pour le cure, tandis que l'air passe à travers les pores de la peau pour t mettre la pression à l'intérieur de la cuve.

Le tube barométrique est protégé sur toute sa longueur pa cylindre de laiton percé sur presque toute sa hauteur de deux fen opposées; sur le bord de l'une d'elles, taillée en biseau, est une

duation en millimètres dont le o est l'extrémité inférieure d'une pointe A d'ivoire fixée au couvercle de la cuvette. Un curseur peut glisser sur le tube; il est entaillé de deux fenêtres dont les bords supérieurs sont dans un même plan horizontal; on l'amène, à l'aide d'une crémaillère, dans une position telle que le rayon visuel qui se trouve dans ce plan soit tangent au ménisque du mercure (*fig.* 95); la lecture est très simple, parce que le o du vernier au $\frac{1}{20}$ tracé sur le bord vertical de la fenêtre coïncide avec ce même plan horizontal.

Pour transporter l'appareil, on fera remonter la vis jusqu'à remplir toute la cuve d'abord, puis le tube barométrique de mercure; on peut alors l'incliner, le coucher même, et le loger dans un étui en cuir; pour faire une observation, on soutiendra le baromètre verticalement, par une simple ficelle passée dans l'anneau de la monture, ou à l'aide d'une suspension à la Cardan, portée par un trépied (qui peut servir de caisse à l'appareil) (*fig.* 96). On détourne la vis jusqu'à amener le niveau du mercure dans le plan de la pointe d'ivoire et l'on procède à la lecture; un thermomètre fixé sur la tige fera connaître la température qu'il est nécessaire de connaître pour les corrections.

Fig. 97.



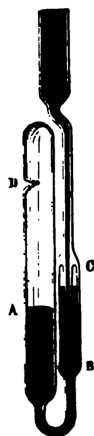
90 — BAROMÈTRES DE GAY-LUSSAC ET DE BUNTEN.

Gay-Lussac fit connaître en 1816 un baromètre portatif à siphon plus simple et plus léger (*fig.* 97). Voici comment on le construit : on prend un tube d'environ un mètre de long que l'on coupe en deux morceaux d'inégale longueur; on les réunit par un tube capillaire de 2^{mm} de diamètre intérieur au plus et l'on ferme la grande branche en A; on remplit alors comme d'ordinaire le baromètre de mercure que l'on fait bouillir; on ne laissera ensuite du mercure que jusqu'en G et l'on courbera le tube capillaire de façon à amener sur une même ligne les axes des tubes larges; en redressant le tube on le réglera de façon que, renversé dans la position 2, le mercure occupe la partie CBFA du tube et que l'excédent logé en D soit très petit; enfin, on fermera la courte branche et l'on fera en E, à la lampe à émailleur, un trou capillaire qui permette à l'air d'entrer dans la cuvette et par lequel le mercure ne puisse s'échapper. Lorsque l'appareil est renversé, l'air ne peut, malgré les

secousses, arriver à séparer la colonne BGF et à rentrer dans la partie large du tube. Il suffit de le retourner pour qu'il se prête immédiatement à l'observation.

Bunten a proposé une modification qui rend l'accès de l'air tout à fait impossible; le tube de jonction est de forme irrégulière; il présente un réservoir (*fig.* 98) de plus large diamètre C, dans lequel plonge le tube capillaire ouvert en B; si une bulle parvenait jusqu'en B, elle viendrait en longeant les parois du tube se loger en C, et non pas dans la chambre barométrique.

Fig. 98.



On enferme ces baromètres dans un premier tube de laiton qui porte une fente longitudinale sur une partie de sa longueur, et qui est lui-même recouvert par un autre tube qui peut tourner à frottement doux sur le premier et qui est aussi fendu pour laisser voir la colonne de mercure ou la cacher suivant que les fentes des deux coïncident ou non.

Une graduation est tracée sur le tube intérieur et deux verniers, portés sur des anneaux, peuvent glisser sur les tubes vers les surfaces libres du mercure et faire connaître la différence de ces niveaux.

Les erreurs de capillarité que l'on pouvait espérer annuler, puisque les tubes ont même diamètre, existent néanmoins parce qu'il se forme une couche d'oxyde à la surface du mercure qui a le contact de l'air et parce que l'un des ménisques termine une colonne ascendante, tandis que l'autre termine une colonne descendante; ils deviennent alors très différents.

91. — BAROMÈTRE STATIQUE.

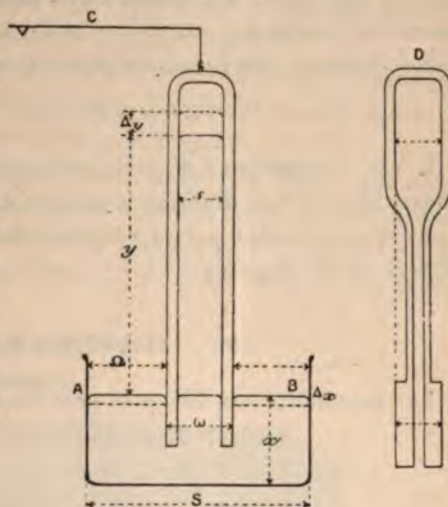
Le baromètre statique, dont l'origine est presque aussi ancienne que celle du baromètre ordinaire, repose sur un double principe : le principe de Pascal combiné avec celui d'Archimède. L'invention de cet appareil est due à Samuel Morland, elle date de 1670; c'est un tube de verre suspendu au bras court d'un levier dont le bras long parcourt un arc divisé; le tube plonge dans une cuvette cylindrique; les variations de la pression, et par suite les variations de la colonne de mercure soulevée, le font monter et descendre; et la pointe du levier indique ces mouvements sur la division.

Magellan en 1782, le P. Secchi en 1857 le perfectionnèrent et en firent le baromètre enregistreur ou barographe.

Nous supposerons, pour étudier un cas simple, le baromètre suspendu à un fléau de balance, sans cesse maintenu horizontal par des poids convenables, et nous montrerons que la variation ΔM de ces poids est proportionnelle à la variation ΔH de la pression et que l'on peut ainsi en quelque sorte peser les variations de la pression atmosphérique.

Le mercure (*fig.* 99) s'élève à une hauteur y au-dessus du niveau AB, et le tube plonge d'une longueur x lorsque la pression est H; s'il se produit une variation positive ΔH le niveau s'élève de Δy dans le baromètre et baisse de Δx dans la cuve, de telle façon que

Fig. 99.



$$\Delta H = \Delta y + \Delta x. \tag{1}$$

Si l'on appelle s la section intérieure du baromètre, ω sa section extérieure, Ω la section annulaire de la cuve, S sa section totale ($S = \Omega + \omega$), on a, en écrivant que le mercure monté dans le baromètre provient de la cuve,

$$s\,\Delta y = \Omega\,\Delta x. \tag{2}$$

Sous la pression H la tare de la balance doit faire équilibre à des forces positives ou négatives qui sont : 1° le poids du tube qui restera toujours constant; 2° la poussée de l'air qui est très sensiblement invariable; 3° le poids de mercure soulevé P; 4° la poussée supportée par la partie du tube immergée Q. Pour la variation ΔH de la pression, P et Q subissent des variations qui sont respectivement

$$\Delta P = s\,\Delta y\,D, \tag{3}$$

$$\Delta Q = \omega\,\Delta x\,D, \tag{4}$$

D désignant le poids spécifique du mercure.

La variation totale de poids est donc

$$\Delta M = \Delta P + \Delta Q; \tag{5}$$

éliminons entre ces cinq relations ΔP, ΔQ, Δx et Δy, il vient

$$\Delta M = s\,D\,\frac{S}{\Omega + s}\,\Delta H,$$

la variation de poids est donc proportionnelle à la variation de pression.

En écrivant

$$\Delta M = D\,\frac{S}{\frac{\Omega}{s} + 1}\,\Delta H,$$

on voit que, si s augmente, le dénominateur $\frac{\Omega}{s} + 1$ diminuant, la fraction et, par suite, ΔM augmentent pour une même valeur de ΔH; la sensibilité augmente en même temps que la section de la chambre barométrique : elle lui serait proportionnelle si l'on avait

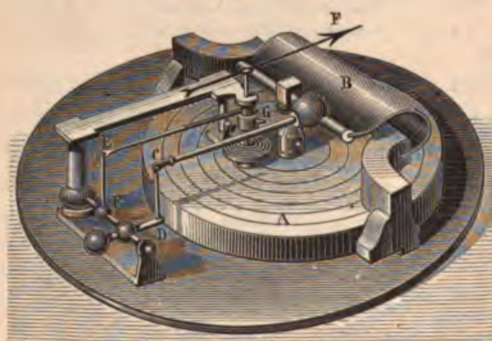
$$\Omega + s = S \qquad \text{ou} \qquad \omega = s.$$

Il est à remarquer d'autre part que la sensibilité de la balance augmentera si l'on diminue le poids total soutenu. Les diverses conditions sont réalisées par la construction d'un tube dont la forme est figurée en D (*fig.* 99).

92. — BAROMÈTRES MÉTALLIQUES.

Les baromètres métalliques sont fondés sur les variations de forme que fait éprouver la pression atmosphérique à des caisses (Vidie, 1844) ou des tubes (Bourdon, 1849) métalliques, à parois minces, dans lesquels on a fait le vide.

Fig. 100.



L'organe essentiel de l'appareil de Vidie (*fig.* 100) est une caisse métallique dont le couvercle, formé d'une couche mince, est plissé; en son centre est un pilier qui transmet ses mouvements à un puissant ressort B et à des leviers dont le dernier E est fixé à une chaîne enroulée sur un treuil G, dont l'axe porte l'aiguille indicatrice F. Un ressort spiral

antagoniste maintient la chaîne toujours tendue, et par suite l'aiguille dans une position convenable.

Ces appareils ont besoin d'être fréquemment contrôlés par des comparaisons au baromètre normal; il se produit en effet une altération incessante dans la forme de la boîte.

Ces appareils sont par construction compensés, relativement à la température; d'après une remarque de M. Fizeau, ils mesurent les variations de pression indépendamment de la gravité; il se prêtent donc presque sans corrections à la mesure des hauteurs par le baromètre; mais ils doivent être réservés pour les faibles différences de niveaux; ils conduiraient en effet à des erreurs très graves, par suite des retards d'élasticité du métal, si les pressions auxquelles ils sont soumis variaient rapidement entre de grandes limites.

Il serait, par exemple, absolument ridicule de chercher à contrôler avec un baromètre anéroïde les altitudes des grands massifs montagneux, déterminées par les opérations géodésiques.

M. Richard a donné aux appareils de Vidie une forme qui augmente leur sensibilité en les rendant enregistreurs; ils se composent de plusieurs boîtes qui se transmettent, par des piliers qui les séparent, les déplacements de leurs fonds (*fig.* 101); de cette manière,

Fig. 101.



ces déplacements s'ajoutent, et les variations du dernier pilier sont transmises à une aiguille qui enregistre la pression sur un tambour

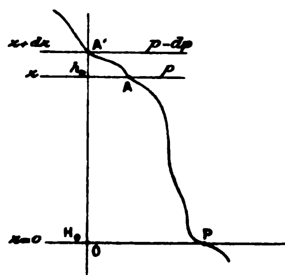
auquel un mouvement d'horlogerie fait faire un tour entier en une semaine.

93. — FORMULE DE HALLEY.

Mesure des hauteurs par les observations barométriques. — L'expérience faite au Puy de Dôme montre que le baromètre se prête à la mesure de la différence des niveaux de deux postes d'observation.

Considérons dans l'air deux tranches horizontales (*fig.* 102) à hauteur z et $z + dz$ où les pressions exprimées en poids sont p et $p - dp$; la variation $-dp$ représente le poids d'une colonne d'air de base 1, de hauteur dz et de poids spécifique a

Fig. 102.



$$(1) \qquad -dp = a\,dz.$$

Imaginons les points assez voisins pour que nous puissions admettre que la température, l'état hygrométrique, l'intensité de la pesanteur restent constants, la pression seule ayant changé, les poids spécifiques a_0 et a, à la base et au sommet de la colonne d'air, sont proportionnels aux pressions P et p et aux hauteurs barométriques observées réduites à 0°, H_0 et h_0, correspondantes,

$$(2) \qquad \frac{a}{a_0} = \frac{p}{P} = \frac{h_0}{H_0},$$

et par suite

$$-dp = \frac{a_0}{P} p\,dz;$$

donc

$$-\frac{dp}{p} = \frac{a_0}{P} dz$$

et en intégrant

$$\text{Log}\,p = -\frac{a_0}{P} z + \text{const.},$$

Log désignant un logarithme népérien. Remarquons que la constante est déterminée par la condition $p = P$ pour $z = 0$;

$$\text{Log}\,P = \text{const.},$$

par suite

$$(3) \qquad \text{Log}\,\frac{p}{P} = -\frac{a_0}{P} z$$

et

(4) $$p = \mathrm{P}\, e^{-\frac{a_0}{\mathrm{P}} z}.$$

On voit donc que : *Lorsque les hauteurs croissent en progression arithmétique les pressions décroissent en progression géométrique :* cette proposition a été établie par Halley. Elle fait connaître la distribution des pressions dans un tube de quelques mètres de hauteur où l'air est à température constante. On déduit de l'équation (3) la valeur de z

$$z = \frac{\mathrm{P}}{a_0} \operatorname{Log} \frac{\mathrm{P}}{p},$$

et en passant aux logarithmes ordinaires ($\mathrm{M} = 0,434295$)

(5) $$z = \frac{1}{\mathrm{M}} \frac{\mathrm{P}}{a_0} \log \frac{\mathrm{P}}{p} = \frac{1}{\mathrm{M}} \frac{\mathrm{P}}{a_0} \log \frac{\mathrm{H}_0}{h_0}.$$

94. — FORMULE DE BABINET.

En remplaçant M, P et a_0 par leurs valeurs, l'unité de longueur étant le mètre, on peut écrire

(6) $$\frac{1}{\mathrm{M}} \frac{\mathrm{P}}{a_0} = \frac{0^{\mathrm{m}},760 \times 13,596}{\mathrm{M} \times 0,0012974} = 18400^{\mathrm{m}}$$

ou

(7) $$z = 18400^{\mathrm{m}} (\log \mathrm{H}_0 - \log h_0).$$

A cette formule on peut en substituer une autre sans logarithmes.

Admettons que la densité de l'air soit égale à la densité moyenne x sous la pression $\frac{\mathrm{P}+p}{2}$, on aura

$$\frac{a_0}{\mathrm{P}} = \frac{x}{\frac{\mathrm{P}+p}{2}},$$

et par suite

$$\mathrm{P} = p + \frac{a_0}{\mathrm{P}} \frac{\mathrm{P}+p}{2} z;$$

d'où

$$z = 2 \frac{\mathrm{P}}{a_0} \frac{\mathrm{P}-p}{\mathrm{P}+p} = 2 \frac{\mathrm{P}}{a_0} \frac{\mathrm{H}_0 - h_0}{\mathrm{H}_0 + h_0},$$

et, d'après l'équation (6) qui donne $\frac{P}{a_0} = M \times 18400$,

$$z = 18400 \times 2M \frac{H_0 - h_0}{H_0 + h_0} = 16000 \frac{H_0 - h_0}{H_0 + h_0}. \tag{8}$$

C'est la formule de Babinet.

Pour tenir compte de la température, il faudrait multiplier a_0 par $\frac{1}{1+\alpha\theta}$; mais θ est une fonction inconnue de la hauteur; on mesure les températures t et t' aux deux stations et l'on en prend la moyenne comme expression de la température constante de la colonne; enfin, on remplace le coefficient 0,00366 de la dilatation des gaz par le coefficient 0,004 pour tenir dans une certaine mesure compte de l'état hygrométrique; la fraction devient alors

$$\frac{1}{1+\alpha\theta} = \frac{1}{1 + 0,004\,\frac{t+t'}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{2(t+t')}{1000}}.$$

La formule de Babinet s'écrit donc en définitive

$$z = 16000^m \frac{H_0 - h_0}{H_0 + h_0}\left[1 + \frac{2(t+t')}{1000}\right];$$

c'est celle qu'on emploie pour des différences de niveaux n'excédant pas quelques centaines de mètres.

95. — FORMULE COMPLÈTE.

En réalité, lorsque les différences de niveaux sont très grandes, le coefficient a dépend d'une foule de données physiques qu'il est à peu près impossible de connaître; l'équation (2) devient

$$\frac{a}{a_0} = \frac{p}{P}\,\frac{g}{G}\,\frac{1}{1+\alpha\theta},$$

g et G désignant la gravité aux deux stations; g et θ sont fonctions de z; la première est connue, la seconde ne l'est pas; enfin, cette formule ne tient pas compte de l'état hygrométrique.

En cherchant à résoudre ce problème plus général, Laplace a donné une formule applicable jusqu'à 9000^m et qui est la suivante :

$$z = \left[18336^m \log\frac{H}{h} - 1^m,2843(T - T')\right]\left[1 + \frac{2(t+t')}{1000}\right] \times \left(1 + \frac{2605}{10^6}\cos 2L + \frac{z + 15926}{6366198}\right)\left(1 + \frac{s}{3183099}\right);$$

elle suppose la connaissance des données :

	Station inf.	Station sup.
Hauteur du baromètre	H	h
Température du baromttre.............	T	T'
Température de l'air	t	t'

s, hauteur de la station inférieure au-dessus du niveau de la mer et L, latitude du lieu.

L'*Annuaire* publié chaque année par le Bureau des Longitudes donne, avec un exemple, des Tables qui facilitent les calculs.

96. — BAROSCOPE.

Le principe d'Archimède est applicable aux gaz; la résultante des pressions exercées par un gaz sur un corps qui s'y trouve plongé est une force égale et contraire au poids du gaz déplacé, et appliquée au centre de poussée.

L'existence de cette poussée de bas en haut est montrée par l'expérience du baroscope due à Otto de Guericke. Aux extrémités d'un fléau de balance sont soutenues deux sphères (*fig.* 103) : l'une, de grand diamètre, creuse; l'autre, plus petite, pleine; dans l'air, dans les conditions normales, elles se font équilibre.

Fig. 103.



Une diminution de pression, telle que celle que l'on obtient par exemple en portant l'appareil sous la cloche d'une machine pneumatique et en y faisant le vide, fait incliner le fléau du côté de la grosse boule; ce résultat est facile à comprendre, puisque la poussée subie de ce côté était plus grande que celle que supportait la boule pleine. Désignons par P, V, p et v les poids et volumes des boules; par a le poids spécifique de l'air; sous la pression H, à température constante, il y a équilibre; donc

$$(1) \qquad P - Va\frac{H}{76} = p - va\frac{H}{76} \qquad \text{ou} \qquad P - p = (V - v)a\frac{H}{76}.$$

Sous la pression H — ΔH l'excès de poids du côté de la grosse boule est

$$P - p - (V - v)a\,\frac{H - \Delta}{76},$$

ou, en tenant compte de (1),

$$(V - v) a \frac{\Delta H}{76}.$$

L'inclinaison α du fléau sera donnée par

$$\tang \alpha = \frac{la}{\pi d} \frac{V - v}{76} \Delta H;$$

cette tangente est proportionnelle à ΔH et peut lui servir de mesure. Le baroscope est aujourd'hui employé couramment dans l'industrie pour mesurer rapidement la densité de gaz dont on a de grandes quantités (acide carbonique, gaz d'éclairage, acétylène, etc.).

V. — COMPRESSIBILITÉ DES GAZ.

97. — LOI DE MARIOTTE.

Une propriété essentielle de la matière à l'état gazeux est sa gran compressibilité. Cette propriété caractéristique, connue depuis lon temps, fut étudiée pour la première fois au point de vue quantita par Robert Boyle (1662), en Angleterre, et par l'abbé Mariotte (1676 en France. C'est à ce dernier qu'est dû l'énoncé de la loi élémentai de la compressibilité des gaz et qui porte son nom :

A température constante, les volumes occupés par une mên masse de gaz sont en raison inverse des pressions supportées p ce gaz; ou, en d'autres termes, *les densités d'un gaz, à tempér ture constante, sont proportionnelles aux pressions.*

L'expression analytique de cette loi sera

$$\frac{V}{V'} = \frac{P}{P'}$$

ou

$$(1) \qquad VP = V'P' \quad \text{ou} \quad VP = \text{const.}$$

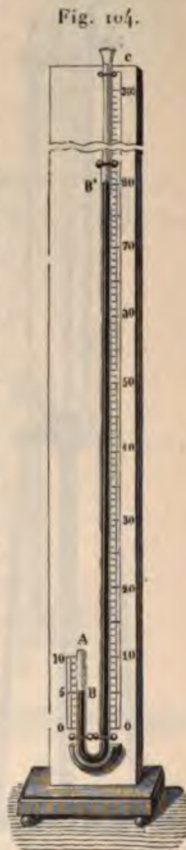
Cette dernière forme est particulièrement commode dans les ca culs sur les gaz; elle correspond à l'énoncé suivant de la loi :

A température constante le produit du volume d'une mas de gaz par la pression qu'elle supporte est constant.

Voici les dispositifs classiques institués par les physiciens pour vérifier cette loi :

1° Pressions supérieures à la pression atmosphérique. — Pour des pressions supérieures à la pression atmosphérique, on emploie un tube en U à branches inégales (*fig.* 104) dont la plus petite, calibrée et fermée, contient le gaz, et dont l'autre, graduée en hauteurs seulement, reçoit le mercure destiné à la fois à produire et à mesurer la pression. Cette dernière branche a environ $1^m,60$ de hauteur. On y verse du mercure jusqu'au niveau zéro, dans les deux branches, pour isoler en A la masse de gaz sur laquelle on veut opérer; ce premier résultat ne s'obtient pas sans quelques tâtonnements; il faut ajouter et enlever plusieurs fois du mercure par la grande branche pour obtenir enfin que les niveaux libres soient sur un même plan horizontal passant par les zéros; le gaz supporte à cet instant la pression atmosphérique. On verse ensuite du mercure dans la grande branche jusqu'à faire monter le niveau en B, dans la petite branche, où le volume du gaz se trouve réduit de moitié: dans le plan horizontal passant par la surface libre du mercure en B, des surfaces égales, prises dans ce liquide en équilibre, supportent des pressions égales; dans la petite branche cette pression mesure la force élastique du gaz; dans la branche de droite cette pression est représentée, d'une part, par le poids de la colonne de mercure *mesurée à partir de ce niveau* B jusqu'en B', et, d'autre part, par le poids de la colonne de mercure de même base mesurée sur un baromètre dont la cuvette est placée en B'.

Fig. 104.



L'expérience montre que ces deux colonnes ont même hauteur : la force élastique du gaz, lorsque son volume est réduit de moitié, est donc de deux atmosphères.

Ces expériences peuvent être poursuivies; mais il faut avoir bien soin de *mesurer les hauteurs des colonnes de mercure dans la grande branche, à partir du niveau libre du liquide dans la branche fermée;* on constate que la formule (1) est à peu près vérifiée, au degré de précision que l'appareil comporte.

2° Pressions inférieures à la pression atmosphérique. — Pour les

pressions inférieures à celle de l'atmosphère on laisse un peu d'air dans un tube de Torricelli gradué, à peu près plein de mercure, et on le retourne sur une cuve profonde (*fig.* 105) : on amène les niveaux libres dans le même plan, on lit le volume V occupé par la masse gazeuse sous la pression atmosphérique H; on soulève ensuite le tube sur lequel on lit le nouveau volume V' occupé par la masse gazeuse, en même temps que l'on note la hauteur h du mercure dans ce baromètre; la force élastique du gaz f augmentée de h fait équilibre à H; la relation (1) s'écrit donc

Fig. 105.



$$VH = V'(H - h),$$

elle est toujours vérifiée.

On remarquera que, si le volume du gaz devient n fois plus grand, la hauteur de la colonne de mercure soulevée est égale à $\frac{n-1}{n}H$.

98. — EXPÉRIENCES DE DESPRETZ ET DE POUILLET.

Malgré la grossièreté de ces mesures, c'est sur leurs résultats qu'on s'est appuyé pour affirmer, pendant un siècle et demi, l'exactitude de la loi de Mariotte dont la simplicité séduisait les savants. Des vérifications tout aussi primitives avaient été faites par Amontons, Muschenbroëk, Œrstædt et Swendsen, et tendaient d'ailleurs à la confirmer. C'est à Despretz (1827) que revient l'honneur d'avoir fait la première expérience différentielle précise.

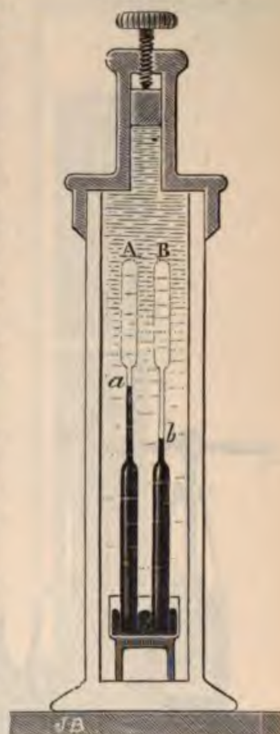
Aucune précaution n'était prise, dans les anciens appareils, pour assurer la constance de la température; cette condition est pourtant essentielle, comme le montre l'expression des lois réunies de Mariotte et de Gay-Lussac :

$$\frac{pv}{1 + \alpha t} = \text{const.};$$

le numérateur ne peut être étudié au point de vue de son invariabilité que si l'on assure au préalable celle du dénominateur.

Despretz prit deux tubes identiques A et B (*fig.* 106) contenant les deux gaz dont il voulait comparer les compressibilités. Au voisinage du sommet, deux parties capillaires formaient des étranglements destinés à rendre appréciables de très petites différences de volume quand les niveaux du mercure ascendant atteignaient cette région. Le tout était plongé dans une grosse éprouvette de verre à la partie supérieure de laquelle était mastiquée une garniture de cuivre portant un piston à vis. L'eau qui remplissait tout l'appareil servait à la fois à transmettre la pression fournie par le piston et à assurer la constance de la température autour des masses gazeuses soumises à l'expérience.

Fig. 106.



Dans l'un de ses tubes, Despretz mettait toujours de l'air; dans l'autre, il introduisait successivement divers gaz : anhydride sulfureux, ammoniac, cyanogène.

Il constata que tous ces gaz se comprimaient beaucoup plus vite que l'air et que cette différence de compressibilité était sensible, même à partir de 2^{atm}. Quant à l'hydrogène, après avoir, sensiblement jusqu'à 16^{atm}, eu la même compressibilité que l'air, il se comprima moins que lui à partir de cette pression.

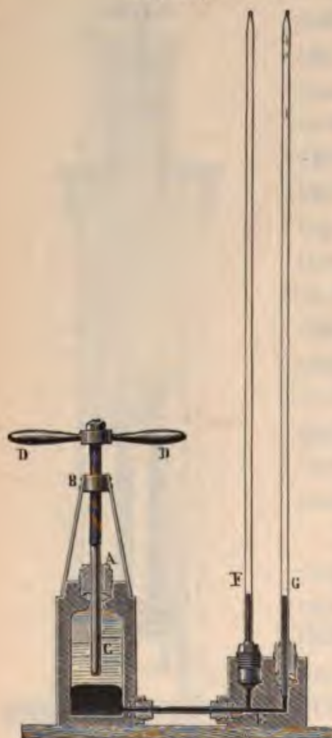
C'était là une observation d'une importance capitale. Si l'air suivait la loi, en tous cas les autres gaz ne la suivaient pas, et l'écart était de même signe pour tous, sauf pour l'hydrogène.

Telle est la part considérable, on le voit, de Despretz dans l'étude de la compressibilité des gaz. Ces résultats furent confirmés plus tard par Pouillet (1837), aussi à l'aide de la méthode différentielle, avec l'appareil représenté figure 109, et qui permettait d'étudier deux gaz à la fois jusqu'à environ 100^{atm}.

Deux longs tubes F, G, très résistants, de 2^{mm} de diamètre intérieur et 3^{mm} d'épaisseur, renfermant les gaz à comparer, sont mastiqués, à leur partie inférieure, dans des écrous qui les relient à une

monture métallique E, qui les fait communiquer avec un réservoir en fonte plein de mercure et d'huile; cette cuve est fermée à sa partie supérieure par un écrou A que traverse un piston plongeur C mis en mouvement au moyen des manettes D.

Fig. 107.



Les gaz alors appelés *permanents* semblèrent suivre jusque vers 100^{atm} la même loi de compressibilité que l'air; les autres gaz s'en écartaient sensiblement.

99. — EXPÉRIENCES DE DULONG ET ARAGO.

En 1829, l'Académie des Sciences, sur la demande du Gouvernement, nomma une Commission, composée de Dulong, Arago, de Prony et Girard, qui devait étudier les tensions maxima de la vapeur d'eau aux diverses températures. Dulong, qui en était le président, voulant se servir des manomètres à air comprimé pour mesurer ces tensions, fut d'abord conduit à étudier la compressibilité de l'air sous de hautes pressions.

L'appareil était un gigantesque tube de Mariotte (*fig.* 108). La branche ouverte était formée d'une série de tubes de cristal, longs chacun de 2^m, réunis par des jointures de cuivre et équilibrés séparément par des contrepoids; cette disposition laissait en outre au système la facilité de se dilater librement. Le tube fermé avait $1^m,70$ de longueur et était maintenu dans un manchon de verre, où circulait un courant d'eau à température constante; les deux branches étaient réunies par un tube horizontal de fonte.

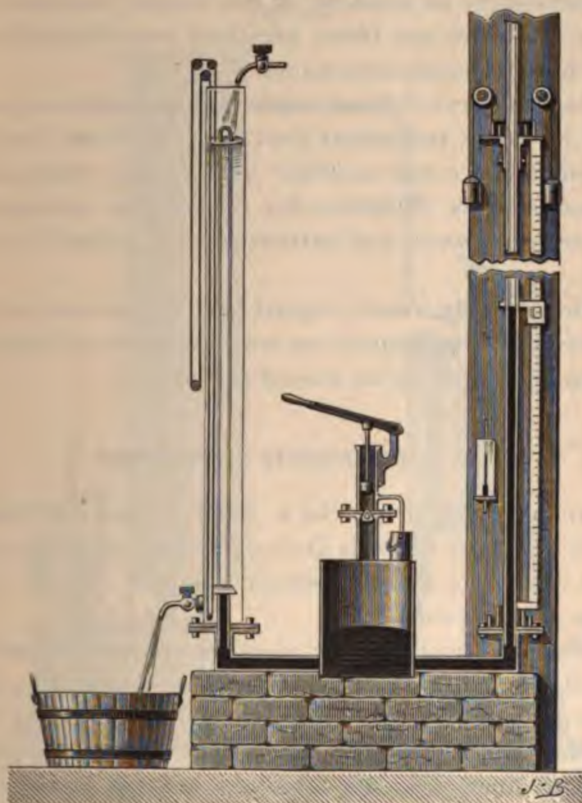
Sur ce tube se trouvait un réservoir cylindrique surmonté d'un corps de pompe plus petit. Le réservoir contenait du mercure que de l'eau, injectée par la pompe, refoulait dans les deux branches de l'appareil.

On comprimait jusqu'à ce que le volume du gaz fût réduit à $\frac{v}{2}$,

v étant le volume initial de la branche fermée; on mesurait la pression correspondante dans la branche ouverte; on comprimait encore pour réduire le volume à $\frac{v}{4}$, à $\frac{v}{8}$, ..., en mesurant chaque fois la pression correspondante.

En opérant ainsi, Dulong et Arago crurent pouvoir affirmer que,

Fig. 108.



jusqu'à 27^{atm}, pression limite qu'ils atteignirent, l'air suivait la loi de Mariotte, car ils attribuèrent aux erreurs d'expérience les légers écarts qu'ils observèrent.

Dulong n'eut pas le temps d'effectuer des expériences sur d'autres gaz; les appareils avaient été installés dans une tour carrée, enclavée dans le collège Henri-IV, et que la Commission des Bâtiments civils ne put laisser plus longtemps à sa disposition.

On voit immédiatement le point faible de cette méthode. Indé-

pendamment du manque d'étanchéité de la pompe foulante, on commettait sur la lecture du niveau, dans la branche fermée, une erreur absolue que l'on peut supposer constante : soit ε cette erreur. L'erreur relative de la première mesure est $\frac{\varepsilon}{v}$, celle de la seconde est $\frac{2\varepsilon}{v}$, celle de la $n^{\text{ième}}\,\frac{n\varepsilon}{v}$. L'erreur relative croît donc en raison inverse du volume occupé par le gaz comprimé, et elle devient plus grande précisément au moment où elle devrait être aussi faible que possible, c'est-à-dire aux fortes pressions pour lesquelles la valeur de l'écart doit être mieux déterminée.

Aussi Regnault crut-il devoir reprendre ses expériences et exécuta pour cela les belles recherches dont l'exposé, réuni sous le titre : *Sur la loi de la compressibilité des fluides élastiques*, forme le 6e Mémoire de la *Relation des expériences entreprises pour déterminer les données qui entrent dans le calcul des machines à vapeur*.

La lecture seule du travail original peut donner une idée du soin et de la précision avec lesquels ces recherches ont été faites; nous ne pouvons en donner ici qu'un résumé succinct.

100. — EXPÉRIENCES DE REGNAULT.

L'illustre physicien a cherché à éviter les deux causes d'erreur principales des expériences de Dulong. Il s'est, avant tout, préoccupé de rendre constante l'erreur relative commise dans la mesure du volume du gaz comprimé.

A cet effet, il prenait un tube ayant un volume déterminé V et y introduisait une masse de gaz sous pression connue P, puis il comprimait ce gaz jusqu'à réduire son volume à sa moitié. Si le gaz suit la loi de Mariotte, la pression finale sera $2P$; sinon, elle sera $2P \pm \varepsilon$. Il introduisait alors, dans son tube, une nouvelle masse de gaz jusqu'à le remplir entièrement sous une pression P_1 et, par une seconde compression, réduisait de moitié le volume de cette masse : la pression théorique devrait être $2P_1$; elle était $2P_1 \pm \varepsilon$, ..., et ainsi de suite.

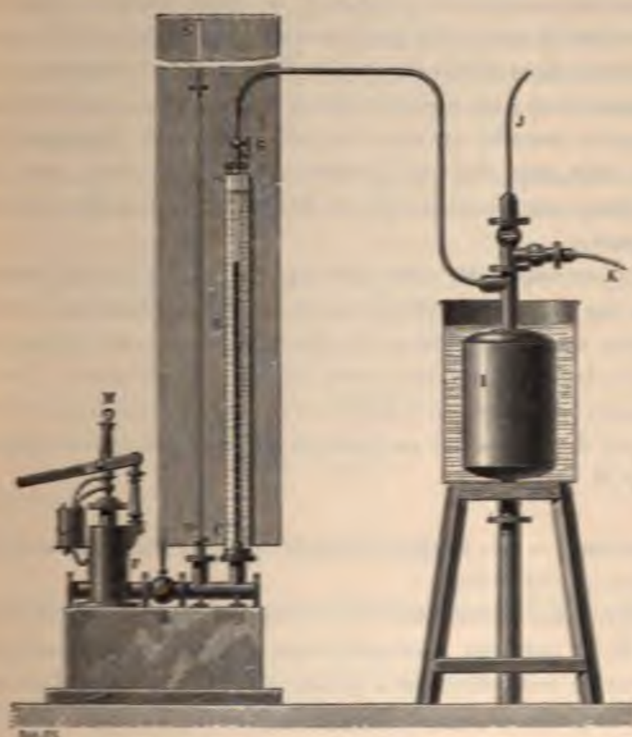
La pression initiale passait par une série de valeurs croissantes P, P_1, P_2, ..., et l'on comparait de la sorte, pour chacune de ces valeurs, la loi de compressibilité réelle du gaz à la loi de Mariotte.

De plus, comme le volume gazeux était toujours réduit à $\frac{V}{2}$ et que les lectures étaient faites par le même observateur, l'erreur relative

était constante dans l'évaluation du volume de gaz comprimé et indépendante de la valeur finale de la pression.

L'appareil employé par Regnault se composait (*fig.* 109) d'un tube à deux branches verticales, l'une fermée, ABC, de 3^m de longueur et d'une capacité de 1^l environ, l'autre ouverte, DE. Cette dernière avait 30^m de hauteur et consistait en une série de tubes de cristal, réunis entre eux par des montures d'acier serrées l'une contre

Fig. 109.



l'autre à l'aide du dispositif connu sous le nom de *collier à gorge*. Des étriers de cuivre maintenaient ces tubes, ainsi rendus solidaires, contre une série de madriers de sapin placés verticalement dans une tour du Collège de France et contre un mât vertical qui la continuait.

Le tube laboratoire ABC, dans lequel le gaz devait se comprimer, était entouré d'un manchon à circulation d'eau destiné à assurer l'invariabilité de sa température. Il communiquait, par un tube à robinet, G, avec un récipient I, contenant du gaz, très fortement

comprimé à l'aide d'une pompe spéciale, qui n'est pas représentée sur la figure 108.

Ce tube ABC était divisé en millimètres; on l'avait choisi aussi cylindrique que possible, et par des jaugeages au mercure on avait évalué, non seulement le volume total et le volume correspondant à la division médiane B, mais encore la valeur volumétrique des divisions voisines des deux traits B et C. On avait ainsi sur le tube deux groupes de traits correspondant à des capacités intérieures dont le rapport était sensiblement 1 à 2.

La grande branche se composait de deux parties : une portion comprise dans la tour, et la portion qui montait le long du mât. Sur la première étaient tracés des traits distants de 1^m environ, et qu'on avait repérés avec soin en mesurant leurs distances verticales avec un cathétomètre installé successivement à diverses hauteurs. Sur la seconde était une division millimétrique sur verre, que l'observateur, hissé sur un fauteuil parallèlement à l'échelle, pouvait lire directement.

Enfin, pour compléter cette description, disons que la pompe foulante M, au lieu d'être placée entre les deux branches, les laissait toutes deux du même côté et en était séparée par un robinet H travaillé spécialement pour tenir sous de hautes pressions. Une fois la compression effectuée, on fermait ce robinet et l'on n'avait plus à se préoccuper des fuites qui auraient pu provenir du piston plongeur de la pompe M.

Corrections. — Les lectures faites directement sur l'appareil doivent subir diverses corrections :

1° La pression de mercure dans la branche ouverte doit être augmentée de la pression atmosphérique à son sommet, pression que l'on déduit de celle observée à sa base par la formule de Babinet;

2° La colonne de mercure dans la branche ouverte doit subir la correction de température qui la ramène à zéro : à cet effet, on installait des thermomètres étagés le long du tube, et l'on notait leurs indications;

3° La compressibilité du mercure exigeait que l'on tînt compte de l'accroissement de densité des couches inférieures sous l'influence du poids des couches supérieures. Voici comment on effectuait cette correction. Dans des expériences préalables, Regnault avait mesuré le coefficient ϖ de compressibilité du mercure, c'est-à-dire la quantité dont se contracte un volume de mercure égal à l'unité sous un excès

de pression de 1^{m} de mercure; il avait trouvé

$$\varpi = 0,00000463.$$

Des expériences récentes (1889), dues à M. Amagat, ont conduit au nombre 0,0000039, qu'il est maintenant préférable d'employer dans des corrections de cette nature.

Appelons ρ_0 la densité normale du mercure sous la pression atmosphérique; considérons une section quelconque de cette colonne, égale à l'unité et placée à une distance z du plan horizontal dans lequel la pression est nulle; supposons que les pressions soient mesurées par les colonnes de mercure qui leur font équilibre, le mercure ayant la densité normale ρ_0. Si h représente la hauteur de la colonne de mercure normale qui fait équilibre à la pression au niveau z, la pression sera $\rho_0 h$.

Dans la section immédiatement inférieure correspondant à $z + dz$, la pression sera mesurée par $\rho_0(h + dh)$, et, par conséquent, la différence de pression entre les deux sections sera $\rho_0\, dh$; mais cette même différence est mesurée par le poids de la petite colonne de mercure de hauteur dz et ayant la densité ρ que le mercure compressible présente sous la pression h. On a donc

$$\rho_0\, dh = \rho\, dz;$$

d'où

$$dh = \frac{\rho}{\rho_0}\, dz;$$

on a d'ailleurs

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{1 - \varpi(h - 0,76)},$$

ϖ étant le coefficient de compressibilité du mercure. Par suite,

$$dh = \frac{1}{1 - \varpi(h - 0,76)}\, dz,$$

$$[1 - \varpi(h - 0,76)]\, dh = dz;$$

d'où, en intégrant,

$$h - \frac{\varpi}{2}(h - 0,76)^2 = z + \text{const.};$$

pour $z = 0$, on a $h = 0$. Donc

$$-\frac{\varpi}{2}(0,76)^2 = \text{const.}$$

et, par suite,

$$h\left[1 - \frac{\varpi}{2}(h - 1,52)\right] = z.$$

Comme ϖ est très petit et que h diffère très peu de z, on peut écrire

$$h = \frac{z}{1 - \frac{\varpi}{2}(z - 1,52)}.$$

Ainsi la correction $h - z$, qu'il convient d'apporter à chaque hauteur z observée, sera

$$h - z = \frac{\frac{\varpi}{2}(z - 1,52).z}{1 - \frac{\varpi}{2}(z - 1,52)},$$

ou simplement

$$h - z = \frac{\varpi}{2}(z - 1,52).z.$$

On voit que la correction de compressibilité est toujours très faible: pour

$$z = 10^{m}, \quad h - z = 0^{mm},19,$$

pour

$$z = 20^{m}, \quad h - z = 0^{mm},85,$$

et enfin pour

$$z = 25^{m}, \quad h - z = 1^{mm},356.$$

4° Il faut tenir compte des petites variations de température de l'eau qui baigne le tube laboratoire, et fait ainsi légèrement varier la force élastique du gaz comprimé. Un thermomètre très sensible permettait de noter ces variations, s'élevant au plus à $\frac{1}{10}$ de degré.

Regnault s'est demandé de plus si le tube laboratoire changeait de volume sous l'influence des fortes pressions : il s'est assuré par la mesure de la distance des deux traits A et C, qu'il a trouvée constante quelle que soit la pression, que le volume intérieur restait rigoureusement constant.

101. — RÉSULTATS.

Soient V_0, P_0 le volume et la pression primitifs, V_1 et P_1 le volume et la pression après la réduction du volume V à $\frac{V}{2}$. Si la loi de Mariotte s'appliquait au gaz soumis à l'expérience, on aurait toujours

$$\frac{V_0 P_0}{V_1 P_1} - 1 = 0;$$

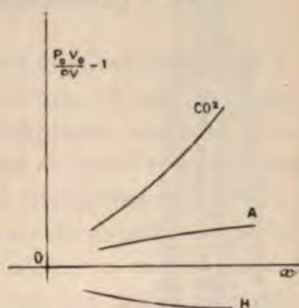
or, pour tous les gaz, sauf l'hydrogène, on a

$$\frac{V_0 P_0}{V_1 P_1} - 1 > 0;$$

les gaz, autres que l'hydrogène, se compriment donc plus que l'indique la loi, et l'excès augmente avec la pression. Pour l'hydrogène, l'excès est négatif, et son volume absolu augmente aussi avec la pression.

Regnault, pour représenter les résultats de ses expériences, exécuta une construction graphique; les pressions P_0 sont portées en abscisses, chaque division de l'échelle correspondant à un décimètre de mercure; les ordonnées sont les valeurs de $\frac{V_0}{V_1}\frac{P_0}{P_1}-1$; chaque division de l'échelle verticale correspond à 0,001.

Fig. 110.



Les courbes diffèrent peu de la ligne droite; leur courbure (*fig.* 110) est néanmoins sensible; la courbe du gaz carbonique tourne sa convexité vers l'axe des x et l'ordonnée semble croître indéfiniment; les courbes de l'azote de l'air et de l'hydrogène tournent, au contraire, leur concavité vers cet axe.

Les courbes précédentes permettent de mesurer la pression P_m que prend un volume V_0 de gaz sous une pression initiale $P_0 = 1^m$, lorsqu'il est réduit à une fraction quelconque de son volume primitif $V_m = \frac{V_0}{m}$.

En effet, on a, pour $P_0 = 1^m$,

$$\frac{V_0 P_0}{V_1 P_1} - 1 = a_1 \qquad \text{ou} \qquad \frac{2 P_0}{P_1} = 1 + a_1;$$

la courbe fait connaître la quantité a_1, et, en partant de la pression P_1 comme pression initiale,

$$\frac{V_1 P_1}{V_2 P_2} - 1 = a_2 \qquad \text{ou} \qquad \frac{2 P_1}{P_2} = 1 + a_2,$$

et enfin

$$\frac{V_{m-1} P_{m-1}}{V_m P_m} - 1 = a_m \qquad \text{ou} \qquad \frac{2 P_{m-1}}{P_m} = 1 + a_m;$$

multipliant toutes ces égalités

$$(2)^m \frac{P_0}{P_m} = (1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_m).$$

Ces résultats peuvent ensuite être représentés par une formule

d'interpolation; on pourra écrire

$$\frac{P_n}{P_0} = m[1 + A(m-1) + B(m-1)^2].$$

Les coefficients A et B seront déterminés en forçant cette équation à satisfaire aux résultats numériques qui correspondent à deux valeurs particulières de m.

102. — COMPRESSIBILITÉ SOUS DE FAIBLES PRESSIONS.

Les expériences que nous venons de décrire ont servi à étudier la compressibilité des gaz sous des pressions variant entre une et trente fois la pression atmosphérique. Il restait à étudier la loi pour des pressions très basses et pour des pressions très fortes.

Pour les pressions très basses, cette étude a été faite par plusieurs physiciens : Regnault, en mesurant la densité des gaz, avait constaté qu'entre 1^{atm} et $0^{atm},5$ l'air suivait sensiblement la loi.

M. Siljeström, par une méthode qui repose sur le principe de la machine pneumatique à mercure, a trouvé que, pour des pressions très basses, l'hydrogène se comportait comme les autres gaz et était plus compressible que ne l'indique la loi de Mariotte. Au contraire, MM. Mendeléef et Hemilian affirment, d'après les résultats de leurs expériences, qu'aux basses pressions tout gaz se comporte comme l'hydrogène aux pressions ordinaires, c'est-à-dire que sa compressibilité est moindre que celle qu'on prévoit d'après la loi de Mariotte. Enfin M. Amagat a annoncé qu'à des pressions très faibles, l'air suivait exactement la loi de Mariotte.

L'appareil qu'il a employé est représenté par la figure 111.

Le gaz raréfié est contenu dans les boules de verre B et B′ prolongées inférieurement par un tube de verre plongeant dans une cuvette profonde, remplie de mercure et mobile verticalement au moyen d'un mouvement à crémaillère; on peut, par ce mouvement, amener le mercure jusqu'au trait m sous la boule inférieure ou jusqu'au trait m' entre les deux boules, ce qui réduit le volume sensiblement à moitié; dans chaque phase de l'expérience, la pression est mesurée au moyen d'un manomètre différentiel CSS′ communiquant avec la boule supérieure par un petit tube de cuivre flexible.

La grande difficulté est de mesurer exactement au cathétomètre la petite différence de niveau du mercure dans les deux branches en n, l'erreur relative prenant de suite des proportions considérables. Pour

éviter les erreurs de réfraction, les deux branches sont rodées intérieu-

Fig. 111.

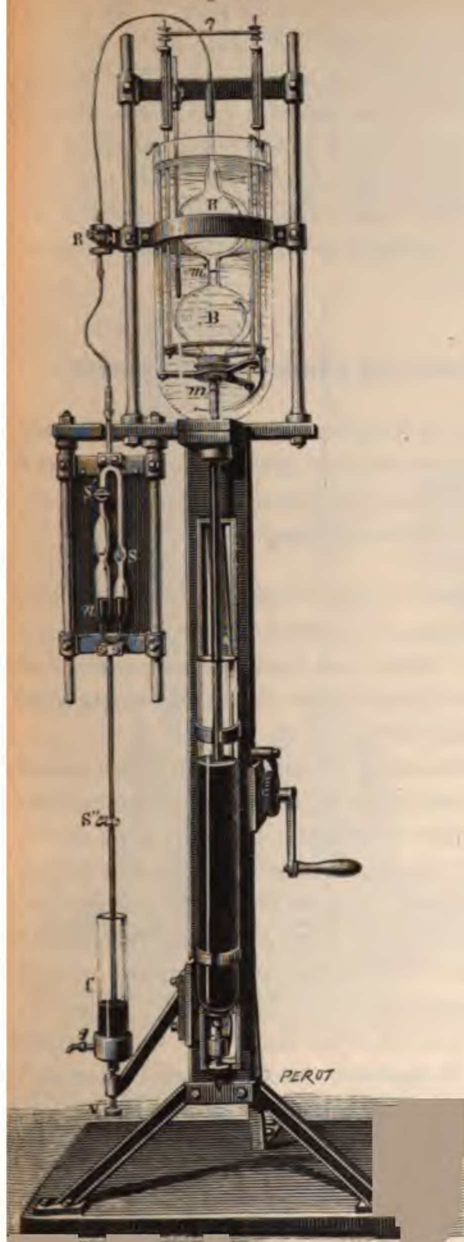


Fig. 112.



rement, puis polies, pour être parfaitement cylindriques ; elles portent

extérieurement des faces planes parallèles aux génératrices intérieures.

Les expériences ont porté sur l'air, l'hydrogène et l'acide carbonique; avec ces deux derniers gaz, la raréfaction a été poussée jusqu'à $2^{mm},288$ et $3^{mm},375$, puis avec de l'air jusqu'à $0^{mm},295$.

Sous ces faibles pressions, les gaz étudiés suivent la loi de Mariotte au degré d'approximation près dont les mesures sont susceptibles.

Les résultats contraires obtenus par d'autres observateurs ne doivent pas étonner; ces expériences présentent, en effet, une cause d'erreur qui tient à la présence d'une couche de gaz adhérente aux parois des récipients et dont la masse doit varier beaucoup quand les pressions deviennent très basses.

103. — COMPRESSIBILITÉ SOUS DES PRESSIONS TRÈS FORTES.

Les expériences sous de hautes pressions sont beaucoup plus nettes et les résultats auxquels elles ont conduit sont d'une importance et d'une certitude incontestables. Deux physiciens surtout ont fait cette difficile étude : ce sont MM. Cailletet et Amagat.

1° **Expériences de M. Cailletet.** — M. Cailletet a utilisé un tube-laboratoire en verre, contenu dans un cylindre d'acier AA (*fig.* 112); ce tube présentait une partie inférieure renflée, surmontée d'une branche capillaire. Le mercure n'entrait donc dans celle-ci que quand la compression était déjà considérable.

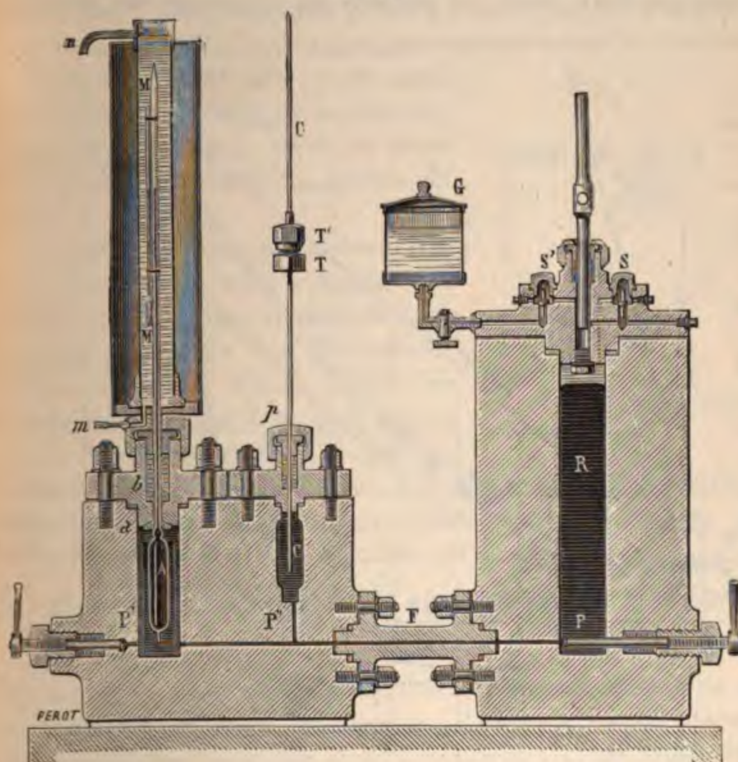
Pour produire cette compression, le tube-laboratoire était enfermé dans le cylindre A, celui-ci était plein de mercure et communiquait par sa base avec un très long tube d'acier flexible TT rempli de mercure. L'appareil était supporté par des fils d'acier B, portant des indications métriques. On descendait le tout au fond d'un puits de 500^{m} de profondeur : le tube flexible se déroulait en même temps que le fil, et le mercure qu'il contenait exerçait sur le piézomètre une pression qu'il mesurait en même temps.

Pour évaluer le volume du gaz, on avait donc doré intérieurement les parois du tube capillaire : le mercure, en y pénétrant, dissout l'or jusqu'à son niveau libre, et la hauteur à laquelle, après l'expérience, s'arrête l'or indique le volume occupé par le gaz à la pression maxima.

2° **Expériences de M. Amagat jusqu'à 420 atmosphères.** — M. Amagat a repris ces expériences avec une disposition qui rappe-

lait celle de Regnault. Des mesures, qui ont porté uniquement sur l'azote, ont été faites, en 1879, au puits Verpilleux, près de Saint-Étienne. Pour éviter les bulles d'air dans le tube d'acier, il remplissait ce dernier par le bas à l'aide d'une pompe foulante; de plus, le tube se terminait à sa partie supérieure par un tube raccordé en verre, qui permettait la lecture directe du niveau libre en haut de la colonne. L'observation du volume du gaz comprimé se faisait ainsi directement, comme le montre la figure 113, sur le tube-labora-

Fig. 113.



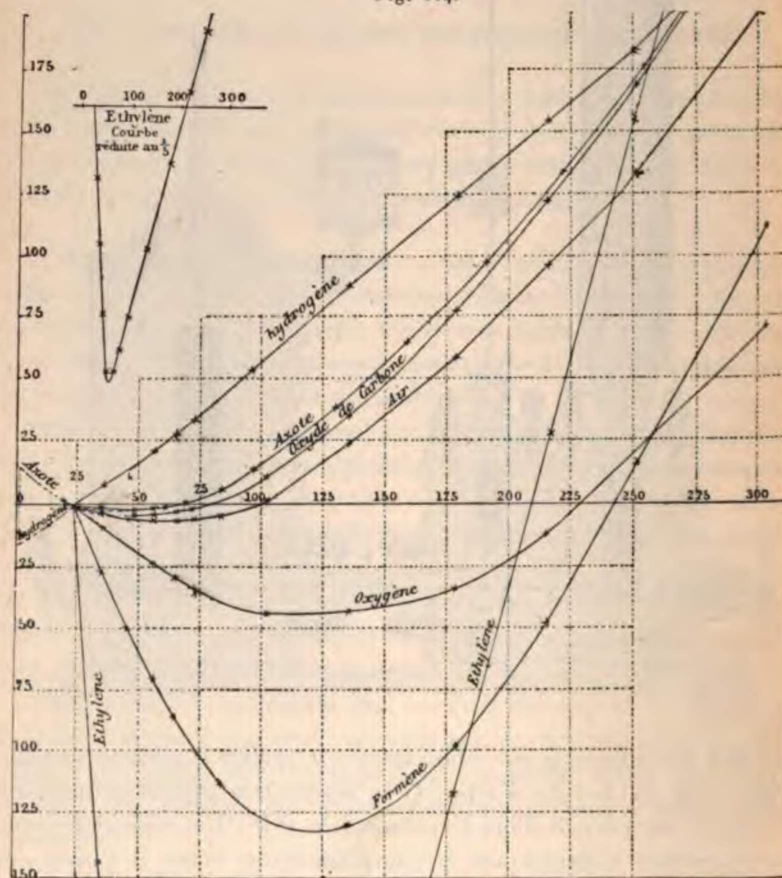
toire MM entouré d'un manchon destiné à rendre constante sa température. CC est le tube d'acier, G le réservoir à glycérine destiné à refouler le mercure R dans le piézomètre P'P". Un robinet à pointeau P permet d'intercepter la communication entre la pompe et l'appareil quand la compression a atteint la valeur voulue.

Le Tableau suivant renferme les résultats obtenus pour l'azote à 15° par les deux expérimentateurs :

M. CAILLETET.		M. AMAGAT.	
Pression en mètres de mercure.	pv.	Pression en mètres de mercure.	pv.
39,35	8184	20,74	50989
49,27	8022	35,34	50897
49,56	8023	**47,15**	**50811**
59,46	**7900**	55,48	50857
64,36	7951	61,24	50895
69,36	8011	82,97	51226
109,20	8484	128,30	52860
154,22	8973	221,10	57796
181,98	9330	327,39	65498

Dans les deux séries, *on observe un minimum du produit p*

Fig. 114.



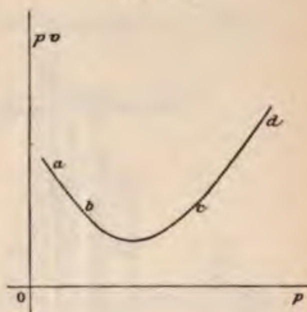
L'azote commence donc à se comprimer plus que ne l'exige la de Mariotte, comme Regnault l'avait annoncé; mais cet écart pa

par un minimum, puis il change de signe, de sorte que, à une pression très considérable, l'azote se comporte comme se comportait l'hydrogène dans les expériences de Regnault, et se comprime moins que la loi de Mariotte ne l'indique.

Ce résultat obtenu, M. Amagat a pu étudier les autres gaz avec un manomètre à azote, en disposant sur le même bloc de fonte un piézomètre contenant le gaz à expérimenter et un manomètre à azote. Il a étudié ainsi l'air, l'oxygène, l'hydrogène, l'oxyde de carbone, le formène, l'éthylène et l'anhydride carbonique.

Les résultats de cette première étude, où les pressions n'ont pas dépassé 480^{atm}, sont exprimés graphiquement par les courbes suivantes dans lesquelles les abscisses sont proportionnelles aux valeurs de pv (*fig.* 114). On voit que le minimum est bien accentué pour tous les gaz, surtout pour l'éthylène, où il est placé tellement bas qu'il sort des limites de l'épure.

Fig. 115.



La courbe a donc pour tous les gaz la forme générale représentée figure 115, excepté pour l'hydrogène; mais des expériences récentes de Von Wroblewski ont fait voir qu'on n'avait jusqu'alors observé, relativement à ce gaz, que la branche *cd* de la courbe, et que si, comme il l'a fait, on expérimente à de très basses températures, on observe le minimum de produit pv comme pour les autres gaz.

104. — ÉTUDE DE LA COMPRESSIBILITÉ AUX PRESSIONS ET TEMPÉRATURES ÉLEVÉES.

C'est à M. Amagat que l'on doit l'étude expérimentale de la compressibilité des gaz à haute température; il s'est proposé de construire pour chaque gaz toute une série d'isothermes à des températures s'élevant jusqu'à 260° et pour des pressions dont la limite supérieure a été de 3000 atmosphères; l'ensemble de ces courbes isothermes d'un même gaz constitue ce qu'on appelle un *réseau* de ce gaz.

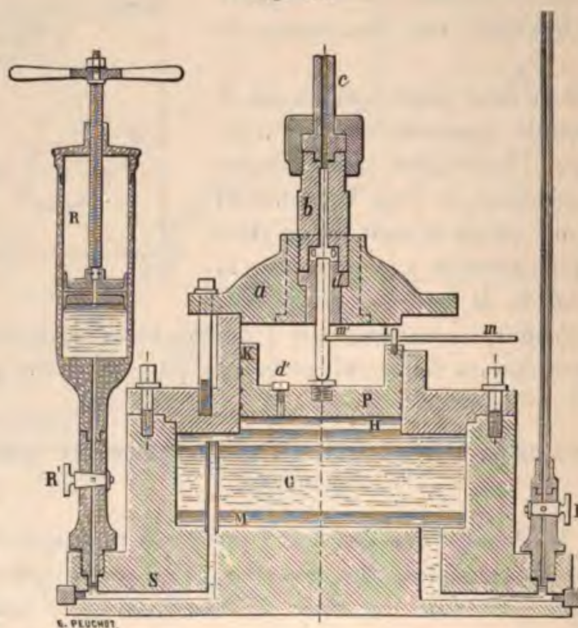
La première difficulté à vaincre était la mesure des pressions.

105. — MANOMÈTRE A PISTONS LIBRES ET LIQUIDES VISQUEUX.

Au delà de la résistance des tubes de verre vers 400 atmosphèr le seul manomètre susceptible de mesurer les pressions d'une fa continue et basé sur un principe rationnel est un instrument i giné par Gally-Cazalat. Il est fondé sur le principe de Pascal : c' une presse hydraulique renversée ; la pression y est mesurée par colonne de mercure dont la hauteur est à celle qu'on mesurerait d un manomètre à air libre dans le rapport de la section du petit pis à celle du grand.

M. Amagat a construit sur le même principe un appareil à pist libres, rendus étanches au moyen de liquides visqueux, convena

Fig. 116.



ment choisis pour chaque piston, et avec lequel on peut mesurer pressions dépassant 3000 atmosphères, sans difficulté et avec parfaite exactitude.

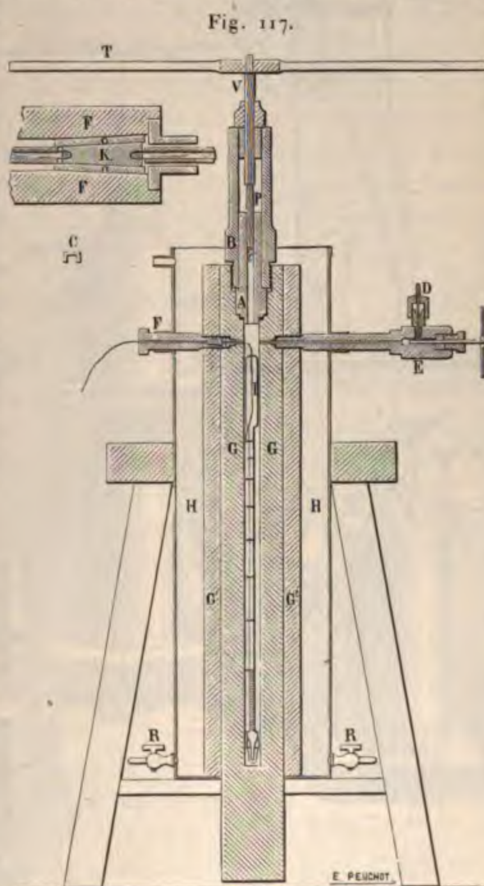
La figure 116 est une coupe de cet instrument. La pression ar par le tube *c* et refoule le petit piston rendu étanche par un pe mélasse contenue dans la cavité oo; celui-ci transmet directem

la pression au grand piston P, qui la transmet lui-même à une couche d'huile de ricin H destinée à le rendre étanche, puis au mercure G, qui est ainsi refoulé dans le tube de verre qui s'élève à droite. Une pompe placée à gauche permet d'injecter de l'huile pour maintenir à une hauteur convenable une tige *mn*, laquelle permet d'imprimer aux deux pistons, en même temps, un mouvement de rotation qui détruit l'effet d'inertie dû aux frottements de ceux-ci et les maintient dans leur position normale d'équilibre.

106. — MÉTHODE DES CONTACTS ÉLECTRIQUES.

Cette difficulté vaincue, il en restait une autre : la lecture des volumes; les piézomètres, en effet, dont la limite de résistance était dépassée, devaient être renfermés dans des enveloppes métalliques.

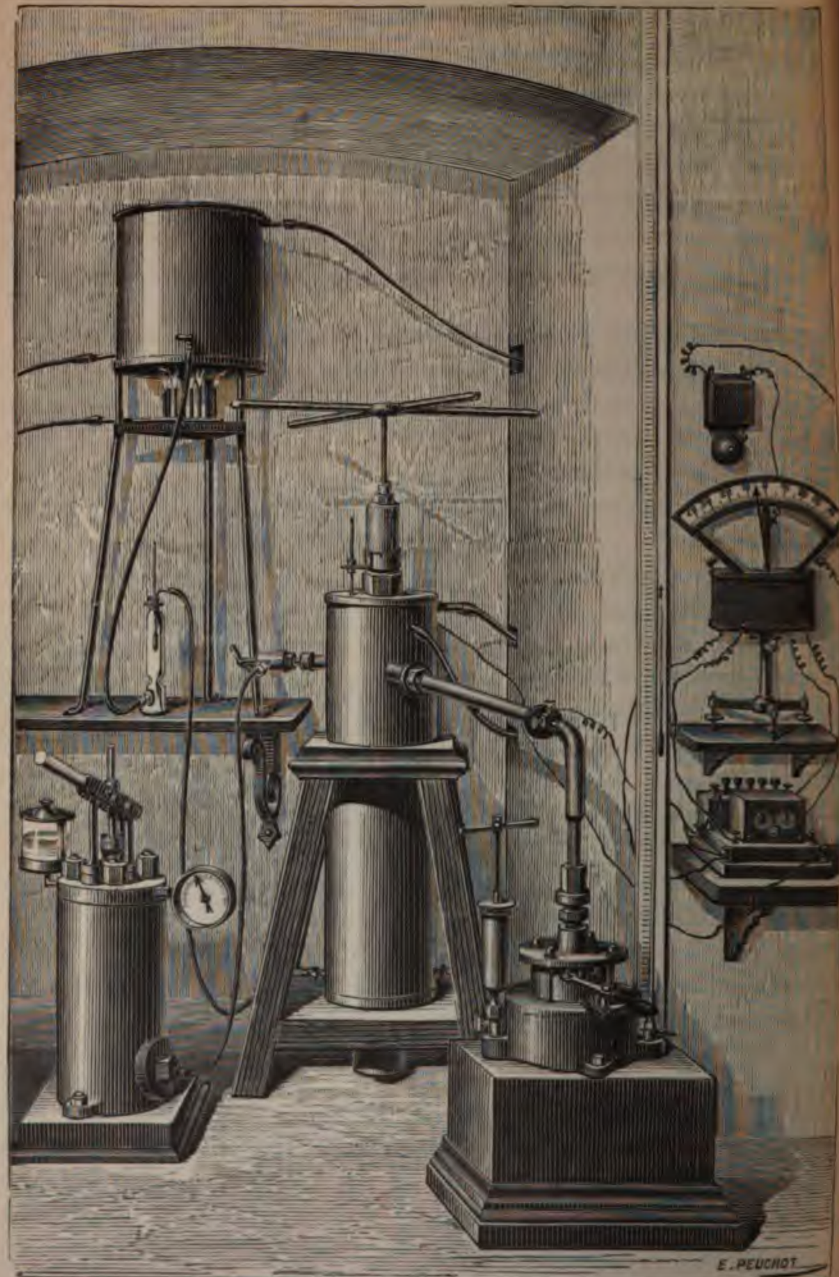
Fig. 117.



Pour les températures ne dépassant pas 50°, M. Amagat mesure les volumes par une méthode de contacts électriques déjà employée par M. Tait; à ces températures, relativement peu élevées, les expériences ont pu être poussées jusqu'à 3000^{atm}.

Une série de fils de platine, soudés latéralement dans la paroi du piézomètre qu'ils traversent, sont reliés par un fil conducteur où circule un courant électrique d'intensité convenable (le tout parfaitement isolé); quand le mercure refoulé vient toucher un fil de platine la résistance qui sépare celui-ci du précédent est supprimée; il en résulte une

Fig. 118.



variation de l'intensité du courant : le galvanomètre indique donc le moment précis de ce contact; un effet analogue se produira à chaque nouveau contact à un fil plus élevé.

Le cylindre d'acier dans lequel est placé le piézomètre est fretté sur toute sa longueur; son diamètre total est de $0^m,18$, celui du trou intérieur $0^m,03$, la profondeur disponible de ce trou est de $0^m,88$; le poids de l'appareil est de 200^{kg}; il est représenté figure 117 ainsi que les modèles des piézomètres pour les gaz, et pour l'étude de la compressibilité des liquides auxquels la méthode se prête également. Il porte latéralement une pièce à pointeau D, par où arrive le liquide transmettant la pression jusqu'à 400 atmosphères; on atteint ensuite les pressions plus élevées au moyen du dispositif vissé à la partie supérieure; c'est un piston d'acier rodé P, poussé par une vis V mue par un quadruple bras de levier T et qui chasse devant lui une calotte emboutie C. On voit en F la pièce latérale qui laisse passer le courant en l'isolant; cette pièce et la calotte C sont d'ailleurs dessinées à part, sur la gauche de la figure. Enfin, un cylindre, muni d'une enveloppe peu conductrice, permet à une circulation d'eau de porter la température jusqu'à 50°. L'ensemble complet de l'appareil est représenté figure 118.

107. — MÉTHODES DES REGARDS.

Le mode d'appréciation des volumes ne comporte pas, dans la méthode précédente, une exactitude suffisante dans les cas réclamant des déterminations très serrées, par exemple au voisinage du point critique; de plus, l'appareil ne se prête pas à des expériences à haute température.

M. Amagat employa un autre dispositif qui lui permit d'atteindre jusqu'à 200° et même 260°, à condition de restreindre les pressions à 1000^{atm}.

Le piézomètre a son réservoir (*fig.* 119) M plongé dans la pièce frettée de l'appareil précédent, et la pression arrive par le pointeau qu'elle porte. La tige, graduée en traits circulaires très fins et munis de renflements pour éviter une longueur démesurée, est logée dans le bras vertical d'une sorte de croix en acier forgé FFAA, et peut s'y mouvoir entraînée par un mécanisme vissé à la partie supérieure.

Les divisions viennent successivement défiler dans l'axe du bras horizontal; celui-ci porte à chaque extrémité un regard cylindrique R de $0^m,02$ d'épaisseur en crown ou en quartz; l'un d'eux laisse passer un

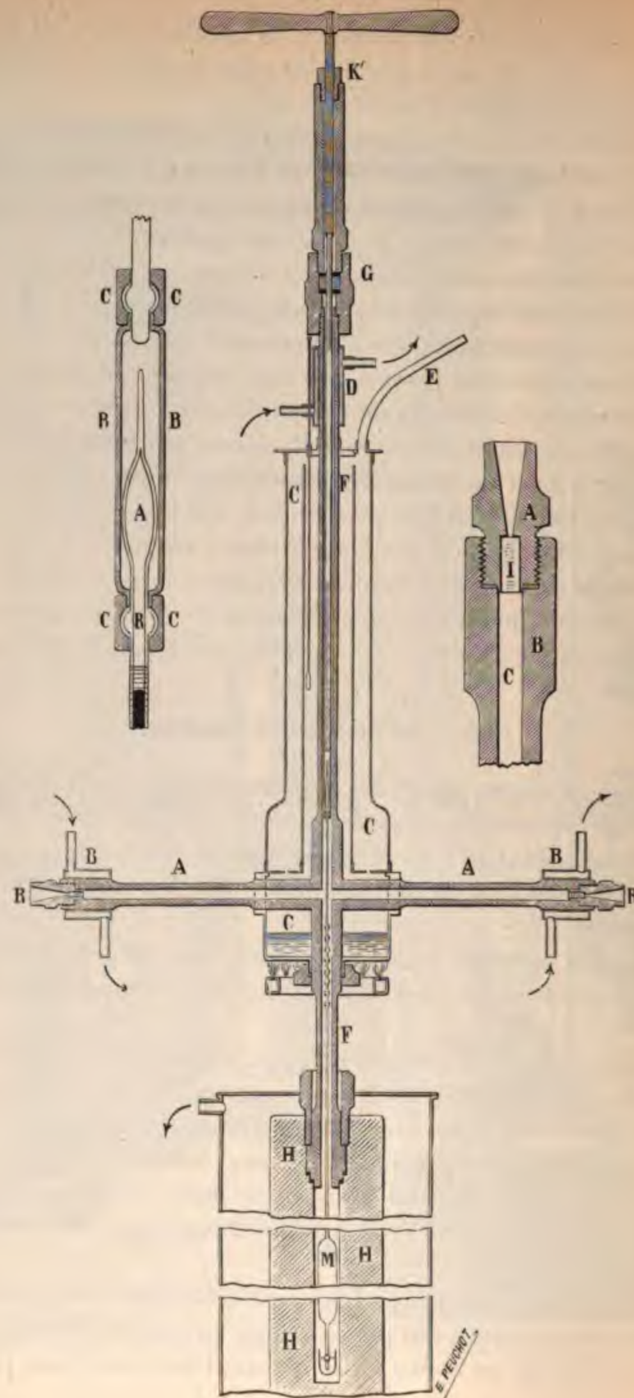


Fig. 119

rayon lumineux intense qui vient éclairer les divisions, et les lectures se font à travers l'autre avec une lunette. Comme il serait impossible de lire à travers la couche d'eau séparant deux regards ($0^m,60$) qui ne reste pas assez limpide, le bras horizontal doit être garni de cylindres de crown ou mieux de quartz; un manchon à double enveloppe CC, pouvant servir de bain de liquide ou de bain de vapeur, permet d'opérer aux différentes températures; des courants d'eau froide indiqués par des flèches circulent autour des parties portant des joints ou des masticages pour en empêcher l'échauffement.

108. — RÉSEAUX JUSQU'A 1000 ET JUSQU'A 3000 ATMOSPHÈRES

Les études de M. Amagat ont porté sur l'oxygène, l'hydrogène, l'azote, l'air, l'anhydride carbonique et l'éthylène.

Les figures 120 et 122 montrent les réseaux des isothermes des deux types extrêmes, l'anhydride carbonique et l'hydrogène, et d'un type intermédiaire, l'azote; la figure 120 donne l'ensemble du réseau de l'acide carbonique jusqu'à 258° et 1000^{atm}; les détails des 250 premières atmosphères, avec la courbe de liquéfaction, sont représentés par la figure 121.

Les isothermes de l'hydrogène et de l'azote ont été groupées ensemble figure 122.

On voit que ces lignes, qui ont été construites jusqu'à 3000^{atm}, conservent jusque sous cette pression une légère concavité.

On conçoit que les isothermes de l'acide carbonique, à des températures beaucoup plus élevées, prendraient, en se relevant graduellement, l'allure de celles de l'hydrogène et que, inversement, en descendant vers la température critique, le réseau de l'hydrogène convergerait vers la forme de la région connue de celui de l'acide carbonique. On se figure donc très facilement ce que serait l'ensemble d'un réseau complet.

109. — RÉSULTATS.

Lois de la statique des fluides. — Ces courbes permettent de mesurer avec le coefficient de compressibilité le coefficient de dilatation à pression ou volume constants.

Ces réseaux sont la traduction graphique des lois générales de la

statique des fluides, que l'on peut, avec M. Amagat, énoncer de façon suivante :

Fig. 120.

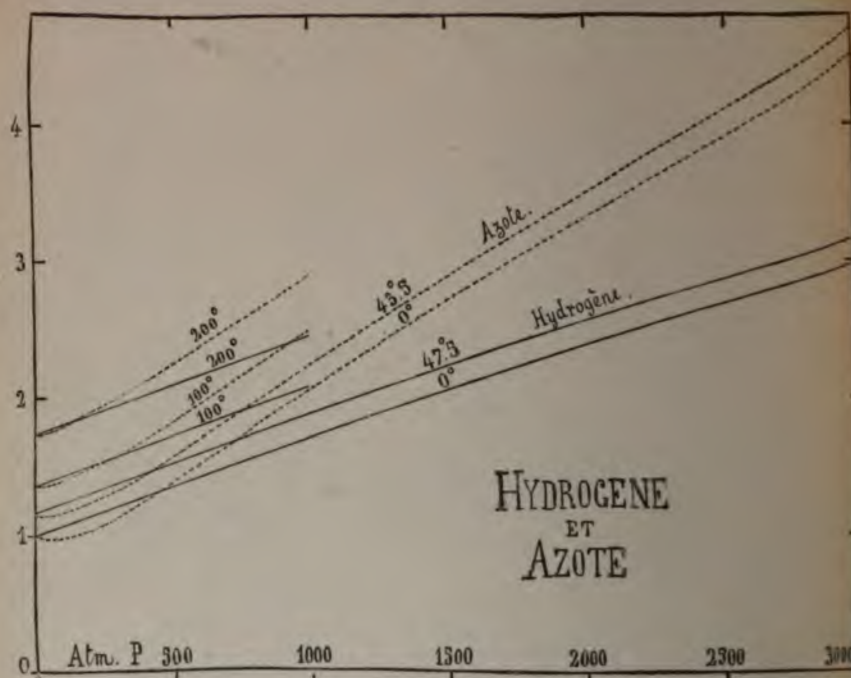


1° *La pression correspondant au minimum du produit* PV, *pour les isothermes successives, croît d'abord avec la température, passe par un maximum, puis décroît.*

2° *Les isothermes, dans les limites de pression et de température atteintes, ne paraissent pas tendre vers la forme rectiligne; elles conservent une courbure faible, mais certaine; cela a lieu pour tous les gaz, et rien ne peut faire prévoir avec certitude une direction asymptotique;*

3° *Le coefficient de compressibilité, sous toutes les tempéra-*

Fig. 122.



tures et à toutes les températures, décroît quand la pression augmente.

4° *Sous toutes les pressions, le coefficient de compressibilité croît avec la température;*

5° *Le coefficient de dilatation sous pression constante, pour une température donnée, croît d'abord, la pression augmentant, passe par un maximum sous une pression un peu inférieure à celle de l'ordonnée minima, puis diminue;*

6° *Le coefficient de dilatation sous pression constante augmente d'abord, la température croissant, passe par un maximum, puis diminue; sous des pressions de plus en plus fortes, ce*

maximum a lieu à des températures de plus en plus élevées et est de moins en moins accentué;

7° *La pression sous laquelle a lieu le maximum du coefficient pour une température donnée diffère peu de celle pour laquelle le maximum pour une pression donnée a lieu à cette même température;*

8° *A partir d'une température d'autant moins élevée que la pression est plus faible, l'augmentation de volume devient sensiblement constante; le volume devient par suite sensiblement proportionnel à la température absolue diminuée d'une constante qui décroît avec la pression et revient nulle pour les gaz parfaits;*

9° *Le coefficient de dilatation à volume constant, pour une température donnée, croît d'abord avec la pression, passe par un maximum d'autant moins prononcé que la température est plus élevée, puis décroît;*

10° *Le coefficient de pression, rapport de l'accroissement de pression à l'accroissement de température, croît rapidement quand le volume décroît;*

11° *Le coefficient de pression varie peu avec la température pour un volume donné; ses petites variations semblent tendre à s'accumuler à températures suffisamment élevées ou même à toutes les températures sous des pressions suffisantes. Par suite, sous volume constant, la pression deviendrait proportionnelle à la température diminuée d'une constante fonction du volume nul, croissant quand celui-ci diminue et qui est nulle dans le cas des gaz parfaits;*

12° *Au même degré d'approximation que la loi précédente le coefficient à volume constant tend évidemment, pour un volume donné, à être en raison inverse de la pression.*

Ce qu'il faut remarquer, c'est la tendance qu'ont ces lois à se simplifier quand la température ou la pression augmente, et à prendre des formes rappelant celle des lois des gaz parfaits. Dans le cas des lois (8) et (11), par exemple, la proportionnalité à la température devient une proportionnalité à la température absolue diminuée d'une constante qui est fonction du volume seul à pression constante, fonction de la pression seule sous volume constant et qui s'annule dans le cas des gaz parfaits.

110. — FORMULE DE M. VAN DER WAALS.

Nous avons terminé l'exposé des recherches expérimentales relatives à la loi de Mariotte. Voici ce que disait Regnault à la fin de son remarquable Mémoire sur l'étude de la loi de compressibilité des gaz :

« La fonction $\frac{P_0 V_0}{P_1 V} - 1$ est évidemment trop complexe pour qu'on puisse espérer la trouver uniquement par la méthode expérimentale. Il est à désirer qne les Géomètres veuillent bien rechercher la forme de cette fonction en développant, au moyen de l'Analyse, quelques hypothèses faites sur les forces moléculaires; l'expérience fournira facilement les données nécessaires pour calculer les constantes et pour soumettre les formules elles-mêmes à un criterium rigoureux. »

L'étude analytique de la loi a été effectivement entreprise; Clausius d'abord et, plus tard, M. Van der Waals ont proposé des formules qui rendent compte des divers phénomènes observés quand on fait varier à la fois la pression, le volume et la température d'une masse de gaz.

Dès 1738, Daniel Bernoulli avait fait l'hypothèse que les milieux gazeux étaient constitués par des molécules animées de mouvements rectilignes dans toutes les directions, comme de petits projectiles, pouvant se croiser et se réfléchir sans perdre leur quantité de mouvement. Quand elles sont enfermées dans un vase, elles finissent par en heurter les parois, de sorte que, vu le nombre considérable de ces chocs et leurs directions variées, leurs composantes normales produisent l'effet d'une pression continue normale. Si les parois sont immobiles, les molécules s'y réfléchissent en gardant la même vitesse, et la pression reste invariable. Mais, si l'une des parois est mobile, si elle est constituée, par exemple, par un piston enfoncé dans un cylindre à l'aide d'une pression P, la vitesse des molécules est augmentée par la mobilité en sens inverse de cette paroi réfléchissante.

Cette pression P représente la force qu'il faudrait appliquer de dehors en dedans sur l'unité de surface pour détruire en premier lieu la composante normale u de la vitesse des molécules, et ensuite pour leur communiquer une vitesse u, normale aussi, mais de sens

contraire, force qui leur imprimerait une vitesse $2u$. Donc, on a

$$P = 2Mu,$$

M représentant la masse de toutes les molécules qui, pendant l'unité de temps, rencontrent la surface considérée.

Or, M est proportionnel au nombre de molécules contenues dans l'unité de volume, c'est-à-dire à la densité d du gaz, à la masse m, et à la vitesse u de chacune d'elles. On a donc

$$M = K d m u,$$

et, portant dans l'équation qui donne P,

$$P = 2K d m u^2. \tag{1}$$

Pour une même température, c'est-à-dire pour une même valeur de la force vive mu^2, P doit donc être proportionnel à d : c'est la loi de Mariotte.

Le « criterium rigoureux » de l'expérience, dont parle Regnault, ne vérifie pas la loi de Mariotte. L'hypothèse relative aux forces moléculaires ne suffit donc plus. M. Van der Waals a remarqué que, dans l'établissement de la formule (1), on ne tient pas compte de deux facteurs très importants.

D'une part, on néglige complètement l'attraction des molécules les unes pour les autres, attraction d'autant plus considérable que, la matière étant plus comprimée, ces molécules sont plus voisines les unes des autres; d'autre part, on assimile ces dernières à de simples points matériels sans volume, ce qui ne saurait être admis. Si l'on tient compte du volume de la molécule, le chemin que parcourt son centre de gravité en allant normalement d'une paroi à la paroi opposée n'est plus égal à la distance des deux parois, mais à cette distance diminuée de deux fois la distance entre ce centre et la paroi au moment du choc.

M. Van der Waals a cherché ce que devient la fonction $f(p, v, t) = 0$ quand on introduit ces hypothèses, et il est arrivé à la formule suivante :

$$\left(p + \frac{k}{v^2}\right)(v - \alpha) = \left(p_0 + \frac{k}{v_0^2}\right)(v_0 - \alpha)\left(1 + \frac{1}{273}t\right), \tag{2}$$

dans laquelle p_0 et v_0 représentent la pression et le volume du gaz à 0°; p et v la pression et le volume à $t°$; α le quadruple du volume

total et invariable des molécules et enfin k l'attraction qui s'exerce entre elles.

Le produit $\frac{1}{273}\left(p_0 + \frac{k}{v_0^2}\right)(v_0 - \alpha)$ représente une constante numérique qui dépend des circonstances initiales : on désigne cette constante par R. L'équation (2) devient alors

$$\left(p + \frac{k}{v_2}\right)(v - \alpha) = \text{RT}. \tag{3}$$

On peut aussi poser $p_0 = 1$, $v_0 = 1$. Nous obtenons alors l'équation

$$\left(p + \frac{k}{v^2}\right)(v - \alpha) = (1 + k)(1 - \alpha)\left(1 + \frac{t}{273}\right); \tag{4}$$

en regardant la formule (2) on voit donc que les lois de Mariotte et de Gay-Lussac, réunies dans la formule

$$pv = p_0 v_0 (1 + \alpha t),$$

s'appliquent aux gaz, à condition d'ajouter à la pression extérieure l'attraction réciproque $\frac{k}{v_2}$ des molécules et de retrancher du volume apparent occupé par le gaz un volume égal à quatre fois le volume moléculaire.

La considération des volumes moléculaires s'imposait d'ailleurs à la suite des expériences de M. Amagat; car l'équation de ces courbes isothermes (*fig.* 114), qui sont des droites à partir d'une pression suffisamment élevée, peut s'écrire

$$pv = ap + b$$

ou

$$p(v - a) = b,$$

a et b étant deux constantes. On voit donc que, pour que la loi de Mariotte s'applique, il faut prendre pour volume V du gaz l'espace qu'il occupe, diminué du volume a de ses molécules. Ceci est d'autant plus admissible que toutes les branches droites figuratives sont parallèles, c'est-à-dire que les valeurs de a relatives à un même gaz sont identiques à toute température.

La formule de M. Van der Waals permet, d'ailleurs, de prévoir avec beaucoup d'exactitude toutes les circonstances que nous avons observées dans l'étude expérimentale de la compressibilité des gaz.

En effet, transformons l'équation (4) en l'écrivant sous la forme

$$pv = (1 + k)(1 - \alpha)(1 + \alpha t) - \frac{k}{v} + \frac{k\alpha}{v^2} + \alpha p; \tag{4 bis}$$

à température constante, le produit des trois parenthèses est lui-même une constante que nous représenterons par C. La formule précédente devient alors

$$pv = C - \frac{k}{v} + \left(\frac{k\alpha}{v^2} + \alpha p\right).$$

Quand p est très petit, v est très grand, k et α sont, d'ailleurs, inférieurs à l'unité. Donc, le terme $\frac{k}{v}$ aura toujours une valeur numérique supérieure à celle de la parenthèse. Le produit pv ira donc en décroissant à mesure que p augmentera, jusqu'à un minimum déterminé par la condition

$$\frac{k}{v} = 2\frac{k\alpha}{v^2} + \alpha p;$$

à partir de ce minimum, p continuant à croître et v à décroître, les deux termes $\frac{k\alpha}{v^2} + \alpha p$ l'emporteront sur le terme $\frac{k}{v}$ et le produit pv prendra des valeurs croissantes.

L'équation (4 *bis*) définit donc bien la forme de la courbe *abcd* (*fig.* 115), qui doit traduire pratiquement les résultats directs de l'expérience. Là ne se bornent pas les déductions qu'on en peut tirer. Nous en verrons quelques autres relatives à la température critique des gaz.

VI. — MÉLANGE DES GAZ.

111. — LOI DE DALTON.

Deux gaz différents, qui n'exercent aucune action chimique l'un sur l'autre, se mélangent rapidement quand on les enferme dans une même enceinte, même s'ils ont été superposés par ordre de densité décroissante. Berthollet a établi cette propriété par une expérience restée classique. Deux ballons de même capacité, munis de robinets, étaient réunis par un tube étroit : l'un rempli d'hydrogène était placé au-dessus de l'autre, plein d'anhydride carbonique; les gaz étaient à la pression atmosphérique et à la même température. L'appareil fut descendu dans les caves de l'Observatoire, où la température reste constante et l'on ouvrit les robinets. Au bout de plusieurs jours, les deux ballons furent trouvés pleins d'un mélange parfaitement homogène des deux gaz et ce mélange possédait la pression initiale. Chacun des gaz s'était comporté comme si le réservoir occupé par l'autre eût

été vide, se répandant dans l'espace entier et y prenant une pression réglée par la loi de Mariotte, la pression totale du mélange n'étant que la somme de ces pressions particulières.

Le résultat de cette expérience est général, quel que soit le nombre des gaz mis en présence. On l'exprime par la loi de Dalton :

Lorsque plusieurs gaz sont mélangés et n'exercent aucune action chimique les uns sur les autres, la pression finale du mélange est égale à la somme des pressions que prendrait chacun des gaz s'il occupait seul le volume du mélange.

L'expression analytique de cette loi est facile à obtenir. Soient, en effet, p, p', p'', ... les pressions, v, v', v'', ... les volumes, à la même température, des masses gazeuses qu'on se propose de mélanger dans un volume total V. Chacun d'eux prendra la pression $\frac{pv}{V}$, $\frac{p'v'}{V}$, $\frac{p''v''}{V}$, ... et la pression totale du mélange P sera

$$V = \frac{pv}{V} + \frac{p'v'}{V} + \frac{p''v''}{V} + \ldots$$

ou

$$PV = \Sigma pv.$$

La loi peut donc encore s'énoncer :

Le produit PV *du volume et de la pression finale est égal à la somme des produits* pv *relatifs à chacun des gaz qui entrent dans le mélange.*

112. — EXPÉRIENCES RÉCENTES.

Le raisonnement précédent suppose que la compressibilité de chacun des gaz est régie par la loi de Mariotte. Or nous savons que la loi de Mariotte n'est pas rigoureuse et qu'en réalité les gaz s'en écartent plus ou moins. Il est évident déjà pour cette raison que la loi de Dalton ne sera qu'une loi approchée. Nous devons nous attendre à ce que la loi de compressibilité des mélanges s'écarte de la loi de Dalton comme celle des gaz simples de la loi de Mariotte.

A priori nous ne pouvons savoir d'ailleurs quelle relation existe entre la compressibilité des mélanges et celles de leurs constituants.

L'énoncé suivant, proposé sous deux formes peu différentes par M. Leduc et M. Amagat, représente mieux que la loi de Dalton les résultats des expériences :

Le volume occupé par un mélange de gaz est égal à la somme des

volumes qu'occuperaient les constituants sous la pression et à la température du mélange : en d'autres termes, chacun des gaz doit être considéré comme subissant la pression totale.

On peut se proposer de trouver pour les mélanges une équation caractéristique de la même forme que l'équation caractéristique des gaz simples, comme celle de Van der Waals. Les constantes k et α de cette équation seront des fonctions des constantes k_1, α_1, k_2, α_2, ... des équations caractéristiques des gaz mélangés; mais, sur la forme de ces fonctions, nous sommes réduits à des hypothèses.

VII. — MANOMÈTRES.

Regnault employait, pour l'évaluation des pressions comprises entre 1^{atm} et 3^{atm}, le manomètre ordinaire et, pour les pressions jusqu'à 27^{atm}, son grand manomètre du Collège de France. Pour les faibles pressions, il utilisait le manomètre barométrique.

113. — GRAND MANOMÈTRE A AIR LIBRE.

M. Cailletet a établi à la tour Eiffel, en 1891, un grand manomètre à air libre de 300^{m} dont les organes sont rendus accessibles à l'observateur sur toute son étendue.

La pression de 400^{atm} que mesure un pareil manomètre, ne pouvant être maintenue dans un tube de verre, on a dû recourir à un tube d'acier doux de $4^{mm},5$ de diamètre intérieur, relié par sa base à un récipient de mercure. En comprimant, à l'aide d'une pompe, de l'eau sur le mercure, on peut l'élever graduellement jusqu'au sommet de la tour.

L'opacité du tube d'acier s'opposant à la lecture directe du niveau du mercure, on a disposé de 3^{m} en 3^{m}, sur le trajet de ce tube, des robinets à pointeau, dont chacun communique avec un tube de verre vertical, d'un peu plus de 3^{m} de hauteur.

Lorsqu'on ouvre un de ces robinets, on met l'intérieur du tube d'acier en communication avec le tube de verre, dans lequel peut alors pénétrer le mercure. La position du niveau est donnée par une échelle graduée, placée derrière ce tube et tracée sur du bois verni qui n'éprouve que de très faibles variations, dans le sens de ses fibres, sous les influences atmosphériques très différentes. Le raccordement de deux règles successives est fait à l'aide d'une règle d'acier s'appuyant sur la base et le sommet de ces deux échelles consécutives; un niveau à bulle en constatait la parfaite horizontalité.

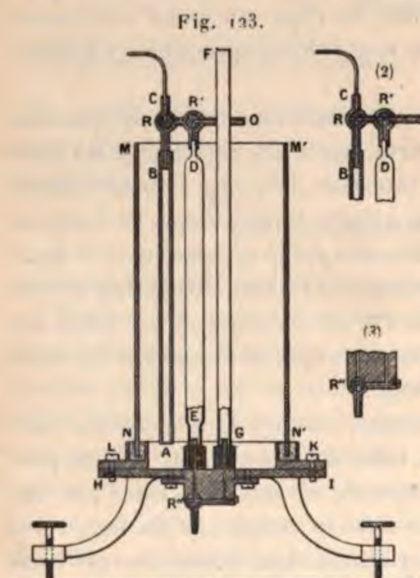
Pour réaliser une pression déterminée, il suffit d'ouvrir le robinet qui porte la division correspondant à la pression; on fait agir la pompe jusqu'à ce que le mercure, qui finit par s'élever à la fois dans le tube de métal et dans le tube de verre, affleure à la division voulue; les observateurs du poste inférieur et du poste supérieur sont reliés par le téléphone.

Des thermomètres, installés à chaque plate-forme, donnent pour chaque expérience des indications suffisantes pour les corrections; on peut d'ailleurs déduire plus simplement la température moyenne de l'étude de la résistance électrique d'un fil métallique qui suit la colonne de mercure; enfin, il faut tenir compte de la compressibilité du mercure, de la valeur vraie de la pression atmosphérique en chaque point où se termine la colonne de mercure, et aussi de la variation du niveau du mercure dans le réservoir inférieur.

114. — MANOMÈTRE DE REGNAULT.

On peut classer dans les manomètres à air libre un appareil intermédiaire dû à Regnault et qui permet, avec une colonne de 1^m à 2^m de mercure à l'air libre, d'évaluer des pressions comprises entre 1^{atm} et 30^{atm}; il se compose d'un tube en laiton AB de 5^{mm} de diamètre intérieur, et à parois épaisses, afin qu'il puisse résister à ces pressions sans subir une augmentation sensible de capacité (*fig.* 123). Il est surmonté d'un robinet à trois voies R, terminé par une tubulure *c*, à l'aide de laquelle on le fait communiquer avec le réservoir contenant l'air comprimé dont on cherche à connaître la force élastique. Le robinet R communique par une tubulure latérale avec un second robinet R′ qu'on ajuste à l'aide d'une seconde tubulure sur un large tube DE d'un manomètre à air libre DEGF.

Fig. 123.



Les tubes D et F portent une graduation en millimètres et commu-

niquent par le robinet à trois voies R″; un manchon MNM′N′ est destiné à recevoir de l'eau froide qui maintiendra les réservoirs à gaz à température connue. Le fonctionnement de l'appareil est simple : les robinets étant dans la position indiquée par la figure, on remplit F et DE complètement de mercure qui doit s'écouler par l'orifice *o*; le réservoir B est alors plein de gaz à la pression cherchée; on isole cette masse en tournant le robinet R, et on la fait ensuite communiquer avec le réservoir DE en tournant le robinet R′; on ouvre en même temps le robinet R″ [(*fig.* 123; (2) et (3)] pour faire écouler le mercure pour amener les deux colonnes sensiblement au même niveau dans les deux branches du manomètre.

Soient V le volume du tube AB et W le volume du gaz dans le tube DE, x la force élastique cherchée, H la hauteur du baromètre, h la différence des niveaux dans le manomètre, réduites à 0°; on a évidemment

$$x = \frac{V + W}{V}(H + h).$$

Pour connaître W, on fait des jaugeages du tube DE au mercure; la capacité V est déduite d'une expérience; on la remplit d'air à la pression atmosphérique H et l'on opère comme dans une expérience ordinaire de mesure de pression, en faisant écouler le mercure par le robinet R″ jusqu'à ce que son niveau arrive vers le bas de FG; on note alors la dépression h et l'on peut calculer V par la formule

$$V = W\frac{H - h}{h}.$$

Avec un tube de verre de 20^{mm} de diamètre intérieur le rapport des sections est $\frac{25}{400} = \frac{1}{16}$; si donc les tubes BA et DE ont même longueur le manomètre pourra servir jusqu'à 32^{atm}, à condition de ne laisser détendre le gaz que jusqu'à 2^{atm}; or, il suffit pour cela d'un tube FG de 1^{m} de long.

115. — MANOMÈTRE DE KRETZ.

Cet appareil permet de mesurer avec une très grande précision de très faibles variations de pression. Il est formé de deux larges vases, de même section S, communiquant par un tube étroit en U, de section s; le vase A reçoit par un tube t le gaz (*fig.* 124) dont on veut évaluer la force élastique; le vase B communique avec l'air; le premier vase contient de l'eau alcoolisée, de densité d, séparée en M,

par un ménisque très visible, de l'essence de térébenthine, de densité d', qui remplit le second vase; ces deux liquides ne se mélangent pas; les hauteurs h et h' de ces liquides, comptées à partir de M, satisfont à la condition d'équilibre

$$(1) \qquad hd = h'd'.$$

Sous l'effet d'un accroissement p de la pression en A la surface de séparation passe de M en N, s'élevant de x, et les niveaux A et B passent respectivement en A' et B', leur variation y étant donnée par la relation

Fig. 124.

$$(2) \qquad yS = xs.$$

Appelons P la pression atmosphérique exprimée, comme p, en colonne d'eau et écrivons que les pressions sont égales dans le plan N, dans les deux tranches du tube,

$$(3) \quad P+p+(h-x-y)d = P+(h'-x+y)d'$$

et en tenant compte de (1) et (2),

$$x = \frac{p}{d-d'+\frac{s}{S}(d+d')} \qquad \text{ou} \qquad x = Ap.$$

On voit que de toute façon x est proportionnel à p et peut par conséquent lui servir de mesure; une comparaison directe avec un manomètre à eau permet de déterminer le coefficient A, qui varie entre 25 et 30; ce manomètre est donc de 25 à 30 fois plus sensible qu'un manomètre à eau.

On voit que, si le rapport $\frac{s}{S}$ est négligeable, c'est-à-dire si l'on peut supposer les niveaux constants dans les vases A et B, on a

$$x = \frac{p}{d-d'};$$

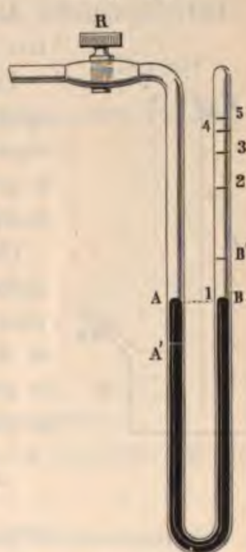
la sensibilité est en raison inverse de la différence de densité des liquides. Cette discussion montre qu'il faut prendre les vases de large section, le tube de communication presque capillaire, et les liquide de densités très voisines.

116. — MANOMÈTRE A AIR COMPRIMÉ.

Le manomètre à air libre est le seul qui soit susceptible pratiquement d'une graduation directe : tous les autres manomètres se graduent par comparaison.

La figure 125 représente le modèle usuel de manomètre à air comprimé. La branche A est en communication par l'intermédiaire du robinet R avec le récipient dans lequel on veut mesurer la pression. La branche B est fermée en haut et renferme de l'air. L'excès de pression qui s'exerce en A est équilibré par la dénivellation du mercure et l'accroissement de force élastique de l'air en B résultant de la diminution de volume. Comme les appareils de Mariotte et de Dulong, ce manomètre présente l'inconvénient que la sensibilité diminue rapidement quand la pression augmente. On atténue cet inconvénient en donnant à la branche fermée une forme conique.

Fig. 125.



Ces instruments ne sont jamais employés dans les mesures qui demandent quelque précision.

117. — THÉORIE DU MANOMÈTRE A AIR COMPRIMÉ.

La figure 126 montre la forme théorique d'un manomètre à air comprimé.

Le tube A résistant, en verre, fermé par le haut, plein d'air, plonge dans un récipient métallique clos, plein de mercure jusqu'au niveau B et qui communique, par le tube R, avec le gaz dont on veut mesurer la force élastique nH.

Soient : l la longueur de la colonne gazeuse à la pression atmosphérique;

x sa longueur lorsque la pression nH agit sur la surface libre du mercure dans la cuve;

s la section du tube et S la section annulaire de la cuve;

y la dénivellation du mercure dans la cuve.

On a

$$Sy = s(l - x),$$

équation qui exprime que le mercure de la cuve est monté dans le tube.

La pression de la masse gazeuse, réduite au volume x, est

$$nH - y - l + x;$$

on a ainsi

$$lH = x(nH - y - l + x),$$

équation qui exprime que la masse gazeuse suit la loi de Mariotte; d'où l'on tire

$$\frac{S+s}{S}x^2 + \left(nH - \frac{S+s}{S}l\right)x - lH = 0.$$

Cette équation a deux racines de signes contraires : la racine positive convient évidemment seule.

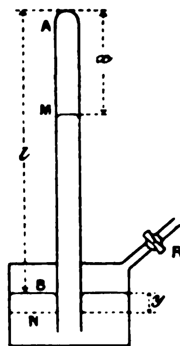


Fig. 126.

En donnant à n les valeurs 1, 2, 3, ... atmosphères, on trouvera les valeurs de x correspondantes; en réalité, ceci n'est qu'un calcul théorique; la graduation de ces appareils se faisant toujours par comparaison à un manomètre à air libre.

On donne souvent au manomètre la forme d'un siphon retourné (*fig.* 125); la même formule convient si s désigne la section de la branche fermée et S la section de la branche qui communique avec le gaz. Si ces deux sections sont égales la formule se simplifie; on a

$$2x^2 + (nH - 2l)x - lH = 0.$$

Ces manomètres ont le même inconvénient que présentent les appareils de Mariotte ou de Dulong pour la vérification de la loi de Mariotte; leur sensibilité décroît quand la pression augmente.

On peut donner au tube fermé une forme conique, la sensibilité est alors évidemment augmentée.

118. — MANOMÈTRE DE SENSIBILITÉ CONSTANTE.

Enfin, on peut se proposer de calculer la forme de la méridienne du tube manométrique pour que sa sensibilité reste constante à toute pression.

Soit MN la courbe cherchée, rapportée à un axe des y qui est l'axe

du tube manométrique, et à un axe des x qui lui est perpendiculaire (*fig.* 127).

La variation dy doit être proportionnelle à la variation dp de pression pour que la sensibilité soit constante :

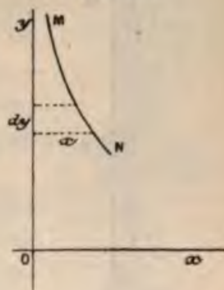


Fig. 127.

(1) $$dy = k\,dp;$$

on a donc, avec un choix convenable d'axe des x,

(2) $$y = kp.$$

La loi de Mariotte est

(3) $$pv = C;$$

elle donne la relation

(4) $$p\,dv + v\,dp = 0;$$

enfin, le quadrilatère curviligne tracé sur la figure montre que l'on a

(5) $$-\,dv = \pi x^2 dy.$$

On tire de là

$$-\frac{y}{k}\pi x^2 + \frac{c}{y} = 0$$

ou

$$xy = \sqrt{\frac{ck}{\pi}};$$

la courbe méridienne est donc une hyperbole équilatère.

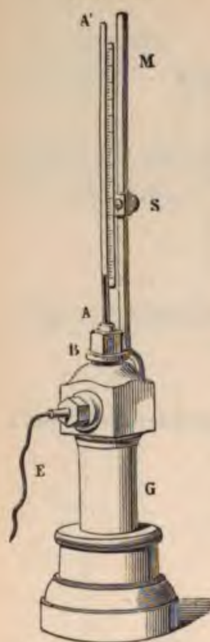
Cet instrument, théoriquement parfait, n'est, en pratique, pas réalisable.

119. — MANOMÈTRES DE M. CAILLETET.

1° M. Cailletet a employé pour les pressions voisines de 1500^{atm} un appareil construit d'après un principe qui est dû à M. Marcel Deprez. Lorsque l'on comprime de l'eau sous un piston parfaitement cylindrique et ajusté dans une cavité pratiquée dans une masse métallique, de telle façon que l'espace annulaire compris entre la pièce fixe et le piston soit très petit, l'eau ne s'échappera qu'avec une grande lenteur par cet étroit passage. Avec cet appareil, qui ne supporte aucun frottement, il sera possible, en chargeant la soupape, de peser les pressions qui tendent à la soulever. Un levier très mobile, monté sur des axes, peut recevoir à l'une de ses extrémités des poids qui exercent ainsi sur la soupape des pressions exactement

connues. Sous le *piston libre* est une membrane de baudruche, la résistance à la flexion est assez petite pour être négligée et présente l'avantage de supprimer l'écoule de l'eau autour du piston.

Fig. 128.



2° En étudiant les déformations élastique subit un réservoir cylindrique en verre lorsq comprime ses parois extérieures, M. Cai a constaté que la diminution de volume de enveloppe est exactement proportionnelle pression exercée jusqu'à un point voisin rupture et que, de plus, il n'y a pas de défo tion permanente. Il a basé sur cette proprié manomètre dont la construction est très sim il se compose d'une sorte de thermomètr verre (*fig.* 128) dont le réservoir cylindr fermé par des calottes sphériques, est rempli liquide coloré quelconque, ou mieux de cure. Le tube capillaire AA' qui le surmon mastiqué dans un ajutage de cuivre et so réservoir d'acier G, hermétiquement clos, lequel est enfermé le réservoir du thermon

Le liquide qui sert à établir la pression par le tube E dans ce récipient, qui peut porter les plus hautes pressions.

Le niveau du mercure dans le tube capillaire indique la pr intérieure, à condition que l'appareil soit maintenu à tempé constante.

120. — MANOMÈTRE DE DESGOFFE.

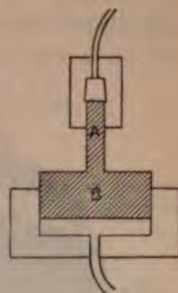
Nous avons indiqué comment M. Amagat mesurait les pre très élevées à l'aide d'un manomètre à *piston libre,* modifi d'un manomètre dû à Gally-Cazalat et construit par Desgoffe, reil reposant sur le principe de Pascal et qui est une presse hy lique renversée.

Deux cylindres, de section très différente, s et S (*fig.* 129) bout à bout entrent à frottement dans deux cuves cylindriques jouent le rôle de pistons (*fig.* 130).

La tige A traverse un écrou, des cuirs et un cuir embout ferment hermétiquement la cavité intérieure d'un corps de en bronze dans lequel la pression nH à mesurer s'exerce par l'

médiaire du tube T; nHs est l'effort exercé sur la tête du piston et qui se transmet à la base B à raison de $nH\frac{s}{S}$ par centimètre carré; cette partie large B ferme une cuve cylindrique en fonte qui contient de l'eau et, sur une partie du fond incliné, du mercure; un tube latéral M, qui sert de manomètre, communique à cette partie de la cuve; enfin, le piston est séparé de l'eau à laquelle il transmet la pression par une mince membrane de caoutchouc qui empêche l'écoulement du liquide.

Fig. 129.



Soient h la hauteur du mercure soulevé dans le manomètre, nH et H la pression à mesurer et la pression atmosphérique exprimées en colonne de mercure; la pression sur la base du piston est :

1° De bas en haut :

$$(h + H)S;$$

2° De haut en bas :

$$nHs + H(S - s).$$

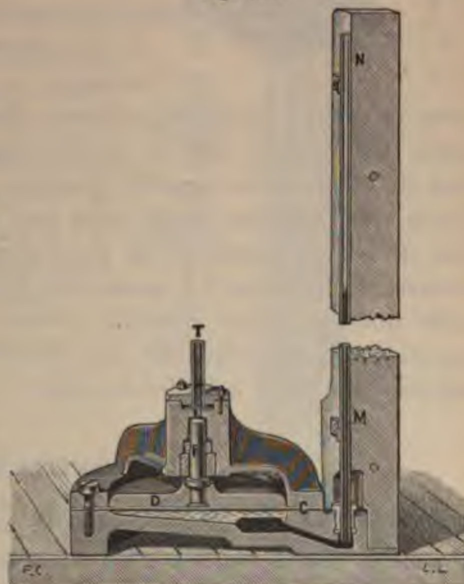
On a donc

$$(h + H)S = nHs + H(S - s)$$

ou

$$(n - 1)H = \frac{S}{s}h,$$

Fig. 130.



La hauteur du mercure soulevé est donc à celle qu'on mesurerait dans un manomètre à air libre dans le rapport de la section du petit piston à celle du grand.

Nous n'avons tenu compte, dans ce calcul, ni du poids du double piston, qui est négligeable, ni des frottements, qui sont considérables; cet appareil est beaucoup moins exact que l'instrument à pistons libres de M. Amagat.

121. — MANOMÈTRES MÉTALLIQUES.

Les manomètres métalliques de M. Bourdon sont formés d'un tube métallique de section elliptique (*fig.* 131), enroulé en spirale; le gaz ou la vapeur dont on veut mesurer la force élastique, le liquide dont on veut évaluer la pression sont admis dans l'intérieur du tube; ils y provoquent une déformation, le tube se déroule et une aiguille indicatrice se déplace devant un cadran qui porte une graduation tracée par comparaison.

Fig. 131.



122. — MANOMÈTRES CRUSHERS.

Les manomètres précédents exigent un certain temps pour se mettre en équilibre. Ils ne peuvent convenir à la mesure des pressions se produisant brusquement et pour un temps très court, comme celles que provoquent les explosions. On emploie dans ce cas des appareils basés sur un principe tout différent, qu'on appelle *crushers*. Un cylindre de cuivre de masse très faible est écrasé entre une pièce fixe et la tête d'un piston, de section connue et de masse également très faible, sur lequel s'exerce la pression. La masse des deux pièces est très réduite de sorte que les forces d'inertie n'interviennent pas d'une manière appréciable dans l'équilibre final. La pression se déduit de la déformation subie par le cylindre de cuivre.

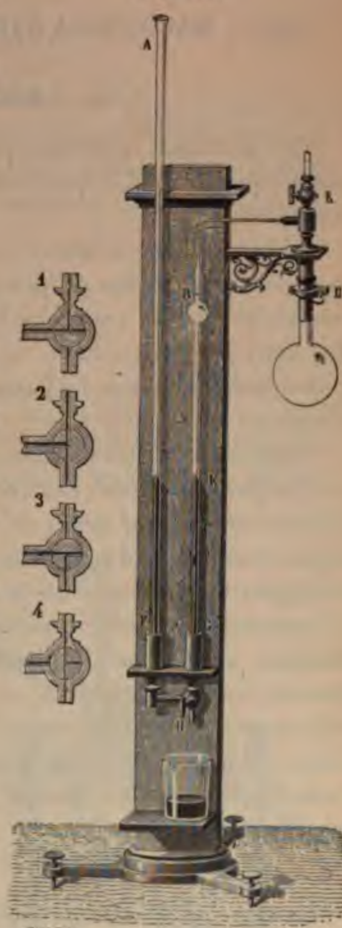
123. — VOLUMÉNOMÈTRE DE REGNAULT.

H. Say a proposé de déterminer le volume des corps en mesurant le volume de l'air qu'ils déplacent; cette méthode doit être employée dans les déterminations de densité, lorsqu'on ne peut pas mettre la substance en contact avec un liquide.

Regnault a fait construire un appareil destiné à ce genre de mesures : il se compose d'un ballon de 300^{cm^3} environ, relié à un manomètre dont la courte branche porte une boule vers la partie supérieure, encadrée entre deux traits de repère, qui (*fig.* 132) limitent un volume v jaugé avec soin; soit d'autre part V le volume du bal-

lon jusqu'au premier trait de repère du manomètre. Pour déterminer le volume x d'une substance, on la place dans le ballon et l'on fait monter le mercure au même niveau dans les deux branches du manomètre, jusqu'au trait de repère supérieur, le robinet E étant ouvert; on ferme ensuite ce robinet et l'on fait écouler du mercure de manière à amener le niveau au second trait; il s'établit une dénivellation h que l'on mesure en même temps que l'on fait une lecture de la hauteur barométrique H; on a ainsi toutes les données de l'équation

Fig. 132.



$$(V - x)H = (V - x + v)(H - h),$$

qui donnera

$$x = V - \frac{v(H-h)}{h}. \tag{1}$$

On obtient de suite une nouvelle valeur de x en ouvrant le robinet E et rétablissant le niveau du mercure en K; le volume de l'air est alors $V - x + v$ sous la pression H; on ferme le robinet E et l'on verse du mercure de manière à amener le niveau en B : le volume est devenu $V - x$ et la pression prend la valeur $H + h'$; par suite

$$(V - x + v)H = (V - x)(H + h'),$$

d'où

$$x = \frac{Vh' - vH}{h'}; \tag{2}$$

en éliminant H entre les équations (1) et (2) on a

$$x = V - v\frac{h}{h' - h}.$$

Ces appareils présentent de graves inconvénients. Tout d'abord ils ne peuvent servir pour les corps en poudre, et pour les poudres de guerre, usage auquel on les avait destinés; cette classe de corps jouit en effet de la propriété d'absorber l'air ou les gaz avec une plus ou moins grande énergie et d'une façon variable avec la pression. Il

en résulte que dans tous les cas la masse gazeuse sur laquelle on opère n'est pas constante; on reconnaît d'ailleurs infailliblement que cette circonstance se présente à ce que la pression change dans l'appareil avec le temps, et à ce que les valeurs de x trouvées par les deux méthodes indiquées ne sont pas les mêmes.

VIII. — MACHINES A RARÉFIER ET A COMPRIMER LES GAZ.

124. — MACHINES PNEUMATIQUES.

Les machines pneumatiques sont destinées à faire le vide dans un récipient; c'est-à-dire à en extraire l'air ou les gaz qui s'y trouvent contenus.

Réduite à ses éléments essentiels, une machine pneumatique se compose d'un corps de pompe dans lequel se meut un piston et du récipient où l'on veut faire le vide. Deux soupapes, s'ouvrant toutes les deux de bas en haut, se trouvent, l'une B à l'entrée du tube de communication, sur la base du corps de pompe; l'autre A sur un canal qui traverse le piston.

Supposons le piston au bas de sa course après le $(n-1)^{\text{ième}}$ coup; il ne s'appliquera jamais exactement contre le fond du corps de pompe et laissera au-dessous de lui un volume u appelé *espace nuisible*. Nous avons donc un volume d'air u à la pression extérieure H et dans le récipient un volume d'air R à la pression H_{n-1}. Soulevons le piston : la pression extérieure maintient la soupape A fermée et la pression diminue au-dessous du piston : la pression de l'air du récipient soulève la soupape B, mettant en communication le récipient et le corps de pompe. Quand le piston atteindra le haut de sa course, les deux masses d'air se seront mélangées dans le volume R + C, si C est le volume du corps de pompe. On aura, d'après la loi du mélange des gaz, la relation

$$RH_{n-1} + uH = (R + C)H_n.$$

La soupape B se ferme par son propre poids, le récipient est isolé et la pression y gardera la valeur H_n. Abaissons le piston; l'air comprimé dans le corps de pompe acquiert une pression un peu supérieure à la pression extérieure, soulève la soupape A et se répand au dehors; à partir de ce moment, la pression garde au-dessous du piston la valeur H.

Lorsque le piston sera arrivé au bas de sa course, la soupape A se

refermera. Alors nous aurons deux masses d'air, l'une dans l'espace nuisible ayant le volume u sous la pression H, l'autre dans le récipient, ayant le volume R sous la pression H_n.

La valeur limite de H_n sera atteinte si dans deux coups de piston successifs la valeur de H_n ne change pas ; si dans l'équation précédente nous supposons l'égalité $H_{n-1} = H_n$ réalisée, nous obtiendrons cette valeur limite

$$H_n = H \frac{u}{C}.$$

Il est facile d'ailleurs d'arriver à cette condition par un raisonnement direct. Une fois la limite atteinte, aucune quantité d'air ne peut passer du récipient dans le corps de pompe. Celui-ci sera rempli seulement par l'air occupant l'espace nuisible, qui acquerra la pression

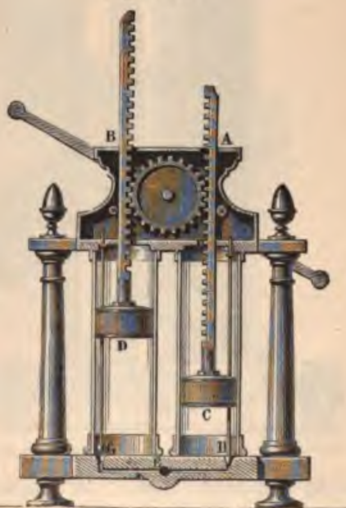
$$H \frac{u}{C};$$

c'est la limite cherchée.

125. — MACHINES A DEUX CORPS DE POMPE.

Quand la raréfaction de l'air dans le récipient est un peu avancée, la manœuvre du piston exige pendant l'ascension une dépense de travail relativement considérable. En effet, sur sa face supérieure, en sens contraire du déplacement, s'exerce la pression atmosphérique ; sur la face inférieure, s'exerce seulement la pression de l'air dans le récipient, qui est négligeable. En plus des frottements, il faut donc vaincre une force de 1033^g par centimètre carré. Pour un piston de 100^{cm^2} de surface et une course de $0^m,25$, le travail à fournir sera de 25^{kgm} environ.

Fig. 133.



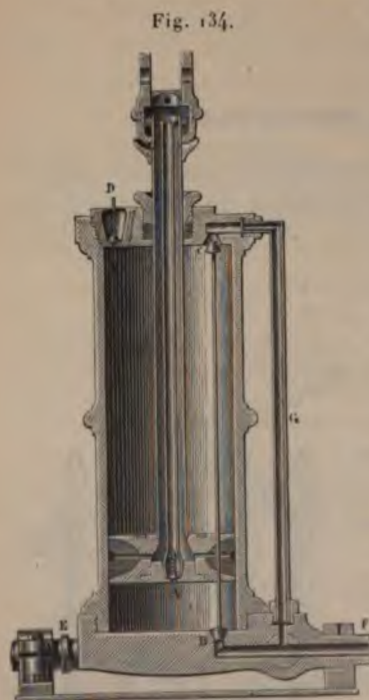
Pour remédier à cet inconvénient, Bayle et Papin ont imaginé d'accoupler deux corps de pompe dont les pistons commandés par une même manivelle à deux poignées (*fig.* 133) se déplacent en sens inverse. La somme des

travaux de la pression atmosphérique, qui sont égaux et de signe contraire sur les deux pistons, est nulle. Il ne reste à fournir que le travail correspondant à la différence des pressions s'exerçant sur les faces inférieures. Au début cette différence est très faible; elle augmente avec la raréfaction et elle est voisine d'une atmosphère vers la limite du vide, quand un piston vers le bas de sa course comprime l'air au-dessous de lui à la pression atmosphérique; mais il lui reste alors très peu de chemin à parcourir et le travail est aussi très faible.

126. — MACHINE DE BIANCHI.

On obtient le même résultat avec un seul corps de pompe, mais à double effet, comme dans la machine de Bianchi.

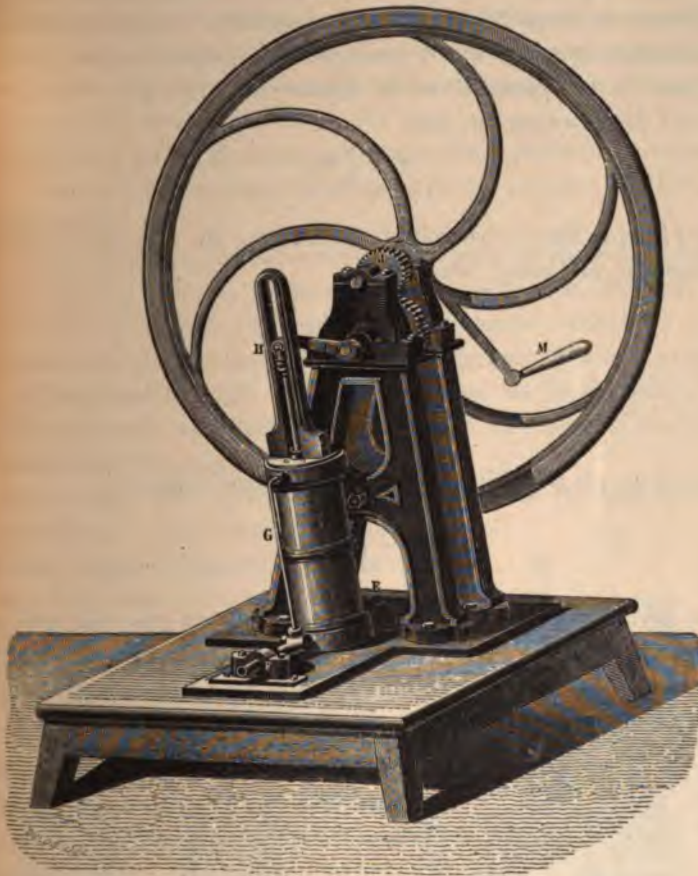
Fig. 134.



Le corps de pompe est relié au récipient par deux tubes C et B, qui traversent ses deux bases et se réunissent en F; l'un et l'autre peuvent être alternativement ouverts et fermés par une même tige munie à ses extrémités de soupapes coniques et qui est entraînée par le mouvement du piston; enfin il existe sur l'appareil (*fig.* 134) deux soupapes d'expulsion de l'air : l'une est sur le fond supérieur en D; l'autre dans le piston, en A, communique avec l'extérieur par la tige creuse qui transmet le mouvement à ce piston. Le piston étant en haut de sa course on l'abaisse, C est ouvert, B fermé, l'espace vide laissé au-dessus du piston est relié au récipient par le tube G; la soupape D reste fermée tandis que la soupape A sera ouverte quand l'air qui se trouvait dans le corps de pompe aura atteint au-dessous du piston la pression atmosphérique; la machine fonctionne en sens inverse quand le piston remonte, les soupapes qui étaient ouvertes se ferment et inversement. Quant au travail, il n'est pas plus pénible qu'avec une machine ordinaire, puisque la pression atmosphérique ne se fait pas

sentir sur les faces du piston; la limite du vide peut, d'ailleurs, être reculée par un robinet de Babinet placé à la jonction du tube G et du tube BF. La figure 135 montre comment on donne le mouvement au piston par l'intermédiaire d'un volant et d'une bielle guidée dans des glissières H; le corps de pompe est alors animé d'un mouvement

Fig. 135.



oscillation autour d'un axe EF; la tige F est creuse; on peut y [...]er un *caoutchouc à vide,* c'est-à-dire un tube épais, entoilé, dans [l'i]ntérieur duquel est une spirale métallique qui s'oppose à l'écrase[me]nt; ou bien encore on y mastiquera un tube de plomb un peu long [...]nt les mouvements, dans le voisinage de F, ne se transmettront [...]s jusqu'aux récipients fixes dans lesquels on fera le vide.

127. — PERFECTIONNEMENT DE BABINET.

Babinet a montré qu'en supprimant la communication de l'un des corps de pompe avec la machine et l'employant à extraire le gaz de l'autre, on peut reculer la limite du vide et faire le *vide du vide*.

Le corps de pompe A (*fig.* 136), d'espace nuisible u, sera mis en relation avec le corps B, dont l'espace nuisible, y compris les tuyaux de communication, est u_1. A peut être considéré comme faisant le vide dans le récipient B, et la limite du vide que l'on pourra atteindre dans l'espace u_1 sera

$$x = \frac{u}{C}H,$$

B faisait le vide dans le récipient; la limite y du vide qu'on pourra, en définitive, atteindre, sera

$$H_n = \frac{n_1}{C}x$$

ou

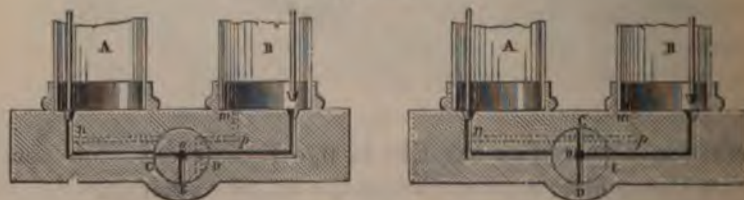
$$H_n = \frac{u_1}{C}\frac{u}{C}H,$$

ce qui, si u_1 est très voisin de u, revient sensiblement à

$$H_n = \left(\frac{u}{C}\right)^2 H.$$

Pour arriver à ce résultat, les corps de pompe peuvent communiquer par un second conduit mnp pratiqué dans la base des corps de pompe. Les deux tubes de communication sont commandés en même temps par un seul robinet à voies multiples dont la figure 136 fait

Fig. 136.



comprendre le fonctionnement; dans la position (1) les corps de pompe communiquent entre eux et, par le canal longitudinal O, avec le récipient; dans la position (2), le corps B communique seul avec

le récipient, tandis qu'une voie tracée dans le robinet sur le prolongement du canal *mnp* fait communiquer les deux corps directement.

128. — DÉTAILS DE CONSTRUCTION.

Organes accessoires : 1° Platine. — Le tube qui doit réunir le corps de pompe au récipient se termine par un pas de vis sur lequel on peut visser les ballons dans lesquels on peut faire le vide. Pour assurer l'étanchéité, on interpose une rondelle de cuir gras ou de caoutchouc entre les surfaces dressées qui viennent s'appliquer l'une contre l'autre.

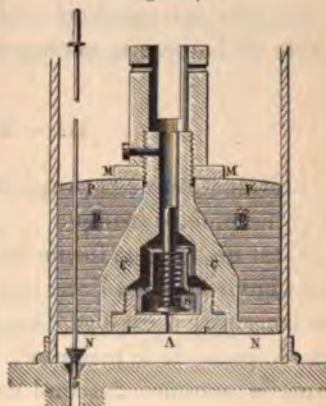
De plus le tube débouche au centre d'un plateau de verre douci, sur lequel on pourra faire adhérer avec du suif des cloches à bords bien rodés.

On préfère souvent aujourd'hui recouvrir le plateau d'une feuille de caoutchouc un peu épaisse, pour éviter l'emploi du suif; la pression atmosphérique s'exerçant sur la cloche l'applique contre le caoutchouc qui s'écrase légèrement et le joint devient hermétique.

2° **Soupapes et clefs.** — Les soupapes de la machine ont subi de nombreuses modifications et la figure 137 montre les dispositifs adoptés dans les machines actuelles.

La soupape qui sépare le corps de pompe du récipient est rendue automatique, ce qui assure la communication, même lorsque l'on est au voisinage de la limite du vide; c'est une pièce conique N, portée par une tige rigide qui passe à frottement dur à travers le piston; aussitôt qu'on abaisse celui-ci, ce cône se loge dans une ouverture conique *o* de même angle, qui commande le tube de communication et qui se trouve, par suite, fermée hermétiquement pendant la compression de l'air dans le corps de pompe; inversement, aussitôt que le piston remonte, la tige est entraînée et le tube est ouvert; la tige porte une rondelle fixe qui limite son mouvement en venant buter contre le fond supérieur du cylindre.

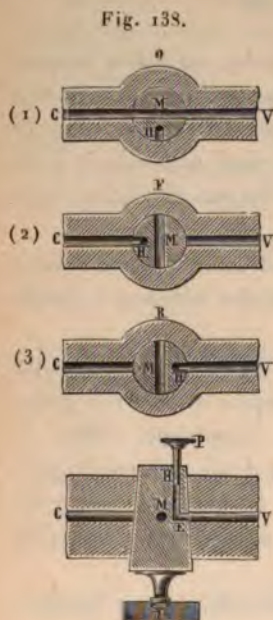
Fig. 137.



Le piston, formé de rondelles de cuir gras pressées entre deux lames NN, PP, métalliques, contient la soupape; sur une petite

ouverture A, repose une tige cylindrique B, à large tête, bien plane; la pression que le gaz doit atteindre pour s'échapper doit dépasser la pression atmosphérique puisqu'elle doit soulever le poids de ce clapet, toujours, d'ailleurs, très léger; la tige guide son mouvement et un ressort très faible assure le contact au repos.

Fig. 138.



La machine est munie d'une *clef* qui permet d'isoler le récipient et de rendre l'air dans les différents organes; elle est placée sur le tube de jonction CV; c'est un robinet traversé par un canal ordinaire M et qui porte en plus une voie coudée HE fermée par une cheville métallique P (*fig.* 138).

Dans la position (1), le robinet est *ouvert;* une lettre O gravée sur la clef apparaît sur sa face supérieure visible pour l'expérimentateur; dans la position (2) (lettre F visible), le récipient est *fermé* et l'air peut être rendu dans les corps de pompe; enfin, dans la position (3), apparaît la lettre R; c'est la position de *rentrée de l'air* dans la cloche qu'il ne serait pas possible de détacher de la platine avant cette opération.

Le vide est apprécié, soit à l'aide du baromètre tronqué, soit à l'aide du baromètre manométrique.

129. — BAROMÈTRE TRONQUÉ.

L'évaluation de la pression obtenue par les machines se fait à l'aide d'un baromètre tronqué.

C'est un tube en forme de siphon (*fig.* 139) de $0^m,20$ à $0^m,30$ de haut environ, dont l'une des branches, fermée, est entièrement pleine de mercure; il est logé dans une éprouvette de verre qui communique au récipient de la machine; lorsque le vide est fait, à un degré suffisant, le mercure descend dans la branche fermée et monte dans la branche ouverte; la différence de niveau mesure à chaque instant la pression; si le vide parfait était atteint, le niveau du mercure serait le même dans les deux branches au zéro de l'appareil.

130. — MACHINE DE COMPRESSION.

La machine de compression diffère de la machine pneumatique en ce que toutes ses soupapes fonctionnent en sens inverse.

Le récipient dans lequel on comprime les gaz est ordinairement métallique ; si l'on veut adopter un dispositif analogue à celui de la machine pneumatique, il faut remplacer la cloche par un cylindre de verre très résistant, solidement maintenu entre deux platines reliées par de fortes tiges filetées à leurs extrémités et munies d'écrous de pression.

Fig. 139.



La théorie de l'appareil est très simple.

Plaçons-nous après le $(n-1)^{\text{ième}}$ coup de piston, et proposons-nous de représenter par une équation ce qui se passe au $n^{\text{ième}}$ coup.

1° Le piston est au haut de sa course : l'air occupe le volume C du corps de pompe sous la pression extérieure H et le volume R du récipient sous la pression H_{n-1} ;

2° Le piston est au bas de sa course : les masses d'air précédentes sont ramenées à n'occuper plus que le récipient et l'espace nuisible u : la pression est devenue H_n, telle que

$$RH_{n-1} + CH = (R + u) H_n.$$

Un raisonnement analogue à celui que nous avons fait à propos de la machine pneumatique montre que la pression limite sera

$$H_n = \frac{C}{u} H.$$

Il est facile de retrouver ce résultat par le raisonnement direct. La limite sera atteinte quand l'air du corps de pompe, réduit au volume de l'espace nuisible, acquerra une pression égale à celle qui règne dans le réservoir : car il ne pourra alors s'introduire dans celui-ci. La simple application de la loi de Mariotte donne pour cette condition

$$uH_n = CH.$$

131. — POMPE A MAIN.

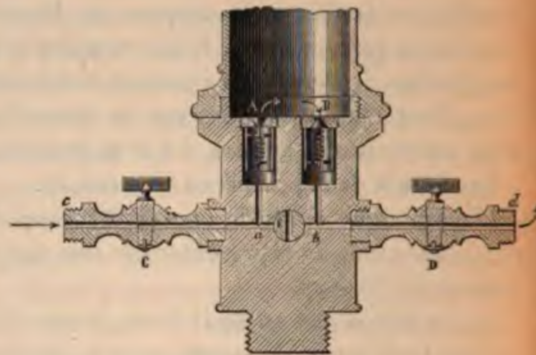
Les figures 140 et 141 montrent l'instrument très employé dans les laboratoires sous le nom de *pompe à main*. Elle est aspirante et

foulante; le piston est plein; les deux soupapes A et B fonctionnent en sens contraire; la première s'ouvre lorsqu'on soulève le piston : l'air remplit alors le corps de pompe à la pression atmosphérique, l'autre se ferme au même instant; pendant le refoulement la sou-

Fig. 140.



Fig. 141.



pape A se ferme et la soupape B s'ouvre; le tube d'aspiration *c* permet de mettre la pompe en relation, d'une part, avec un récipient d'où l'on soutire un gaz pur et sec, et le tube *d* de refoulement conduit, d'autre part, ce gaz dans un récipient où il se comprime; des robinets C et D permettent d'isoler les appareils de la pompe.

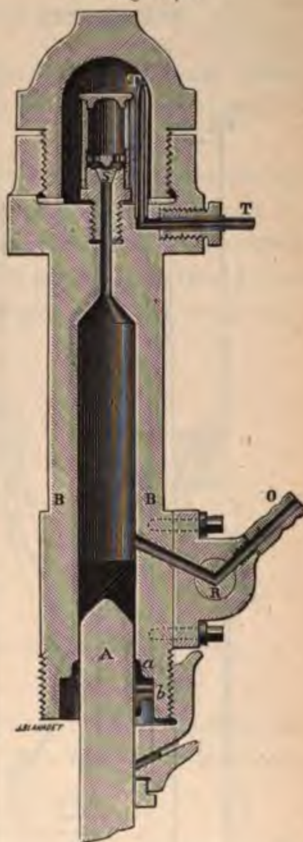
132. — SUPPRESSION DE L'ESPACE NUISIBLE.

On supprime l'espace nuisible et, par conséquent, on recule de beaucoup la limite de la raréfaction ou de la compression, en recouvrant la surface du piston d'un liquide non volatil, mercure ou huile lourde.

Telle est, par exemple, la pompe de compression imaginée par M. Cailletet qui permet de comprimer les gaz à 200^{atm}.

Le piston plongeur A (*fig.* 142) est recouvert d'une couche de mercure; un volant est attaché à une bielle dont l'extrémité inférieure met en mouvement un balancier doublement articulé; l'extrémité libre de celui-ci, qui décrit une ligne droite, imprime au piston un mouvement alternatif dans le cylindre B.

Fig. 142.



Le gaz comprimé s'échappe par la soupape en ébonite S; un robinet en acier R remplace la soupape d'aspiration; il est mis en mouvement par deux cames qui ouvrent et ferment, au moment convenable, le chemin que suit le gaz en arrivant par l'orifice O.

Pompe Fleuss-Géryk. — Le même artifice a été appliqué aux pompes de raréfaction et a permis d'obtenir avec des pompes mécaniques une pression ne dépassant pas $0^{mm},0002$ de mercure. Nous citerons à titre d'exemple la pompe « Fleuss-Géryk », dont la figure 143 représente la coupe : A est le tuyau d'aspiration relié au récipient d'une part, au corps de pompe en B d'autre part. Le piston est garni d'un cuir C s'appliquant contre les parois et formant le fond d'un espace annulaire dans lequel on a versé de l'huile J. A la partie supérieure du corps de pompe, la tige du piston traverse le couvercle par une boîte G qui porte également un cuir I qui s'applique contre la tige : la fermeture est rendue étanche par l'huile K qui recouvre le tout.

Quand le piston est tout au bas de sa course, le corps de pompe communique avec le récipient par B et A. On le soulève : cette communication est interceptée et l'air emprisonné au-dessus du piston est comprimé : sa pression fait s'appliquer le cuir C contre la paroi et empêche l'huile de passer sous le piston. Si cette pression devient suffisante, elle peut faire se soulever la soupape G, sinon cette sou-

pape est soulevée de $6^{mm},5$ par le piston quand il vient s'appliquer sur le fond supérieur du corps de pompe, l'air est expulsé et les deux masses d'huile J et K se réunissent, ce qui empêche toute rentrée d'air, bien que la soupape G soit ouverte. Cette dernière se ferme

Fig. 143.

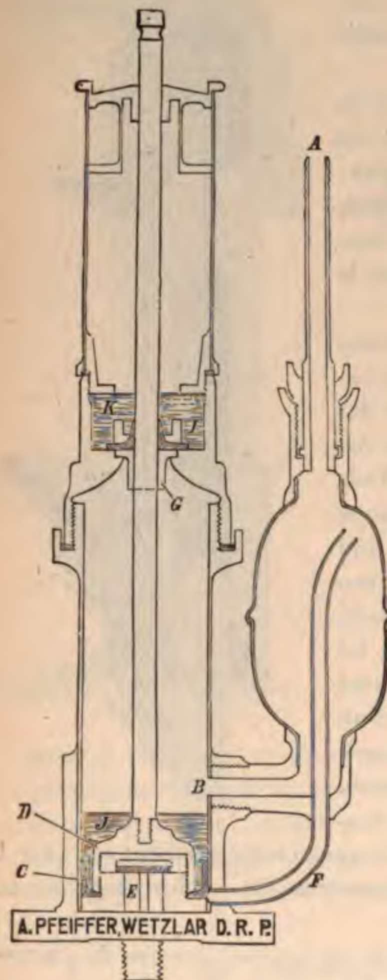
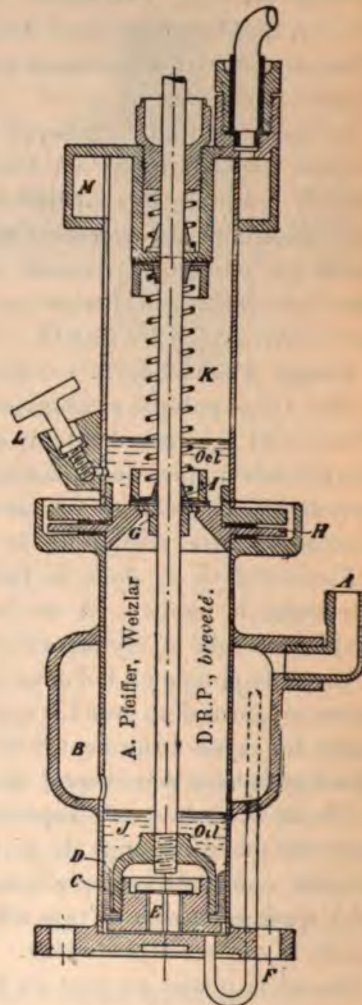


Fig. 143 *bis*.



seulement après que le piston est descendu de $6^{mm},5$ et, par suite, recouvert déjà d'une couche d'huile de cette épaisseur.

La soupape E et le tuyau F ne servent que dans le début et restent ensuite absolument inactifs.

La limite de pression réalisée est de $0^{mm},02$ de mercure, avec un seul corps de pompe et de $0^{mm},0002$ avec deux corps de pompe associés de manière que l'un d'eux fasse le vide dans l'autre, par un système analogue à celui de Babinet (*fig.* 143 *bis*).

133. — DÉPENSE DE TRAVAIL POUR LA COMPRESSION.

L'état d'un corps à chaque instant peut être représenté par la position d'un *point figuratif* B rapporté à deux axes rectangulaires Ov et Op (*fig.* 144).

Ce point se déplace-t-il sur une parallèle à l'axe des volumes, en BC, cela signifie que la pression étant maintenue constante un accroissement de température a provoqué un accroissement correspondant de volume; s'il se déplace de A en B sur une parallèle à l'axe Op, cela signifie que, le volume du gaz restant constant, on a augmenté la pression en élevant la température; enfin à des températures différentes correspondent des *isothermes* (*fig.* 145) dont les équations sont

Fig. 144.

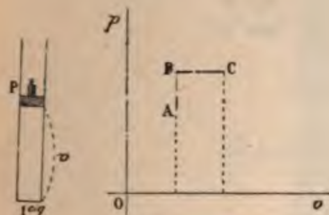
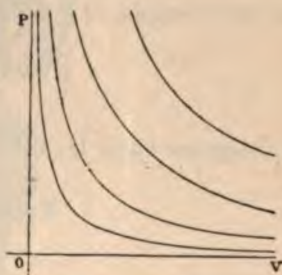


Fig. 145.



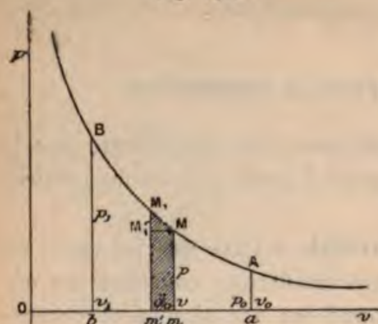
$$pv = p_0 v_0 (1 + \alpha t), \qquad (1)$$

avec des valeurs différentes de t.

Considérons un corps de pompe, ayant 1^{cm^2} de section (*fig.* 144), dans lequel est un gaz de volume v, limité par un piston qui supporte un poids P *sans cesse égal à la force élastique du gaz,* et proposons-nous de chercher la représentation géométrique et l'expression analytique du travail dépensé pour faire varier le volume de v_0 à v_1 *à température constante*. Ce travail est représenté par l'aire du trapèze curviligne (*fig.* 146) $AabA$; en effet, soient v le volume, à un instant donné, et M le point figuratif, lorsque le volume varie de

$-dv$, le travail $d\mathfrak{T}$, produit de la force par le déplacement dans sa propre direction, est représenté par $-pdv$; car dv mesure en même temps la variation de volume et le déplacement du piston, puisque la section est égale à l'unité; or pdv exprime l'aire Mmm_1M_1, à un infiniment petit du second ordre près, qui est lui-même représenté par l'aire du petit triangle $MM_1M'_1$; donc, en définitive, le travail total, lorsque le point figuratif se déplace de A en B, sera l'aire du trapèze $AabB$, et l'expression analytique de ce travail sera

Fig. 146.



$$\Sigma d\mathfrak{T} = -\Sigma p\, dv.$$

On peut remplaçer p tiré de (1)

$$\mathfrak{T} = -p_0 v_0 (1+\alpha t) \sum \frac{dv}{v},$$

et en intégrant entre les limites v_0 et v_1

$$\mathfrak{T} = p_0 v_0 (1+\alpha t) \operatorname{Log} \frac{v_0}{v_1},$$

le symbole Log représentant un logarithme népérien.

Ce calcul peut être appliqué à la mesure du travail dépensé dans les machines de compression ou dans les machines pneumatiques; il ne fait connaître qu'une limite inférieure de la véritable dépense, car le gaz s'échauffe beaucoup ou se refroidit dans le corps de pompe.

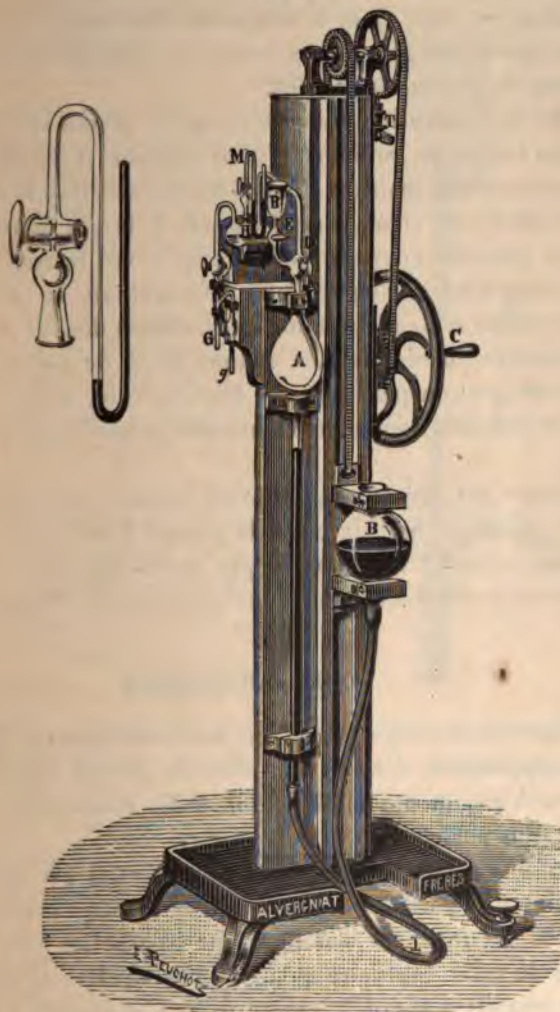
134. — MACHINE PNEUMATIQUE A MERCURE.

La machine pneumatique à mercure, dont les premiers modèles sont dus à Geissler, de Berlin (1857), a été perfectionnée, en France, par MM. Alvergniat; entièrement construite en verre, elle se compose d'un tube barométrique à large chambre A (*fig.* 147), reliée à un réservoir B, de même capacité, par un tube de caoutchouc entoilé.

Une chaîne, un système d'engrenages et une manivelle permettent d'élever ou d'abaisser à volonté le réservoir B le long d'un support

en bois. Le réservoir A est surmonté d'un robinet à trois voies D, lui permettant de communiquer alternativement en G avec le récipient dans lequel on veut faire le vide, en R avec l'atmosphère par l'intermédiaire du robinet E; entre G et D se trouve en H un réser-

Fig. 147.



voir à acide sulfurique concentré, destiné à dessécher l'intérieur de la pompe; enfin l'appareil porte un baromètre tronqué.

Pour donner un premier coup de piston, on ouvre E et l'on fait,

par le robinet D, communiquer A avec l'air extérieur. Le vase B, au bas de sa course, est plein de mercure sec; on l'élève jusqu'à ce que le mercure vienne remplir le récipient A, chasser tout l'air qu'il renferme, et qu'une goutte passe au-dessus du robinet E. Cela fait, on ferme ce robinet et l'on abaisse le réservoir B jusqu'au bas du support; le vide se fait en A. A ce moment on établit par le robinet D la communication entre A et le récipient dans lequel on veut faire le vide; une partie du gaz qui s'y trouve se répand en A; l'effet du premier coup de piston est produit.

La marche de l'opération pour les coups de piston suivants diffère un peu : on tourne le robinet D pour séparer A de G et le faire communiquer avec R, mais on laisse E fermé; on élève le réservoir B, le mercure monte et vient comprimer en A le gaz extrait du récipient par le premier coup de pompe; on ouvre le robinet E pour que le gaz comprimé s'échappe dans l'atmosphère, et on le referme aussitôt. La même série d'opérations s'effectuant dans le même ordre permet d'extraire du récipient, à chaque coup de pompe, une certaine masse de gaz; on peut pousser ainsi le vide, si le mercure est sec et si les robinets sont convenablement graissés, jusqu'au $\frac{1}{50}$ de millimètre.

Pour abréger ces opérations, toujours longues, un tube latéral *g* muni d'un robinet permet de relier la pompe à une trompe à eau ou à une pompe rotative de Bianchi, par exemple, avec laquelle on commencera la raréfaction jusqu'à une pression de 2^{cm} environ.

135. — POMPE SANS ROBINET.

Ces pompes ont reçu divers perfectionnements dont le plus important est la suppression des robinets dont la graisse salit le mercure à la longue. Voici la description, due à M. Karavodine, d'un des modèles les plus perfectionnés.

La partie supérieure de la sphère *a* (*fig.* 148) est étirée en un tube capillaire *b*, à parois épaisses, dont le diamètre intérieur est au plus de 3^{mm}. Ce tube est mastiqué sur une petite boule *c* qui se termine par le tube capillaire *d*. Lorsqu'on soulève le réservoir *g*, le mercure remplit d'abord la sphère *a*, se met ensuite à jaillir dans la boule *c* et, quand elle est pleine, il descend par le tube abducteur *d*. Comme l'angle de rencontre du mercure avec le tube capillaire est près d'un angle droit et que le mercure traverse ce tube avec une grande force, l'air ne peut pas y rester.

Lorsqu'en abaissant le réservoir g, le mercure descend dans la sphère a, il s'écoule lentement de la boule c dans a à travers le tube b et, quand il n'en reste qu'une faible colonne au-dessus du tube capillaire (3^{mm} à 4^{mm}), l'écoulement dans a cesse; même en secouant fortement l'appareil, on ne peut pas faire descendre tout le mercure de c dans a. Ainsi le vide moins parfait en c sera toujours séparé du vide plus parfait de la sphère a.

Fig. 148.



La sphère a est réunie à l'appareil dont on retire l'air par une soupape m. Elle est formée d'un petit cylindre de verre i pouvant nager librement à la surface du mercure à l'intérieur du tube m. A la surface supérieure du cylindre est mastiquée une petite lame de caoutchouc non vulcanisé. Le cylindre est soulevé par le mercure et vient s'appliquer par cette lame de caoutchouc contre le petit tube p, dont l'extrémité est bien plane et polie. Le diamètre de i est inférieur à celui du tube qui le contient, et aux extrémités de sa surface latérale se trouvent trois ou quatre petites saillies qui lui servent de guide et le maintiennent écarté des parois du tube qui le renferme. Grâce à cette soupape, le mercure ne peut entrer ni dans le dessiccateur n rempli de potasse caustique, ni dans l'appareil où l'on fait le vide et qui est mastiqué en v. Le dessiccateur est indispensable, sans lui les vapeurs d'eau se condensent dans la partie supérieure de la sphère a et il est impossible de s'en débarrasser, quelle que soit la durée de l'opération.

On ne doit pas mettre le tube de caoutchouc directement sur l'extrémité du tube o, car des bulles d'air s'élèveraient toujours dans la pompe. Pour les éviter on adopte un dispositif imaginé par M. Diakonoff : le tube o est enfoncé à l'aide d'un bouchon et de mastic dans un tube plus large h. L'air qui pénètre par le tube de caoutchouc se rassemble dans la partie supérieure du tube h, d'où l'on peut le faire sortir par le tube t en ouvrant la vis de serrage k.

Enfin le tube d par lequel s'écoule du mercure plonge dans le

mercure contenu dans le tube *e* élargi en bas. En *l* est soudé un petit tube qui se termine par une soupape *f* liée au réservoir *h* à l'aide d'un bouchon et de mastic. Lorsqu'on soulève le réservoir *g*, la pression en *h* augmente et la soupape *f* se ferme, de sorte que le mercure ne peut pas passer par le tube *e*; tandis que le mercure qui s'écoule de la petite boule *c* par le tube *d* s'accumule dans *e* et, lorsque le réservoir *g* descend, ouvre la soupape *f* et passe par *h* dans *g*.

A l'aide d'une petite pompe exigeant $8^{kg},5$ de mercure M. Karavodine a pu, en un quart d'heure, faire un vide de Crookes dans un tube de 35^{cm^3}, et en trois quarts d'heure le vide a été tel que le courant d'une bobine, donnant dans l'air une étincelle de 6^{mm} de longueur, ne passait pas du tout, quoique la distance entre les électrodes ait été de 3^{mm}.

136. — TROMPE A MERCURE.

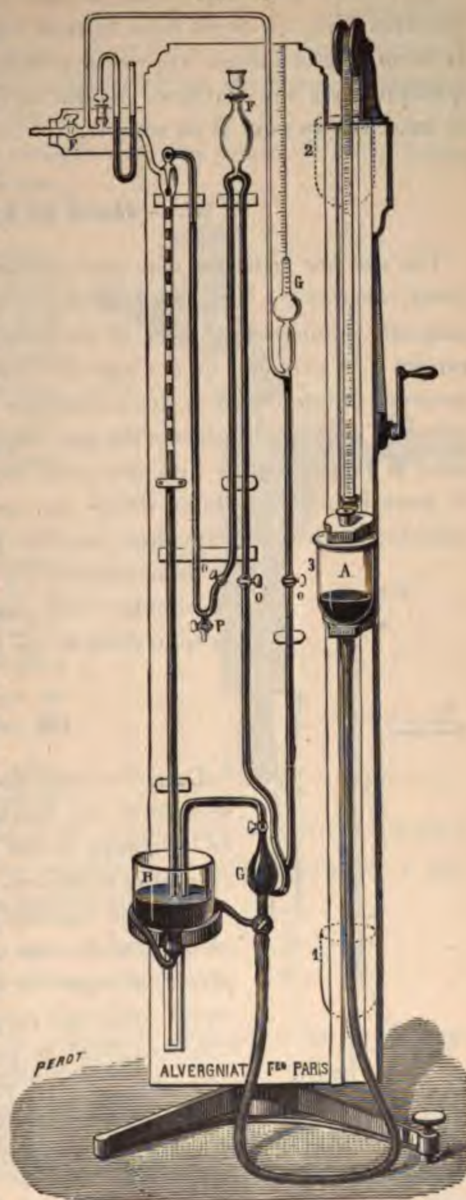
On peut obtenir un vide très parfait par l'emploi des trompes à mercure, dont l'invention est due à Sprengel. La figure 149 montre la forme que MM. Alvergniat ont donnée à cet appareil en le perfectionnant. C'est au point T que l'aspiration de l'air se produit. Du mercure s'écoule goutte à goutte et tombe dans une sorte d'entonnoir prolongé par un tube d'environ $1^m,50$ de hauteur; ces gouttes y forment un chapelet séparé par des bulles d'air qui proviennent de l'espace T; il suffit que celui-ci soit mis par le tube E en relation avec le réservoir dans lequel on veut faire le vide. La colonne de mercure et les bulles d'air qu'elle entraîne descendent peu à peu dans la cuve B où l'air s'échappe.

Pour amener le mercure qui doit s'écouler en T et qui provient du réservoir A, on le fait circuler dans les tubes T, P, H, G, courbés en U et en siphon.

On place d'abord le réservoir A en (1), on tourne le robinet R de façon à faire écouler le mercure de B en A, en en laissant cependant assez pour que le tube CB soit encore couvert, puis on donne au robinet une position telle que le mercure puisse se rendre de A à la trompe. On fait le vide, avec une pompe, dans toute la trompe par l'ouverture E, on plonge P dans du mercure et on l'ouvre; le mercure monte alors jusqu'au niveau H, dans ce tube en U, des deux côtés. On ferme le robinet qui se trouve au-dessus de P, on ouvre le robinet F et l'on soulève le réservoir A jusqu'en (2), on le soulève

même un peu plus haut à la main, de manière à remplir complètement de mercure le réservoir H jusqu'au-dessus du robinet F que l'on ferme alors. On amène le réservoir A à la hauteur convenable en (3) pour produire l'écoulement dans la trompe T, on ouvre doucement le robinet au-dessus de P, le mercure s'écoule par le tube de chute en T; on règle la vitesse au moyen du robinet O de façon à obtenir un chapelet de bulles d'air et de gouttes de mercure. Si le réglage est bien fait le mercure doit se déverser goutte à goutte en H; c'est en effet dans ce réservoir vide que le mercure doit se purger de l'air entraîné ou de l'air dissous de façon à n'arriver en T que parfaitement pur et sec; sans cette précaution chaque goutte de mercure abandonnerait en T de l'air en quantité bientôt égale à celle qu'elle devrait précisément entraîner et il y aurait une limite du vide. Il ne doit pas y en avoir d'autre que celle qui provient de la vaporisation du mercure. La tension de vapeur du mercure aux températures ordinaires est déjà très faible; mais on peut reculer encore cette limite en absorbant la vapeur de mercure par un tube à soufre ou à sélénium mis sur les tubes de jonction; on devra

Fig. 149.



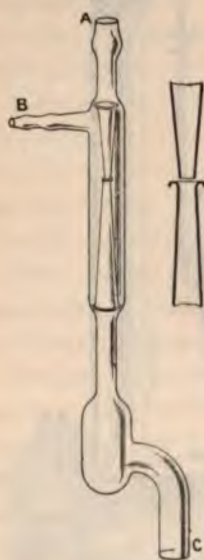
intercaler aussi un tube à acide phosphorique pour que les gaz soient parfaitement secs.

La trompe ne s'amorce que lorsque le vide est fait à quelques centimètres déjà; on devra donc faire le vide dans les réservoirs et dans la trompe elle-même, avec une pompe auxiliaire; la trompe est en quelque sorte automatique, il suffit de faire de temps en temps passer le mercure du vase B au vase A.

137. — JAUGE DE MAC-LEOD.

On voit sur la figure 149 une ampoule G; c'est la jauge de Mac-Leod, destinée à apprécier le degré de raréfaction des gaz. Cette ampoule communique avec le récipient, elle renferme donc du gaz raréfié à la pression qu'il s'agit d'évaluer. On ouvre le robinet O, le mercure monte dans les deux branches du tube en U, dont l'un constitue la jauge et y enferme du gaz; supposons que le mercure monte dans la jauge jusqu'à l'un des traits du tube étroit qui la surmonte et pour lequel le volume de ce gaz est réduit au $\frac{1}{500}$ de sa valeur initiale; sa pression devenue 500 fois plus grande sera mesurée par la dénivellation du mercure dans les deux tubes et, si celle-ci est, par exemple, de 5^{mm}, la pression initiale était de $\frac{1}{100}$ de millimètre.

Fig. 150.



138. — TROMPE A EAU.

Dans les laboratoires on ne fait plus guère le vide avec les machines pneumatiques : l'usage de la trompe à eau s'y est généralisé depuis une vingtaine d'années.

La pièce essentielle de ce petit appareil consiste en un double cône de verre dont les orifices sont placés en regard à une très faible distance; l'eau arrive sous une pression suffisante par le tube A (*fig.* 150); il se produit une vive aspiration de l'air dans le petit intervalle qui sépare les deux cônes : l'eau entraîne de très nombreuses bulles d'air qui lui donnent un aspect laiteux très particulier.

L'ajutage est entouré d'une enveloppe de verre fermée, munie d'une seule ouverture B qui sert à relier la trompe avec le récipient

dans lequel on veut faire le vide. Le tube d'écoulement de l'eau C s'ouvre sur le côté du fond du tube de la trompe; ce dispositif a été reconnu nécessaire pour faciliter l'aspiration de l'air au moment où la trompe commence à fonctionner; il est même bon, pour *amorcer* la trompe, d'attacher en C un caoutchouc de quelques décimètres qui plonge dans un vase plein d'eau.

Ces appareils peuvent être protégés dans des montures métalliques (*fig.* 151); l'appareil est alors fixé d'une façon définitive sur un robinet de conduite d'eau et la tubulure latérale est munie d'un robinet qui sert à isoler le récipient dans lequel on a fait le vide lorsque l'opération est terminée; on évite, en le fermant avant l'arrêt du courant d'eau, que celle-ci soit projetée dans le récipient vide.

Fig. 151.



On obtient très rapidement, avec ces instruments, une raréfaction correspondant à la tension de la vapeur d'eau, à condition que la pression de l'eau soit d'environ 12^m. Avec une colonne d'eau de 12^m, on pousse le vide à 75^{cm} environ, en 6 minutes dans un récipient de 1^l; la vitesse avec laquelle le gaz est aspiré dépend d'ailleurs de la pression de l'eau et est avec celle-ci comme le montrent les nombres suivants empruntés à une notice des constructeurs Alvergniat frères :

Colonnes d'eau................	15^m	20^m	25^m	30^m
Vide dans un récipient de 10^l en	25^m	20^m	18^m	15^m

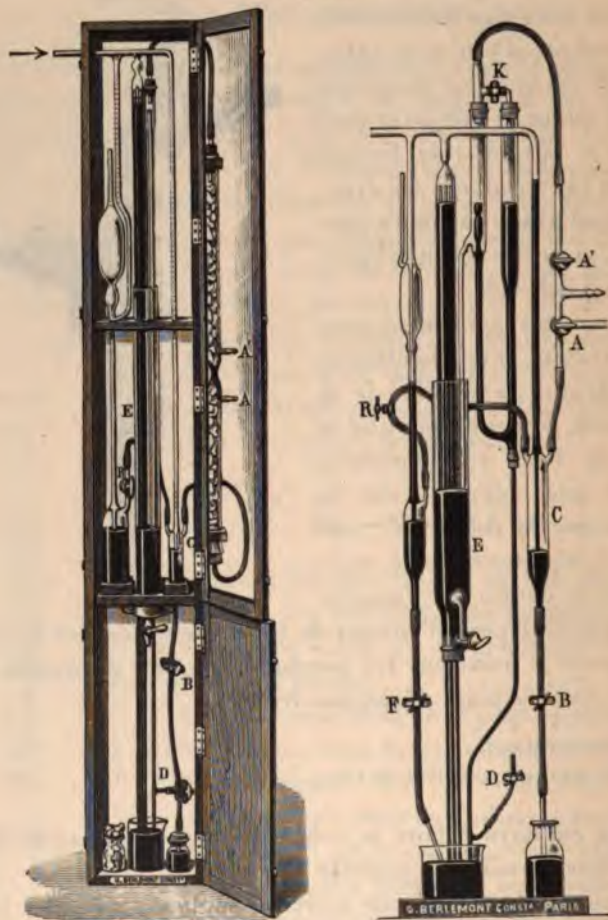
Le temps employé à faire le vide et la dépense d'eau sont exactement proportionnels à la capacité à vider.

La hauteur de la colonne de mercure soulevée n'est pas proportionnelle à la hauteur de la chute d'eau, elle dépend de la construction de la trompe : MM. Alvergniat ont pu construire une trompe qui, fonctionnant avec une colonne d'eau de 2^m seulement, soulève une colonne de mercure de 35^{cm}.

139. — TROMPE A MERCURE DE BERLEMONT ET JOUARD.

Sous la forme qui vient d'être décrite la trompe à mercure prése des inconvénients qui en rendent le maniement très délicat. Elle fragile et le nettoyage en est difficile. Elle comporte des robir nombreux, qui exigent beaucoup de soins : il est indispensable de

Fig. 152.



graisser et le mercure se salit assez rapidement au contact des grais de plus celles-ci émettent, quand la raréfaction est déjà avancée, vapeurs qui élèvent la limite de pression qu'on peut atteindre.

La construction imaginée par MM. Berlemont et Jouard suppr

la plupart de ces inconvénients. Les tubes de chute sont droits (*fig.* 152) et indépendants du reste de la trompe, ce qui permet de les démonter facilement, soit pour les nettoyer, soit pour les remplacer. Le mercure leur est fourni par un système de deux vases communicants concentriques : un manchon E, fermé à sa partie inférieure par un bouchon que traversent les tubes de chute; une cloche qui recouvre les chutes et communique à sa partie supérieure avec le récipient à vider, tandis que sa partie inférieure plonge dans le mercure qui remplit le manchon. Par un dispositif que nous allons décrire, on commence à faire le vide à l'aide d'une trompe à eau. Le mercure monte dans la cloche, et l'on règle la quantité de mercure de manière que, la trompe ayant atteint sa limite d'action, le liquide atteigne les ouvertures pratiquées dans la paroi des tubes de chute à 2^{cm} environ de leur extrémité supérieure : il s'écoule alors par ces ouvertures et la trompe est amorcée.

A gauche on aperçoit une jauge de Mac-Leod ; à droite un ensemble de pièces qui permet d'utiliser la trompe à eau reliée à la tubulure placée entre A et A′ d'abord pour faire le vide, ensuite pour assurer le remontage automatique du mercure. Un tube vertical, communiquant par son extrémité supérieure avec le récipient et les chutes, pénètre à sa partie inférieure par une double soudure jusque vers le fond d'une ampoule C. Cette ampoule porte trois tubulures : une tubulure inférieure, reliée à un tube vertical plongeant dans un flacon plein de mercure, et comprenant un tube de caoutchouc qu'on peut fermer en l'écrasant par la pince B; deux tubulures latérales, l'une reliée à la jauge, l'autre aboutissant au robinet à trois voies A qui peut la faire communiquer avec la trompe à eau (position 1) ou avec l'extérieur (position 2).

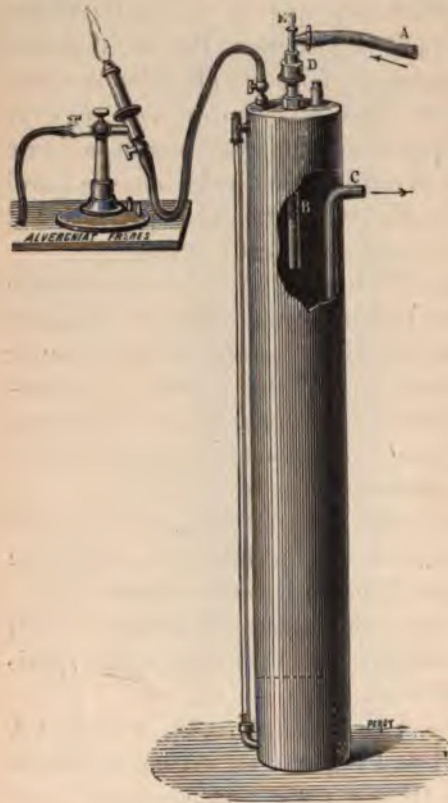
Au début, l'ampoule C est vide et la pince B fermée : le robinet A est en position 1 ; le tube central de l'ampoule est dégagé et met en communication le récipient et la trompe à eau : on commence ainsi à faire le vide comme il a été dit

On ouvre la pince B de manière à faire monter lentement le mercure dans l'ampoule C, puis on la referme. Ensuite on met lentement le robinet A en position 2 : la pression de l'air extérieur fait monter le mercure dans le tube central. Ce tube joue ainsi le rôle d'un manomètre et en même temps d'obturateur; le mercure qu'il renferme isole complètement la trompe de l'extérieur.

On ouvre le robinet A : l'air est aspiré par le tube D et l'on peut régler sa vitesse à l'aide de la pince et du caoutchouc. On produit ainsi

une diminution de pression qui soulève le mercure jusqu'au du tube D. Ce mercure est divisé en gouttes par l'air qui ar ce tube et entraîné avec lui jusque dans la partie supérieu trompe. Dans les modèles primitifs, le mercure se déversait ment dans le manchon alimentant les chutes; mais il arriv vent qu'il entraînait des bulles d'air qui taient ensuite dans pient. Pour éviter cet vénient, on a interpos trajet un purgeur : c portion de tube élarg vide est fait par la t eau.

Fig. 153.



Le caoutchouc et l K permettent d'ob gauche, dans le pur pression limite de la et, à droite, de régler tion à la valeur qui au remontage.

140. — TROMPE SOUFF

Si l'on recueille dan servoir fermé l'air par une trompe aspi peut y acquérir une assez grande pour puisse ensuite l'utili production d'un cour continu ou à l'alim d'un chalumeau. C'est ainsi que sont construites les trompes so de M. Lionet, dont la figure 153 fait comprendre le fonction

L'eau, amenée sous pression par le conduit A, produit en aspiration d'air et s'écoule en B dans un grand cylindre o sépare de l'air entraîné. L'air se réunit dans la partie supéri la pression augmente successivement; un robinet permet d échapper ce gaz; l'eau réunie dans la partie inférieure en est par la pression de l'air à travers le tube de déversement C.

IX. — ÉCOULEMENT DES LIQUIDES.

141. — PRINCIPE DE TORRICELLI.

Les divers modes d'écoulement des liquides sont tous régis par une loi, due à Torricelli qui l'a découverte *par l'expérience*, et dont voici l'énoncé :

Quand un liquide s'échappe par un orifice percé en mince paroi, sa vitesse, à la sortie de cet orifice, est égale à la vitesse acquise par un corps qui tomberait dans le vide, depuis la surface libre jusqu'au centre de gravité de l'orifice; elle est donnée par la relation

$$v = \sqrt{2gh},$$

h étant la distance verticale du centre de gravité de l'orifice au niveau libre du liquide considéré.

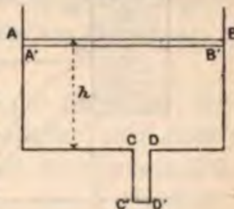
Le principe de Torricelli ne peut pas être établi théoriquement d'une façon suffisamment rigoureuse.

On n'en peut donner que des démonstrations approchées.

La suivante, due à Bernoulli, est une application du théorème des forces vives.

Soit un vase percé à sa base d'un orifice CD que nous supposerons très étroit par rapport aux dimensions de la surface libre AB du liquide (*fig.* 154); imaginons que l'écoulement soit devenu permanent, et représentons par CD, C'D' la masse du liquide écoulée pendant un temps très court θ; le niveau AB est venu en A'B'.

Fig. 154.



Le travail de la pesanteur se réduit à mgh, m étant la masse du liquide qui a passé de ABA'B' en CDC'D', g l'intensité de la pesanteur, et h la distance parcourue par cette masse.

L'accroissement de force vive se réduit de même à $\frac{1}{2}mv^2$, v désignant la vitesse à la sortie; on peut admettre en effet que les molécules de A'B'CD ont et la même vitesse et la même position au bout du temps très court θ, et que la variation de force vive de ABA'B' est négligeable; la vitesse u de cette partie est négligeable puisqu'elle est à la vitesse v de sortie

dans le rapport des sections CD et AB, rapport que nous avons supposé très petit. On a donc

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mgh$$

ou

$$v = \sqrt{2gh};$$

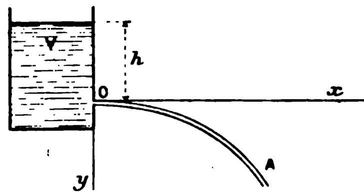
h s'appelle *la charge du liquide.*

Toutefois, à défaut de démonstrations absolument rigoureuses, il existe de nombreuses vérifications expérimentales dont voici les principales.

142. — VÉRIFICATIONS EXPÉRIMENTALES.

1° *Le jet qui s'échappe horizontalement doit être parabolique;* en effet, si, dans un vase vertical V (*fig.* 155), nous perçons un orifice *en mince paroi* à une distance h du niveau libre, la vitesse de sortie est horizontale, puisque l'écoulement doit avoir lieu sous l'influence de la pression et que celle-ci est normale à la paroi; cette vitesse est égale à $\sqrt{2gh}$: elle est donc indépendante du temps; si, par un artifice quelconque, nous rendons h invariable, v sera constante; le moment suivant Ox sera uniforme :

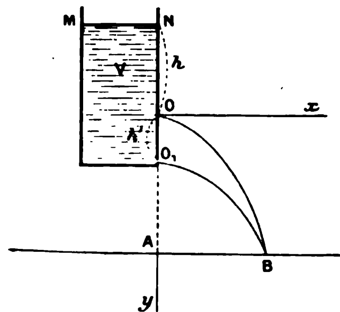
Fig. 155.



$$u = \sqrt{2gh} \times t;$$

les molécules liquides étant pesantes, on aura, suivant Oy, en vertu des lois de la chute des corps,

Fig. 156.



$$y = \frac{1}{2}gt^2;$$

éliminant t entre ces deux équations, on voit que la trajectoire sera une courbe définie par

$$(1) \qquad x^2 = 4hy;$$

c'est l'équation d'une parabole.

2° Si, dans l'équation (1), nous changeons h en y et y en h, x reste le même. Nous avons là le point de départ d'une nouvelle expérience de vérification.

Prenons (*fig.* 156) un vase V percé de deux trous O et O_1. Cher-

chons en quel point se rencontreront les deux paraboles issues de O et O_1.

En O, prenons deux axes de coordonnées; nous avons

$$x^2 = 4hy;$$

la parabole, ayant son sommet en O_1, aura pour équation

$$x^2 = 4(h + h')(y - h');$$

ces deux courbes se couperont en un point B dont l'ordonnée s'obtiendra en égalant les deux valeurs de x^2.

On trouve ainsi pour l'ordonnée du point B

$$y = h + h'.$$

Donc, si l'on place le vase V au-dessus d'un plan horizontal tel que OA = ON, les deux jets paraboliques arriveront au même point B de ce plan.

Ces conclusions se vérifient approximativement avec l'eau et les liquides de faible densité. Torricelli employa le mercure, liquide lourd, vis-à-vis duquel la résistance de l'air a moins d'importance; les vérifications sont alors susceptibles d'une précision beaucoup plus grande.

143. — DÉPENSE.

Les expériences précédentes ne vérifient que la proportionnalité des vitesses d'écoulement et des racines carrées des charges. Si le niveau libre du liquide reste constant, le volume écoulé pendant le temps t par un orifice S devrait être, pour que la loi soit confirmée, svt ou $st\sqrt{2gh}$; ce débit de liquide est ce qu'on appelle *la dépense;* or la dépense *réelle* est bien inférieure à la dépense *théorique,* elle en est environ les deux tiers.

C'est qu'à la sortie les filets liquides ne sont pas parallèles; ils ne forment pas un cylindre comme nous l'avons imaginé, mais bien un cône; *la veine est contractée* et la dépense réelle correspond à la *section contractée* de la veine, et non pas à la section de l'orifice.

Le coefficient par lequel il faut multiplier la dépense théorique pour obtenir la dépense réelle ou *coefficient de dépense* varie avec les dimensions de l'orifice, et avec la nature du liquide.

144. — AJUTAGES, PERTE DE CHARGE.

Nous avons supposé, dans tout ce qui précède, l'orifice d'écoulement percé en *mince paroi*. Or, en général, c'est toujours par des *ajutages*, c'est-à-dire par des orifices tubulaires de formes diverses, que, dans la pratique, les liquides s'écoulent.

L'expérience a fait voir que, quand un liquide s'écoule par un long ajutage cylindrique, horizontal, dont l'axe est à un niveau h au-dessous de la surface libre du liquide dans le récipient, au lieu d'avoir, à la sortie, une vitesse $v = \sqrt{2gh}$, la vitesse est donnée par la formule

$$v = \frac{1}{m}\sqrt{2gh},$$

dans laquelle m est un coefficient toujours plus grand que l'unité.

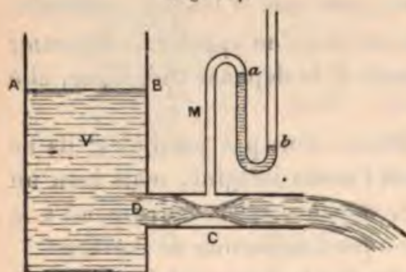
Tirons h de cette équation ; nous aurons

$$h = \frac{mv^2}{2g};$$

la hauteur correspondant à l'écoulement en mince paroi avec une vitesse v est plus grande avec un ajutage, une partie de la pression à l'orifice intérieur est donc inutile, et il y a, comme disent les hydrauliciens, *perte de charge* par l'écoulement.

L'expérience montre en outre que, toutes les fois qu'un liquide s'écoule par un ajutage cylindrique (*fig.* 157), la *veine liquide* s'étrangle à un certain endroit c de l'ajutage, peu éloigné de l'orifice intérieur D. Si, à cet endroit, nous branchons sur l'ajutage un tube manométrique M, nous voyons une raréfaction se produire, qui se traduit par une différence de niveau constante ab, égale à peu près aux *trois quarts* de la hauteur DB $= h$ qui produit l'écoulement.

Fig. 157.



Si donc, en ce point c, on perce un trou dans l'ajutage, il y aura, par ce trou, un appel d'air constant : c'est le principe des *trompes*.

L'étude complète de l'écoulement des liquides par des orifices de

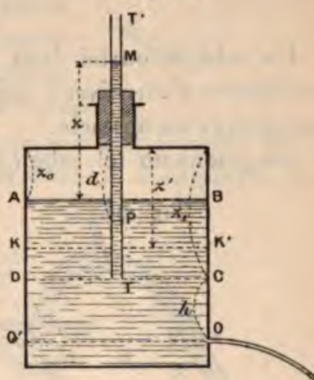
formes quelconques constitue un des problèmes les plus délicats de l'*Hydrodynamique*.

145. — VASE DE MARIOTTE.

Mariotte a imaginé un dispositif simple, extrêmement employé, et qui permet d'avoir, avec la plus grande facilité, un écoulement à vitesse constante, malgré la diminution de la hauteur h du liquide dans le récipient qui se vide.

Ce dispositif consiste en un flacon (*fig.* 158) dont le goulot est fermé par un bouchon traversé par un tube TT'. Le flacon, au commencement de l'expérience, contient de l'eau jusqu'à un niveau AB et le tube est rempli jusqu'en M. Un orifice O, percé à la partie inférieure du vase, plus bas que l'extrémité T du tube, est supposé bouché au commencement de l'expérience.

Fig. 158.



Dans ces conditions, l'air intérieur est à une pression égale à $H + z$, H étant la pression atmosphérique exprimée en colonne du liquide. Si nous ouvrons l'orifice O, en vertu de cette surpression, le liquide commencera à couler avec une vitesse décroissante, car, le niveau AB baissant, le tube se vide. Le liquide baisse dans le tube jusqu'à ce que l'air arrive jusqu'en T. Alors une bulle remonte au sommet du flacon, s'échappant de l'orifice T et l'écoulement devient constant, avec une vitesse $v = \sqrt{2gh}$.

Les conditions indiquées sur la figure sont les conditions initiales du problème. Cherchons la loi générale qui régit le fonctionnement du vase de Mariotte.

Supposons que, à un instant quelconque, le liquide soit arrivé en KK' dans le vase et en P dans le tube; la loi de Mariotte nous donne

$$z_0(H + z) = z'(H + z' - d);$$

nous pouvons, de là, tirer z' en fonction de d, c'est-à-dire savoir à quelle distance du sommet du flacon se trouvent, à un instant donné, les niveaux dans le vase et dans le tube.

Le niveau baisse simultanément dans le vase et dans le tube.

$z' - d$ finira par s'annuler, et, à ce moment, nous aurons

$$z_0(H + z) = H z',$$

ce qui nous donne

$$z' = z_0 + z_0 \frac{z}{H}.$$

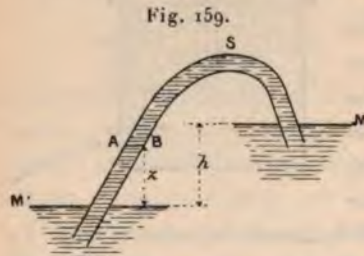
Quand cette relation est satisfaite, la pression sera la même dans le flacon et à l'intérieur du tube; mais, ce dernier se vidant plus vite que le vase, le niveau arrivera en T, et alors l'air rentrera, et l'écoulement se fera avec la vitesse constante $v = \sqrt{2gh}$.

146. — SIPHON.

Un tube recourbé deux fois à angle droit permet de transvaser un liquide d'un niveau supérieur à un niveau inférieur, en passant par-dessus un obstacle.

Imaginons un tel tube (*fig.* 159) plein de liquide, et concevons une paroi interposée en AB à travers le tube.

Fig. 159.



Les pressions étant toutes exprimées en colonnes du liquide à transvaser, cette paroi supportera de haut en bas une pression

$$H + h - z,$$

H étant la pression extérieure au niveau M. De bas en haut, la pression sur AB sera $H' - z$, H' étant la pression extérieure au niveau M'.

La différence de ces deux pressions sera

$$h + H - H';$$

or $H - H'$ est égale à $h\left(1 - \frac{d'}{d}\right)$, d' et d étant les densités du milieu ambiant et du liquide. Donc :

Si $d' < d$, c'est-à-dire si le liquide est plus dense que le milieu, il y aura écoulement de M vers M';

Si $d' > d$, l'écoulement aura lieu en sens inverse;

Si $d' = d$, il y a équilibre, et l'écoulement n'a pas lieu.

147. — AMORÇAGE.

Nous avons supposé le tube plein de liquide, au commencement de l'expérience. Cette condition peut être satisfaite de plusieurs manières :

1° *Par aspiration.* On aspire, en M', l'air contenu dans le tube : le liquide monte en M. Ceci nous montre que la plus grande hauteur que puisse avoir le sommet S du siphon au-dessus du niveau M est celle de la colonne liquide qui mesure la pression extérieure.

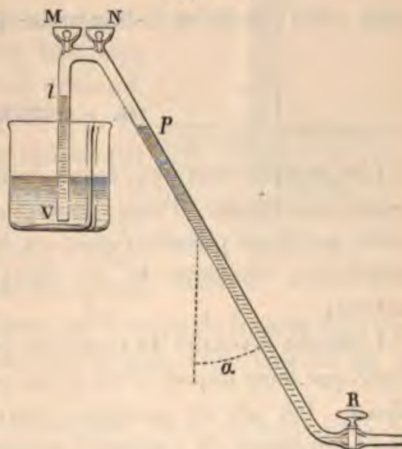
Fig. 160.



2° *Par remplissage direct,* comme le montre la figure 160. Ce procédé s'applique aux siphons étroits : quand le siphon est rempli, on bouche la petite branche avec le doigt et on le retourne sur le niveau M. L'écoulement continue de lui-même.

3° Aucun de ces deux procédés n'est applicable aux liquides corrosifs; on a alors recours à un artifice qui consiste à employer le liquide même introduit dans la grande branche pour raréfier l'air contenu dans la petite.

Fig. 161.



Le siphon (*fig.* 161) est muni, à sa partie inférieure, d'un robinet R, et, à son sommet, de deux petits entonnoirs qu'on peut fermer par des bouchons coniques M et N. Fermons le robinet, ouvrons N, et versons-y du liquide jusqu'à remplir la grande branche : l'air de cette branche s'échappe par l'orifice M, laissé ouvert; fermons les deux bouchons et ouvrons le robinet : l'écoulement se produira, si la longueur de la branche P est suffisante.

Désignons par l la longueur de la petite branche, que nous supposerons verticale, et par L celle de la grande branche, et par H la pression extérieure, évaluée en colonne du même liquide.

La masse d'air, qui occupait la longueur l sous la pression H, aura une longueur x maxima quand la pression du côté du vase V sera elle-même minima, c'est-à-dire quand l'extrémité postérieure de la

bulle d'air sera en N; on aura alors

$$(1) \qquad Hl = x(H - l).$$

Il reste donc, dans la grande branche, une colonne liquide de longueur $L - x$; la pression transmise du côté opposé au vase V est

$$H - (L - x)\cos\alpha = F;$$

remplaçons x par sa valeur tirée de (1), il vient

$$F = H - \left(L - \frac{Hl}{H - l}\right)\cos\alpha;$$

pour que l'écoulement continue, il faut que F soit inférieur à $H - l$. Donc, on doit avoir

$$L - \frac{Hl}{H - l} > \frac{l}{\cos\alpha}$$

ou

$$L > \frac{l}{\cos\alpha} + \frac{Hl}{H - l}:$$

telle est la condition de longueur que doit remplir L.

148. — POMPE ASPIRANTE.

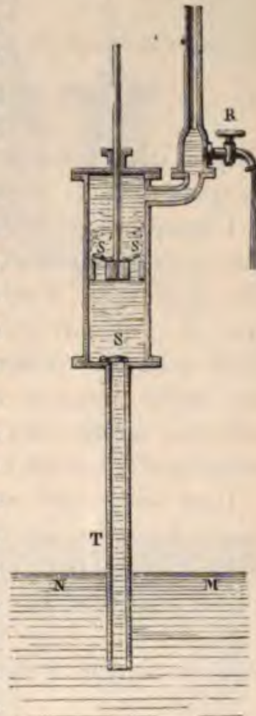
Les pompes sont des engins destinés à élever l'eau en utilisant du travail mécanique. Toutes fonctionnent par application de la théorie de la machine pneumatique; on les classe en pompes *aspirantes* et *foulantes*, chacune de ces deux catégories comprenant plusieurs variétés.

L'organe essentiel de toutes les pompes est un *corps de pompe* cylindrique dans lequel se meut un piston actionné par une force extérieure. Un jeu de soupapes convenablement disposées permet le fonctionnement de l'appareil suivant l'usage auquel il est destiné.

Un piston (*fig.* 162), percé de deux trous verticaux, fermés par deux soupapes S', S', qui s'ouvrent de bas en haut, se meut dans un corps de pompe qui fait suite à un *tuyau d'aspiration* T; ce tuyau plonge dans l'eau qu'il s'agit d'élever; à l'endroit où ce tuyau débouche dans le cylindre se trouve une *soupape dormante* S, qui s'ouvre de bas en haut. A la partie supérieure du corps de pompe, on voit à droite un *tuyau de déversement*.

Supposons le piston au bas de sa course et le tuyau d'aspiration plein d'air à la pression atmosphérique. Dès que le piston se soulève, il laisse au-dessus de lui un vide dans lequel pénètre l'air du tuyau T, en soulevant la soupape S. Ce vide maintient d'ailleurs fermées les deux soupapes S′. Quand le piston redescend, la soupape S se ferme, le piston comprime l'air au-dessous de lui, jusqu'à ce que, la force élastique de cet air devenant supérieure, par la compression, à la pression atmosphérique, soulève les soupapes S′ et lui permette de s'échapper dans l'atmosphère.

Fig. 162.



C'est donc, en somme, une machine pneumatique qui fait le vide dans le tuyau T. A mesure que le vide se fait dans ce tuyau, l'eau y monte sous l'action de la pression atmosphérique; elle finit, si la longueur du tuyau T est inférieure à la colonne d'eau qui équilibre la pression extérieure, c'est-à-dire théoriquement à $10^{m},33$ et pratiquement à 8^{m}, à cause des *espaces nuisibles* et des fuites, par atteindre le corps de pompe et, alors, la pompe est *amorcée*. Pendant que le piston descend, il comprime au-dessous de lui l'eau qui est entrée dans le corps de pompe, la chasse par les soupapes S′ et, pendant qu'il remonte, il la soulève jusqu'à l'orifice R par où elle s'écoule. A partir du moment où l'eau a pénétré dans le corps de pompe, chaque fois qu'on soulève le piston on rejette au dehors un volume de liquide égal à la différence entre le volume du corps de pompe et le volume de la partie pleine du piston.

Si nous appelons H la pression extérieure, V le volume *utile* du corps de pompe (différence entre sa capacité et le volume de la partie pleine du piston), s la section du tuyau et h sa hauteur au-dessus du réservoir inférieur, le premier coup de piston occasionnera une raréfaction; l'air inférieur sera à une pression $H - x_1$, et, si toutes les pressions sont mesurées en hauteurs du liquide soumis à l'expérience, x_1 représente l'ascension du liquide dans le tuyau T après ce premier coup de piston.

La loi de Mariotte nous donne

$$(1) \qquad slH = [s(l - x_1) + V](H - x_1);$$

après le second coup, l'ascension x_2 sera donnée par

$$(2) \qquad s(l - x_1)(H - x_1) = [s(l - x_2) + V](H - x_2),$$

et, après n coups de piston,

$$(3) \qquad s(l - x_{n-1})(H - x_{n-1}) = [s(l - x_n) + V](H - x_n);$$

on peut donc calculer de proche en proche les ascensions $x_1, x_2, \ldots, x_n$ après 1, 2, ..., n coups de piston.

L'équation générale (3), qui est du second degré en x_n, fait voir que, si l'on connaît x_{n-1}, on aura toujours possibilité de calculer x_n. En appliquant, d'ailleurs, la méthode des substitutions, on voit que, si l'on fait successivement, dans (3), $x_n = x_{n-1}$, $x_n = H$, $x_n = +\infty$, on a comme résultats les signes $+, -, +$. Il y a donc une racine comprise entre x_{n-1} et H, plus grande que x_{n-1} : c'est celle qui satisfait aux conditions expérimentales, et une racine plus grande que H qui est à rejeter.

Dans les pompes aspirantes usuelles, on greffe généralement, au-dessus du tuyau de déversement, fermé par un robinet R, un tuyau vertical qui permet alors d'élever l'eau dans un réservoir supérieur quand le robinet R est fermé; le jeu de l'appareil est le même, seul le travail à dépenser pour soulever le piston varie suivant la hauteur de l'eau dans le tuyau élévateur : la pompe s'appelle alors *aspirante et élévatoire*.

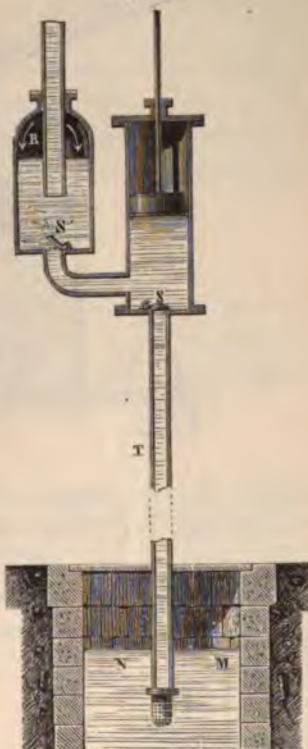
Le poids que l'on soulève en soulevant le piston est égal, en négligeant les frottements, au poids d'une colonne d'eau ayant pour base la surface du piston et pour hauteur la *distance du niveau dans le réservoir* MN *à l'orifice d'écoulement*.

En effet, la pression sur la face supérieure du piston est égale à la pression atmosphérique H, augmentée de la hauteur h du liquide superposé. La pression exercée par le liquide au-dessous du piston est $H - h_1$, h_1 étant la hauteur du piston au-dessus du niveau inférieur MN. Si nous prenons la différence entre ces deux expressions, nous trouvons $h + h_1$, ce qui montre que l'effort à faire pour soulever le piston est constant, quel que soit l'endroit de sa course où il soit arrivé.

149. — POMPES FOULANTES.

Dans cette catégorie de pompes, le piston est plein et sans soupape. Une soupape dormante est, comme dans la pompe aspirante, placée à la base du corps de pompe, où débouche le tuyau d'aspiration. Pendant la descente du piston, le liquide contenu dans le corps de pompe est *refoulé* par le piston dans un tuyau latéral, muni d'une soupape d'expulsion S′, qui s'ouvre vers l'extérieur du corps de pompe, pour empêcher le liquide déjà élevé de refluer dans le cylindre (*fig.* 163).

Fig. 163.



Quand la pompe (c'est le cas de la figure) est munie d'un tuyau d'aspiration, elle est *aspirante et foulante*. C'est le cas le plus général; quand le corps de pompe plonge directement dans le réservoir MN, le tuyau T étant supprimé, la pompe est dite foulante simple, la *pompe à incendie* (*fig.* 164) en présente un cas classique, où deux appareils semblables sont mus par un balancier commun, comme dans la machine pneumatique.

La théorie de la pompe foulante se fait de la même manière que celle de la pompe aspirante.

150. — RÉGULATION DU DÉBIT DES POMPES FOULANTES.

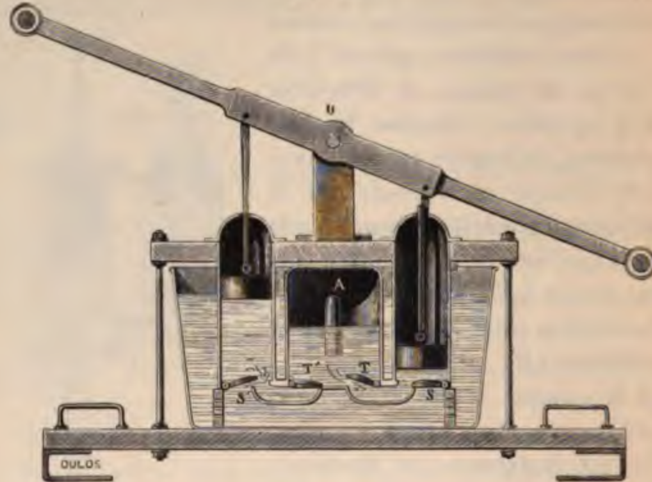
Cette régulation se fait :

1° En employant deux corps de pompe : c'est le cas de la pompe à incendie, ou de la pompe foulante à *double effet* (*fig.* 165) dont le fonctionnement rappelle celui de la machine pneumatique de Bianchi.

2° Par un *réservoir à air comprimé* que l'on voit à gauche, en R, sur la figure 163 et en A sur la pompe à incendie. Le tube d'ascension, terminé par un ajutage étroit, plonge dans ce réservoir et arrive tout

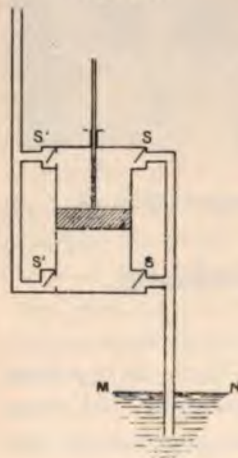
près du fond. L'eau, comprimée dans le réservoir R par la descente du piston, ne s'écoule pas en entier par le tube vertical, une partie

Fig. 164.



reste en R et y comprime l'air. Quand le piston remonte, la soupape S' se ferme, l'air comprimé se détend et chasse l'eau dans le tuyau d'écoulement; grâce à cette disposition, cet écoulement devient donc continu, sinon uniforme.

Fig 165.



151. — TRAVAIL DANS LES POMPES.

Cherchons l'expression du travail moteur à dépenser pour faire fonctionner une pompe aspirante et foulante, en négligeant les frottements de la tige et du piston contre leurs parois.

Soit une pompe aspirante et foulante dont le piston ait une surface S; soit h la distance verticale entre le niveau du réservoir inférieur et l'orifice supérieur de déversement. A un instant donné, la face inférieure du piston est à une distance z de l'orifice d'écoulement. Désignons par dz le déplacement élémentaire du piston, par H la pression atmosphérique mesurée en hauteur du liquide aspiré, de densité D.

Considérons une période du mouvement du piston telle que, au commencement et à la fin de cette période, il occupe la même position dans le cylindre : dans ces conditions, la somme algébrique des travaux des forces vives en jeu est nulle, l'état final étant identique à l'état initial. Le travail moteur sera donc, abstraction faite des résistances passives, égal au travail résistant.

Considérons un moment de la course ascendante du piston : sa face inférieure supporte une pression égale à $S[H-(h-z)]D$; sa face supérieure supporte une pression égale à SHD. La différence de ces deux expressions est $S(h-z)D$, et le travail élémentaire correspondant à une ascension $-dz$ du piston sera

$$d\mathfrak{T} = -S(h-z)D\,dz;$$

si maintenant le piston descend, sa face supérieure supporte une pression égale à $S(H+z)D$. La différence de ces deux pressions est SzD; c'est l'effort à faire pour refouler le liquide, et le travail élémentaire correspondant à un déplacement $+dz$ sera

$$d\mathfrak{T} = SzD.\,dz;$$

c'est le travail nécessaire pour élever un poids de liquide égal à $S.dz.D$ du niveau de la face inférieure du piston à l'orifice d'écoulement.

CHALEUR.

DILATATIONS.

CHAPITRE I.

FAITS GÉNÉRAUX. — DÉFINITIONS.

152. — EFFETS GÉNÉRAUX PRODUITS PAR LA CHALEUR. — DILATATIONS. CHANGEMENTS D'ÉTAT.

Lorsqu'un corps solide, liquide ou gazeux est soumis à l'action d'un foyer, que nous appelons *source de chaleur,* nous disons que sa *température* devient de plus en plus élevée, exprimant ainsi les sensations éprouvées par notre main mise au contact de ces substances.

Une observation attentive nous montre que cette élévation progressive de la température sous l'effet continu de la chaleur est accompagnée le plus souvent d'un accroissement des dimensions du corps. Il suffit pour cela que l'expérience soit disposée de façon à permettre d'une façon incessante la mesure de la longueur ou du volume du corps soumis à l'action de la chaleur.

Le dispositif le plus ordinairement employé dans le cas des solides est celui du pyromètre (*fig.* 166). Ce petit appareil se compose essentiellement d'une tige métallique AB cylindrique d'environ $0^{m},30$ supportée horizontalement par deux colonnes de cuivre portées sur

une tablette de bois; la tige passe à frottement doux dans ses deux supports, elle est fixée par une vis de pression A à l'un d'eux; son autre extrémité B, entièrement libre, bute contre le petit bras d'un

Fig. 166.



levier dont la grande branche, en forme d'aiguille, se déplace devant un cadran gradué. Au-dessous de la tige est une cuve cylindrique pleine d'alcool et renfermant des mèches de coton; on peut ainsi chauffer la tige en même temps sur toute sa longueur; l'allongement se produisant tout entier du côté B, le levier est chassé, et le déplacement de l'aiguille rend sensible la dilatation, même très faible, de la tige.

Fig. 167.



Pour constater la dilatation des liquides, il faut nécessairement les enfermer dans des vases; on prend un ballon de verre au col duquel on soude un long tube étroit (*fig.* 167) et on le remplit d'un liquide coloré dont le niveau, facile à voir, est marqué d'un index de papier; si l'on plonge ce vase dans de l'eau chaude, on observe d'abord que le niveau du liquide s'abaisse brusquement : c'est le premier effet produit par la chaleur sur l'enveloppe du verre; puis on voit la colonne liquide remonter pour dépasser enfin notablement le niveau primitif. On a ainsi la preuve que les liquides sont, en général, plus dilatables que les vases de verre qui les renferment.

Ce même appareil, fort simple, peut servir à montrer la dilatation des gaz; un index, formé d'une goutte de mercure, par exemple, permet d'enfermer dans le ballon un certain volume d'air; le tube

étant tenu horizontalement, il suffit de chauffer l'enveloppe avec la main pour voir de suite l'index se déplacer d'autant plus vivement que le tube sera plus étroit. L'impossibilité où l'on est d'observer, comme dans le cas des liquides, deux phases du phénomène, montre que les gaz sont beaucoup plus dilatables que tous les autres corps.

Ce sont, en effet, les seuls qui ne présentent pas d'exception à cette règle générale, que le premier effet de la chaleur est de produire une dilatation. Les solides et les liquides présentent quelques cas particuliers intéressants.

Le caoutchouc se dilate, en général, sous l'action de la chaleur; cependant, si l'on suspend à un tube de caoutchouc ordinaire, de la longueur de 1^{m} environ, un poids de 2^{kg}, l'action de la chaleur produira une contraction : il suffit pour le montrer de fixer la tige par une de ses extrémités à une potence, à une hauteur telle que le poids porte à peine sur la table où est disposée l'expérience; un tube de fer, de 5^{cm} à 6^{cm} de diamètre, est soutenu autour de la tige de caoutchouc et, l'enveloppant dans toute sa hauteur, permet de faire passer un courant d'air chaud en approchant de son ouverture inférieure une lampe à alcool. On voit bientôt le poids soulevé à plus de 1^{cm} du plan de la table au-dessus de laquelle on peut alors le faire osciller.

L'eau prise au moment où elle provient de la fusion de la glace se contracte sous l'effet des premières quantités de chaleur qu'on lui communique; cette particularité sera plus tard l'objet d'une étude approfondie.

Si l'action de la chaleur est suffisamment prolongée et si la température du foyer est suffisamment élevée, un corps solide, après s'être dilaté, peut changer d'état, c'est-à-dire passer à l'état liquide; un corps liquide peut passer à l'état de vapeur et chacune de ces modifications est accompagnée, en général, d'un notable changement de volume.

Telles sont les modifications physiques que la chaleur est capable de produire dans les corps; d'une manière générale on peut dire que toutes les constantes physiques des corps sont modifiées par la chaleur et sont fonction de la température : propriétés mécaniques, optiques, électriques et magnétiques; toutes pourraient donc, en théorie, servir à mesurer les températures.

153. — EFFETS MÉCANIQUES DES DILATATIONS.

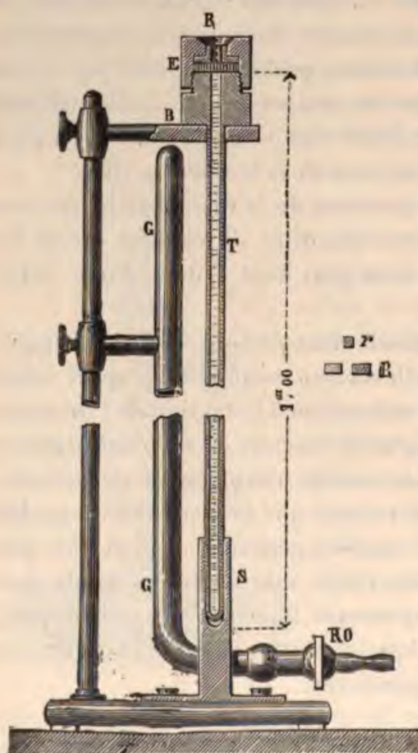
Ces dilatations ou contractions, sous l'effet de la chaleur, sont capables de produire des effets mécaniques considérables et dont la

connaissance est indispensable, soit qu'on ait à en éviter les effets destructeurs, soit qu'on veuille au contraire les utiliser.

C'est ainsi, par exemple, qu'on ne doit pas souder dans toute leur étendue les lames de zinc d'une toiture, qu'il faut laisser un jeu aux rails placés bout à bout sur les chemins de fer, et laisser se dilater librement les poutres, souvent de grande longueur, des ponts métalliques.

Il a été fait d'ailleurs une fort intéressante application de la force développée par la contraction des barres de fer préalablement chauffées. Une des galeries voûtées des Arts et Métiers menaçait de s'effondrer sous la poussée de la voûte, et les murs présentaient à la partie supérieure un écartement anormal. On disposa des barres de fer traversant les murs dans leur partie la plus élevée; ces barres étaient terminées par des parties filetées munies d'écrous s'appuyant sur des madriers destinés à répartir la pression. Des grilles soutenues sous les poutres permettaient de les chauffer dans toute leur longueur. On chauffa d'abord une première série formée par les barres de rang impair, et l'on serra en même temps les écrous; laissant ensuite refroidir, la contraction amena un redressement partiel des murs. Les barres de rang pair furent alors chauffées à leur tour, et l'on continua ainsi jusqu'à ramener les murs à la verticale.

Fig. 168.



Une expérience de M. Tommasi montre que la chaleur communiquée à une huile fixe peut, par suite de la dilatation de cette dernière, se convertir en travail dynamique : un tube en fer, fermé à son extrémité inférieure et terminé à son extrémité supérieure par un fort filet de vis, a été complètement rempli d'huile d'olive. Une rondelle de plomb, de l'épaisseur de 6^{mm}, a été placée sur l'orifice du tube. Un chapeau

de fer, taraudé à l'intérieur et percé d'un trou dont le diamètre est le même que celui de l'intérieur du tube, fixe et serre cette rondelle sur l'orifice de ce tube, de manière à le boucher hermétiquement.

On chauffe alors le tube avec une rampe à gaz (*fig.* 168); l'huile dilatée force la portion de rondelle qui correspond au trou du chapeau à se couper contre ce dernier, exactement comme si elle était enlevée par un emporte-pièce.

L'échauffement des gaz ou des vapeurs correspond à des accroissements considérables de leur force élastique, et c'est là encore une source d'effets mécaniques parfois très considérables.

Notre but, dans l'étude de la chaleur, devra être, après l'observation très complète de tous les phénomènes, de trouver les unités, les appareils et les méthodes de mesure les plus convenables à l'évaluation la plus exacte de toutes les quantités capables de caractériser chacun d'eux, et de voir comment le problème est toujours ramené à la mesure directe d'une ou plusieurs des trois unités fondamentales.

154. — TEMPÉRATURE. — CONVENTIONS POUR LA DÉFINITION DU DEGRÉ CENTIGRADE.

Imaginons un corps qui, grâce à un dispositif quelconque, donne à chaque instant des indications sur sa longueur ou sur son volume; si, pendant un temps quelconque, sa longueur ou son volume n'ont pas changé, on dit que sa température est restée constante. On peut réaliser facilement une expérience répondant exactement aux conditions que nous venons de poser : il suffit de plonger dans la glace fondante un ballon renfermant un liquide; le niveau de la colonne liquide dans le col restera fixe pendant toute la fusion de la glace, qui s'effectue par conséquent à température constante.

On dit que deux corps sont à des *températures égales,* lorsque, mis en présence l'un de l'autre, à distance ou au contact, ils ne subissent aucune modification de dimensions.

Si, au contraire, l'un d'eux, A, augmente de volume comme sous l'action d'une source de chaleur, on constate que l'autre, B, diminue de volume; on dit alors que leurs températures étaient *différentes,* et que le second, B, était à une température plus élevée que le premier, A.

Un même corps reprenant dans les mêmes conditions thermiques le même volume, on dit qu'il reprend la même température.

Nous pouvons nous servir des températures constantes pour *repé-*

rer les températures; en général, nous disons qu'un corps est température *zéro* quand, mis au contact avec de la glace fond sous la pression normale de 76^{cm}, son volume reste invariabl nous disons qu'un corps est à la température de *cent degrés,* q son volume reste invariable lorsqu'il est plongé dans la vapeur d en ébullition sous la pression normale de 76^{cm}, car l'expéri montre que, dans ces conditions, cette température est, égalem une température constante.

Appelons V_0 et V_{100} les volumes respectivement occupés pa corps déterminé aux températures *zéro* et *cent :* entre ces volume et V_{100} se trouve une série de volumes intermédiaires, tels que qui conduisent à l'idée de températures T intermédiaires corres dant à ces différents volumes.

Tout corps capable de donner à chaque instant des indication son propre volume peut donc être employé comme *thermomè* mais il faut faire à ce sujet deux remarques : premièrement, la v tion de volume entre le point o et le point 100 sera différente chaque substance : toutes ne seront pas également favorables second lieu, la loi de dilatation des différentes substances n'étant nécessairement la même, si nous supposons deux corps dont les lumes soient identiques au point o et au point 100, leurs volume resteront pas identiques à toutes les températures intermédiaires, e températures que l'on déduira de l'observation de ces volumes diff ront par conséquent. *Il est donc indispensable de spécifier la ture de la substance employée comme thermomètre* pour dé bien exactement les températures dont nous allons parler dan suite.

On *convient* de mesurer la température à l'aide du thermomè hydrogène et de définir le *degré centigrade l'élévation de ter rature nécessaire pour accroître la pression du gaz thermo trique à volume constant de la centième partie de la qua dont elle s'accroît quand on le porte de la glace fondante da vapeur de l'eau bouillante sous la pression de* 76^{cm} *de merc la pression initiale de l'hydrogène étant de* 100^{cm} *de mercur*

155. — DILATATIONS. — DÉFINITIONS ET RELATIONS.

La dilatation est l'augmentation de dimensions; elle est *liné superficielle* ou *cubique*.

L'expérience montre que tous les corps conservent, en se dila

la même forme, excepté les cristaux de tous les systèmes, sauf le premier. S'il en est ainsi, on voit facilement que, si l'on désigne par λ, σ et K les dilatations linéaire, superficielle et cubique d'un même corps pour une même variation de température, on doit avoir, en négligeant les quantités de l'ordre de λ^2,

$$\lambda = \frac{\sigma}{2} = \frac{K}{3}.$$

En effet, si nous considérons en particulier un corps taillé en cube, dont l'arête et, par suite, le volume soient égaux à l'unité à 0°, en augmentant la température, l'arête devenant $1 + \lambda$, le cube a pour volume $1 + K$, quantités entre lesquelles on a la relation

$$(1 + \lambda)^3 = 1 + K,$$

ou, en développant et négligeant les quantités d'un degré supérieur au premier, il reste

$$3\lambda = K.$$

Ainsi *la dilatation cubique est le triple de la dilatation linéaire.*

156. — COEFFICIENT DE DILATATION.

On appelle coefficient de dilatation *la dilatation de l'unité de volume ou de longueur pour une élévation de température de* 1°.

Cette définition suppose que la dilatation reste la même pour une élévation de température de 1° dans toute l'étendue de l'échelle thermométrique.

Les gaz satisfont à cette condition, et la dilatation des solides peut être considérée comme régulière dans une assez grande étendue de l'échelle thermométrique; la dilatation des liquides est variable.

Il n'existe donc de coefficient de dilatation que pour les gaz et les solides; et, comme conséquences, les relations qui lient entre eux les volumes d'un même corps gazeux ou solide à des températures différentes sont remarquablement simples.

Soient, en effet, V_0 et V_t les volumes d'un même corps à 0 et à t degrés; la dilatation étant $V_t - V_0$, la dilatation par unité de volume pour 1°, c'est-à-dire, par définition, le coefficient de dilatation K, est

$$K = \frac{V_t - V_0}{V_0 t}. \tag{1}$$

Ce coefficient de dilatation, si le corps est employé comme thermomètre, prend le nom de *coefficient thermométrique*.

La relation (1) se met sous la forme

$$V_t = V_0(1 + Kt).$$

On voit donc que, d'une façon générale, on a

$$\frac{V_t}{1+Kt} = \frac{V_{t'}}{1+Kt'} = \ldots = V_0,$$

c'est-à-dire que *les volumes d'un même corps à différentes températures sont proportionnels aux binomes de dilatation correspondant à ces températures*.

Quand on a, dans les calculs, à exprimer V_t en fonction de $V_{t'}$, on peut se contenter de l'approximation donnée par la formule

$$V_{t'} = V_t[1 + K(t' - t)].$$

157. — COEFFICIENT MOYEN DE DILATATION ENTRE DES TEMPÉRATURES DÉTERMINÉES.

Supposons un corps dont la dilatation soit irrégulière, et appelons V_0 et V_t ses volumes à 0° et à $t°$; la dilatation totale de 0° à $t°$, pour le corps de volume 1 à 0°, a pour expression

$$D = \frac{V_t - V_0}{V_0}.$$

La dilatation moyenne, pour une élévation de température de 1°, sera :

$$d = \frac{D}{t} = \frac{V_t - V_0}{V_0 t}.$$

C'est ce quotient qu'on appelle le *coefficient moyen* de dilatation du corps entre 0° et $t°$.

Le coefficient moyen entre deux températures quelconques t et t' aurait pour expression

$$\frac{V_{t'} - V_t}{V_0(t' - t)}.$$

Entre des limites peu éloignées de t, les valeurs de ces différents quotients sont sensiblement constantes, et l'on retombe sur le cas précédent.

158. — COEFFICIENT VRAI DE DILATATION A UNE TEMPÉRATURE DONNÉE.

Le coefficient moyen peut varier rapidement avec la température; soient alors V et $V + dV$, t et $t + dt$ les volumes et les températures correspondantes d'un corps dont le volume à 0° est V_0, le coefficient moyen entre t et $t + dt$ a pour expression

$$\frac{V + dV - V}{V_0(t + dt - t)} = \frac{1}{V_0}\frac{dV}{dt}.$$

Le *coefficient vrai de dilatation à* $t°$ est la limite vers laquelle tend ce rapport, lorsque dt tend lui-même vers 0°; c'est-à-dire la dérivée de V, considérée comme fonction de t, prise par rapport à cette variable, et divisée par V_0.

De tout ce qui précède résulte que, d'une façon générale, le volume d'un corps peut être considéré comme une fonction de la température

$$V = F(t).$$

Le développement de $F(t)$ en série conduit naturellement à des formules de la forme

$$V = V_0(1 + at + bt^2 + ct^3 + \ldots).$$

Le plus souvent, on peut limiter le développement au terme du troisième degré.

Le coefficient moyen entre 0° et $t°$ est alors

$$a + bt,$$

et le coefficient vrai à $t°$ a pour expression

$$a + 2bt.$$

Pour les gaz, on doit limiter le développement au terme du premier degré; pour les solides, on peut le plus souvent le faire : a est alors le coefficient de dilatation.

159. — REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DES COEFFICIENTS DE DILATATION.

Puisque le volume d'un corps est une fonction F de sa température, nous pouvons représenter cette fonction par une courbe.

Il suffira, pour cela, après avoir tracé deux axes de coordonn
rectangulaires, de prendre pour abscisses les températures et p
ordonnées les volumes du corps *mesurés expérimentalement*. C
courbe, dite *courbe de dilatation*, est donc empirique.

Imaginons que cette courbe soit tracée (*fig.* 169); soit AI

Fig. 169.

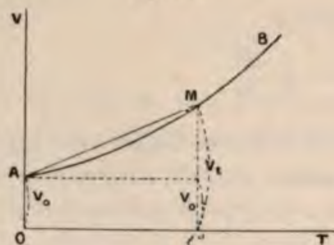
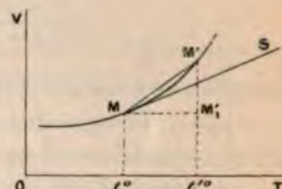


Fig. 170.



courbe; $OA = V_0$ représente le volume du corps à *zéro; t*M =
représente son volume à t^o.

On voit que le coefficient moyen de dilatation entre 0° et t^o est
présenté par le coefficient angulaire de la corde AM.

Le coefficient moyen entre t^o et t'^o est représenté par le coeffici
angulaire de la corde MM′ (*fig.* 170).

Enfin le coefficient vrai à t^o, qui est la limite du rapport $\frac{M}{M}$
quand les deux termes de ce rapport deviennent très petits, est rep
senté par le coefficient angulaire de la tangente MS, menée au poin
à la courbe de dilatation.

160. — DILATATION ABSOLUE. — DILATATION APPARENTE.

Le cas des liquides, qui se présente comme le plus compliqué, l'
encore davantage par ce fait qu'ils doivent être contenus dans
vases; il y a, par suite, lieu de distinguer la *dilatation absolue*
liquide, telle qu'elle se produirait si elle était indépendante du v
qui contient le liquide, et la *dilatation apparente*, qui n'est
quelque sorte que la résultante de la dilatation absolue du liquide
de la dilatation de l'enveloppe.

Désignons par D la dilatation absolue d'un liquide, dont la dila
tion apparente est Δ lorsqu'il est contenu dans un vase dont la dila
tion cubique est K, ces nombres étant définis par une même élévat
de température t; représentons par V_0 le volume à 0; le volume

laté du liquide est

$$(1) \qquad V_0(1 + D);$$

son volume apparent est

$$V_0(1 + \Delta);$$

mais, chaque unité de volume du vase valant $1 + K$, le volume réel du liquide peut donc s'exprimer aussi par

$$(2) \qquad V_0(1 + \Delta)(1 + K),$$

et l'on a, par suite, en égalant les quantités (1) et (2),

$$(1 + D) = (1 + \Delta)(1 + K),$$

et, en réduisant et négligeant les termes du second ordre,

$$D = \Delta + K.$$

Ainsi *la dilatation absolue d'un liquide est égale à sa dilatation apparente augmentée de la dilatation de l'enveloppe.*



CHAPITRE II.

THERMOMÈTRES A MERCURE. — DILATOMÈTRES.

Les thermomètres à mercure sont employés sous deux formes très différentes : *le thermomètre à tige* et le *thermomètre à poids*. Ce sont les mêmes appareils qu'on emploie comme *dilatomètres,* c'est-à-dire à la mesure des dilatations des liquides.

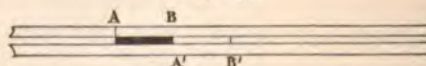
L'étude que nous allons en faire a surtout pour but de faciliter celle des dilatations des liquides; nous renvoyons à la Thermométrie la description des thermomètres de précision à mercure.

161. — THERMOMÈTRE OU DILATOMÈTRE A TIGE.

1° **Choix du tube.** — La première opération consiste à choisir le tube capillaire, c'est-à-dire à en chercher un qui soit à peu près cylindrique dans toute sa longueur; pour cela, on place le tube horizontalement sur la machine à diviser, on y fait pénétrer une colonne de mercure d'environ 30^{mm}, et l'on mesure la longueur occupée par cette colonne en différentes positions; s'il se présente une différence de 1^{mm}, le tube est à rejeter.

2° **Graduation en parties d'égales capacités.** — Le tube étant choisi, on le lave et on le sèche; puis on le divise dans toute sa longueur en parties d'égale capacité; pour cela, le tube enduit d'un vernis à la gomme laque est placé de nouveau sur la machine à diviser, on y fait pénétrer une goutte de mercure occupant 20^{mm} à 30^{mm} environ dans la position AB (*fig.* 171); on mesure exactement cette longueur l; la bulle est alors amenée en A′B′, où elle occupe une longueur l', et ainsi de suite; ces différentes longueurs l,

Fig. 171.



$t, t', \ldots$ sont assez voisines l'une de l'autre si le tube a été bien choisi; on partage alors chacune d'elles, à l'aide du tracelet, en un même nombre de parties, qui correspondent évidemment par construction à des capacités très sensiblement égales; on grave à l'acide fluorhydrique et l'on dissout le vernis à l'essence de térébenthine.

3° **Évaluation du volume d'une division.** — Pour procéder à cette troisième opération, on remplit plusieurs fois le tube de mercure et l'on note combien les colonnes occupent de divisions à 0°; on réunit dans une même coupelle tout le mercure qui a servi et on le pèse; en divisant le poids par la densité du mercure à 0° et par le nombre total des divisions occupées dans les opérations successives, on obtient le volume a d'une division.

4° **Soufflage. Remplissage. Réglage.** — Les opérations qui viennent ensuite sont celles du soufflage d'un réservoir de dimensions convenables à l'une des extrémités de la tige, du remplissage et du réglage; cette dernière consiste à faire pénétrer dans l'appareil une quantité de mercure, telle qu'à 0° le niveau du mercure dans le tube arrive à une hauteur convenable, c'est-à-dire que le zéro soit bien placé, suivant le genre de détermination auquel l'appareil est destiné.

5° **Évaluation du volume du réservoir en fonction du volume d'une division.** — Après avoir soufflé le réservoir, on place l'enveloppe thermométrique avec quelques poids marqués sur le plateau de la balance et l'on en fait la tare; lorsque le thermomètre est rempli, on le reporte sur la balance, et les poids marqués qu'il faut enlever représentent le poids du mercure à 0°, qui remplit à 0° la capacité du réservoir jusqu'au zéro de l'appareil; en divisant ce nombre par la densité du mercure à 0°, on obtient le volume du réservoir, et, en le divisant par a, volume d'une division, on obtient le nombre n, qui exprime que le volume du réservoir est n fois le volume de chaque division de la tige, c'est-à-dire na.

6° **Coefficient thermométrique de l'appareil.** — Portons l'instrument dans la vapeur de l'eau bouillante à T°, et soit N le nombre total de divisions occupées par le mercure.

La dilatation par unité de volume pour un degré exprime le coefficient moyen de la dilatation apparente du mercure entre 0° et T°; c'est-à-dire le coefficient thermométrique μ_T; on a donc

$$\mu_T = \frac{(N-n)a}{Tna}.$$

Ce rapport est, en général, voisin de $\frac{1}{6480}$; il dépend de la nature du verre employé.

On voit d'autre part que, puisque $\frac{(N-n)a}{T}$ exprime le volume d'un degré, et *na* le volume du réservoir, la relation que nous venons d'écrire exprime que le volume du réservoir est, dans les thermomètres à tige, 6480 fois plus grand, en général, que le volume du degré. Cette considération permet aux constructeurs de fabriquer des instruments dont le degré occupe dans une tige donnée telle longueur qu'ils désirent.

Fig. 172.



162. — POINTS FIXES.

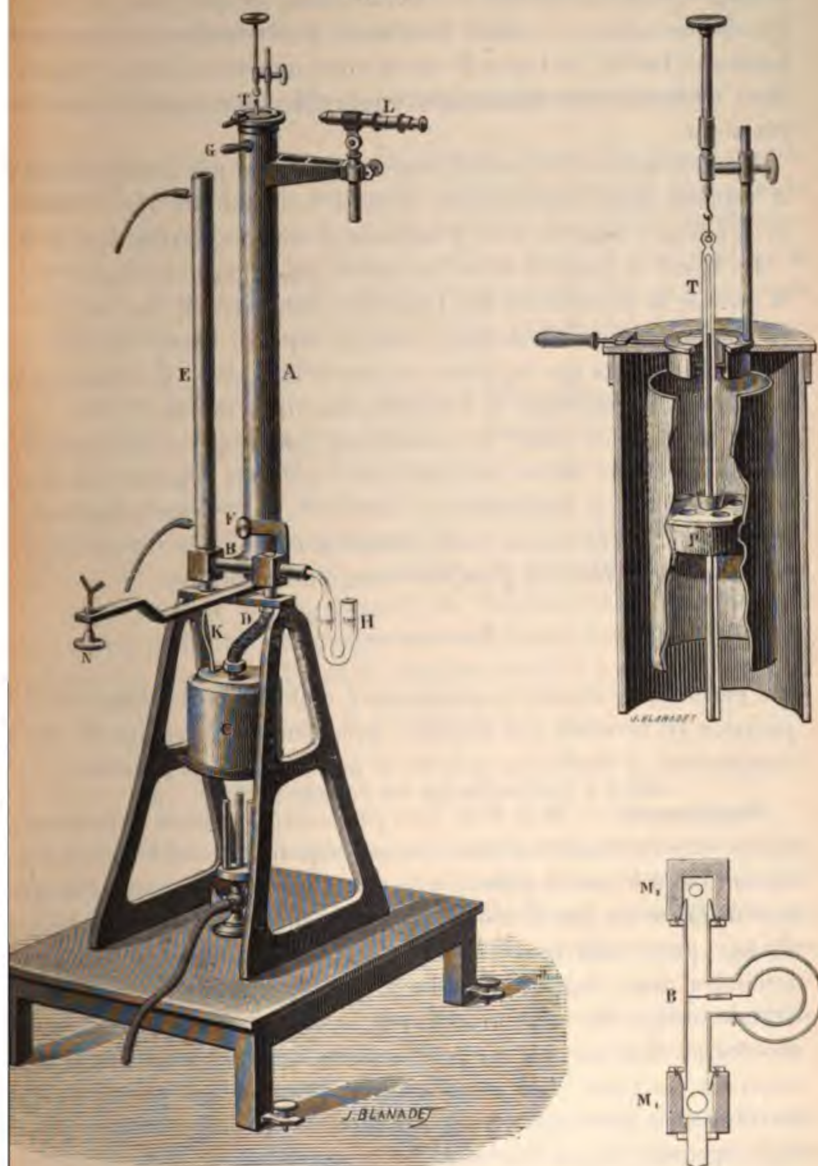
La détermination du point 0 et du point 100, qu'on appelle les *points fixes* du thermomètre, se fait à l'aide de deux appareils fort simples.

Pour le point 0, on place verticalement le thermomètre dans un vase A (*fig.* 172), portant à sa partie inférieure un robinet, et plein de petits fragments de glace bien pure, ou mieux de neige mélangée d'eau distillée; la glace provenant des lacs de Norvège ou de Suisse donne un zéro parfaitement constant; pour la réduire en fines parcelles, on la râpe dans une auge en bois qui porte transversalement dans le fond un couteau d'acier encastré obliquement dans une ouverture. On attend que le niveau du mercure soit fixe, et l'on note sur un registre la position exacte.

La détermination du point 100 se fait à l'aide d'un appareil imaginé par Gay-Lussac, perfectionné par Regnault; nous décrirons la

forme que lui a donnée M. P. Chappuis et sous laquelle il est en usage au Bureau international des Poids et Mesures (*fig.* 173).

Fig. 173.



Le thermomètre T est soutenu dans un tube à double circulation A

où il est guidé par deux pièces P percées de trous; le tube A se termine à sa partie inférieure par un tuyau horizontal qui sert d'axe de rotation et se termine dans des paliers creux M_1, M_2; on peut ainsi le fixer horizontalement ou verticalement, ce qui peut servir, pour les thermomètres de haute précision, à déterminer la correction de pression. En M_1, le tuyau B est en communication avec le tube intérieur où est placé le thermomètre; en M_2, il est relié au manchon extérieur.

Une chaudière de cuivre C envoie sa vapeur par le tube D en M_1; la vapeur, après avoir traversé le tube A, revient en M_2, d'où elle va se condenser dans un tube E entouré d'une circulation d'eau froide.

En H est un tube de verre recourbé qui sert de manomètre à eau et mesure la pression en M; l'une des extrémités M_1 du tube A étant en communication immédiate avec la vapeur, l'autre M_2 avec l'air, on peut admettre que la pression dans le tube A est la moyenne de la pression atmosphérique et de la pression de la vapeur en M_1.

Au moment de noter la position du mercure, on fait une lecture au baromètre et, en se reportant aux Tables de tension de la vapeur d'eau établies par Regnault, on conclut de cette détermination de la pression la valeur exacte de la température; si l'on n'a pas à sa disposition ces Tables, on peut faire usage de la formule

$$T = 100 + \frac{H - 760}{27,25},$$

qui permet de calculer la température d'ébullition en fonction de la pression H, formule qui exprime que, dans le voisinage de 760, la température d'ébullition varie de 1° par $27^{mm},25$ de pression.

Déplacement. — Mais il ne faut pas croire que cette détermination puisse être faite une fois pour toutes. Le point zéro et le point 100 ne restent pas à la même place sur la tige d'un thermomètre; cependant leur distance est invariable, et par conséquent la valeur du degré ne change pas; mais le zéro s'élève, et la variation qu'il subit peut atteindre deux degrés. On admet que ce déplacement est dû à un état de trempe du verre produit par le soufflage, qui, maintenant les molécules dans un état d'équilibre instable, faciliterait les déformations du réservoir. Les variations de position des points 0 et 100 doivent être notées avec soin sur le registre d'observation qui doit accompagner chaque thermomètre de précision.

La détermination exacte d'une température avec cet appareil ne pourra donc résulter d'une simple lecture du point d'affleurement du

mercure et d'un calcul de proportionnalité ; elle devra comprendre une vérification de la position du zéro. Ces vérifications devront être d'autant plus fréquentes que le thermomètre aura plus souvent été porté à des températures plus élevées, les grandes variations paraissant favoriser le déplacement des points fixes.

163. — TIGE THERMOMÉTRIQUE INCOMPLÈTEMENT PLONGÉE.

Les thermomètres à tige sont, en général, munis de tiges de grande longueur ; la sensibilité de l'appareil est en effet d'autant plus grande que le degré est plus long ; il devient par suite impossible de plonger la totalité du thermomètre dans le milieu dont on veut évaluer la température. Dans un grand nombre d'expériences, divers physiciens ont eu recours à des dispositifs particuliers et à des formules de correction ; voici la plus usitée :

La tige du thermomètre est placée horizontalement (souvent le thermomètre est, dans ce but, coudé) et entourée, sur toute la longueur qui n'est pas plongée dans le milieu à température inconnue x, d'un manchon où circule de l'eau à température t ; soit T le nombre de degrés indiqué par le thermomètre, n le nombre de degrés qui sont à t° et μ la dilatation apparente du mercure ; le nombre T doit évidemmment être augmenté de l'accroissement exprimé en degrés que prendrait la colonne de mercure dont la longueur exprimée en degrés est n, si l'on élevait sa température de t à x ; on a donc

$$x = \mathrm{T} + n\mu(x - t).$$

164. — THERMOMÈTRE OU DILATOMÈTRE A POIDS.

Dans le thermomètre à tige, on voit, en résumé, que la mesure des températures se ramène à la mesure exacte d'une *longueur*, c'est-à-dire d'une de nos unités fondamentales. Nous allons étudier un appareil dans lequel on ramène la mesure de la température, non plus à celle d'une longueur, mais à celle d'une *masse*.

Le thermomètre à poids est formé d'un réservoir cylindrique de verre fermé à sa partie inférieure et auquel est soudé à la partie supérieure un tube capillaire deux fois recourbé.

Les opérations que comportent la détermination du coefficient thermométrique de cet appareil et, par suite, l'évaluation d'une température, doivent être faites dans l'ordre suivant :

Le réservoir muni d'une coupelle est placé, avec un poids supé-

rieur à celui du mercure qui peut le remplir à 0°, sur le plateau d'une balance, et l'on en fait la tare. On procède aussitôt après au remplissage, qui s'effectue facilement, grâce au dispositif représenté par la figure 174. La grille qui soutient le thermomètre empêche que pen-

Fig. 174.



dant l'ébullition le mercure, dont le poids est considérable (200g à 400g), ne vienne à briser le thermomètre. L'ouverture du tube étant plongée dans un vase qui contient du mercure chaud, on peut laisser refroidir l'appareil qui achève de se remplir à la température ordinaire; enfin le thermomètre est entouré de glace et l'on attend plusieurs heures qu'il ait achevé de se remplir à 0°.

On reporte alors le thermomètre, séché et muni de sa coupelle vide, sur le plateau de la balance; le mercure qui commence à s'écouler pendant l'échauffement se réunit dans la coupelle. Les poids marqués P qu'il faut enlever représentent la masse du mercure à 0° qui remplit la capacité du réservoir à 0°.

On suspend ensuite l'instrument dans l'appareil à ébullition de Regnault pour la détermination du point 100 et on l'y laisse séjourner jusqu'à ce que le mercure cesse de se déverser dans la coupelle; on note alors la pression H et l'on en déduit la température de la vapeur T. On pèse la masse p du mercure sorti, sur une balance moins forte, mais plus sensible.

Exprimons alors que T° le volume du contenant égale le volume

du contenu. Soient m_T et μ_T les dilatations moyennes, absolues et apparentes, du mercure entre 0° et T°, d_0 et d_T ses masses spécifiques à 0° et T°, K le coefficient de dilatation de l'enveloppe. Le volume $\frac{P}{d_0}$ du mercure à 0° mesure le volume de l'enveloppe à 0° qui devient $\frac{P}{d_0}(1+KT)$ à T°; le volume du mercure à la même température n'est plus dans l'appareil que $\frac{P-p}{d_T}$. On a donc

$$\frac{P}{d_0}(1+KT)=\frac{P-p}{d_T}=\frac{P-p}{d_0}(1+m_T T);$$

mais on sait que

$$1+m_T T=(1+\mu_T T)(1+KT),$$

on a donc

$$P=(P-p)(1+\mu_T T);$$

le coefficient thermométrique μ_T a donc pour expression

$$\mu_T=\frac{p}{(P-p)T}.$$

L'appareil peut alors servir à une détermination de température; il suffit de ramener d'abord, par dilatation, la colonne en contact avec le mercure de la coupelle et d'achever le remplissage à une température certainement inférieure à celle qu'on veut mesurer; on porte ensuite le thermomètre dans l'enceinte et l'on détermine comme tout à l'heure la masse ϖ de mercure sorti et qui correspond à la température θ inconnue; on a

$$\frac{p}{(P-p)T}=\mu=\frac{\varpi}{(P-\varpi)\theta},$$

équation d'où l'on déduira θ; cette méthode suppose que $\mu_T=\mu_\theta$, c'est-à-dire que la dilatation soit régulière, ce qui est vrai dans une assez grande étendue de l'échelle thermométrique.

Il est facile de comprendre que, dans cette méthode, on pèse exactement le mercure dont on aurait apprécié la longueur dans un tube thermométrique; or, dans ces instruments, le degré peut facilement être représenté par un décigramme de mercure apprécié au milligramme : on voit donc que leur sensibilité est satisfaisante.

Cependant les cas dans lesquels on peut employer le thermomètre à poids sont assez restreints à cause de sa grande masse; on doit le réserver pour la mesure des températures dans les étuves où la tem-

pérature est maintenue constante, ou dans les bains liquides chauffés par de puissants foyers de chaleur.

Remarque. — Dans tout ce qui précède, nous avons choisi arbitrairement un mode, non pas de *mesure,* mais de *repérage* des températures; c'est une thermométrie provisoire. Avant d'aller plus loin, il est nécessaire de remarquer tout ce qu'il y a d'arbitraire dans cette façon de repérer les températures :

1° Le choix du corps thermométrique (mercure, alcool ou gaz);

2° Le choix du corps solide destiné à servir de récipient au corps thermométrique;

3° et 4° Les deux températures stationnaires auxquelles correspondront les divisions extrêmes de l'échelle;

5° Le nombre de degrés dans lesquels on subdivise l'intervalle ainsi obtenu;

6° Et ceci est ce qu'il y a de plus important, le choix, essentiellement arbitraire, du phénomène qui servira à accuser les variations de température. On aurait pu prendre la variation de l'indice de réfraction, la variation de conductibilité électrique d'un corps, la variation de force électromotrice d'un couple thermoélectrique, etc.; si l'on a choisi d'abord la dilatation, c'est tout à fait arbitrairement.

Nous verrons comment et pour quelles raisons on a été conduit à prendre pour thermomètre étalon un appareil dans lequel les températures ne sont plus définies par des dilatations, mais par des variations de pression à volume constant.

La Thermométrie, sur laquelle nous reviendrons après avoir étudié la dilatation des gaz, est donc un Chapitre de la Physique qui ne présente aucun caractère absolu : c'est en Thermodynamique seulement qu'on peut apprendre à établir un système rationnel de températures *absolues.*

CHAPITRE III.

DILATATION DES LIQUIDES.

165. — MÉTHODE.

L'étude de la dilatation des liquides se déduit tout entière de la formule précédemment établie

$$D = \Delta + K.$$

Les opérations successives qu'il faut faire *nécessairement* pour arriver à connaître la dilatation absolue d'un liquide quelconque sont les suivantes :

1° On a étudié d'une façon complète et définitive la dilatation absolue d'un liquide, le mercure; nous décrirons les expériences classiques qui ont pour but de fixer la valeur de ce coefficient m entre certaines limites de température.

2° Toute expérience de dilatation faite à température connue, avec un thermomètre à tige ou à poids renfermant du mercure, donnera comme résultat direct la dilatation apparente μ du mercure dans les conditions de l'expérience.

3° En retranchant μ de m, on aura la valeur de K, dilatation de l'enveloppe de verre employée.

4° Cette même enveloppe, servant à faire une expérience de dilatation, à température connue, sur un liquide quelconque, permettra de connaître la dilatation apparente Δ de ce liquide dans ce verre.

5° Enfin, en ajoutant K à Δ, on en conclura la dilatation absolue D de ce liquide quelconque.

En résumé, la mesure de D par les méthodes thermométriques nécessite deux expériences successives, l'une ayant pour but la connaissance de la dilatation K de l'enveloppe dont on doit faire usage, l'autre destinée à la mesure de la dilatation apparente Δ du liquide dans cette enveloppe.

La mesure de K serait impossible si l'on ne connaissait auparavant la dilatation absolue m du mercure.

DILATATION ABSOLUE DU MERCURE.

166. — EXPÉRIENCES DE DULONG ET PETIT.

On sait que les hauteurs des deux liquides placés dans les branches de deux vases communicants, comptées à partir de la surface de séparation, sont inversement proportionnelles à leurs densités. Si donc on peut mesurer exactement les hauteurs H_0 et H_T de deux colonnes de mercure contenues dans les deux branches d'une sorte de siphon renversé, en maintenant l'une dans la glace fondante tandis que l'autre est portée à une température T bien connue, on en déduit facilement les dilatations cherchées.

En effet, si l'on appelle D_0 et D_T les masses spécifiques du mercure à o et à T°, on a

$$H_0 D_0 = H_T D_T.$$

Or les masses spécifiques sont en raison inverse des volumes qu'occupe une même masse du liquide, c'est-à-dire que l'on a

$$V_0 D_0 = V_T D_T;$$

et, en désignant par m la dilatation moyenne du mercure entre o et T, on voit que

$$\frac{H_T}{H_0} = \frac{D_0}{D_T} = \frac{V_T}{V_0} = 1 + mT,$$

d'où

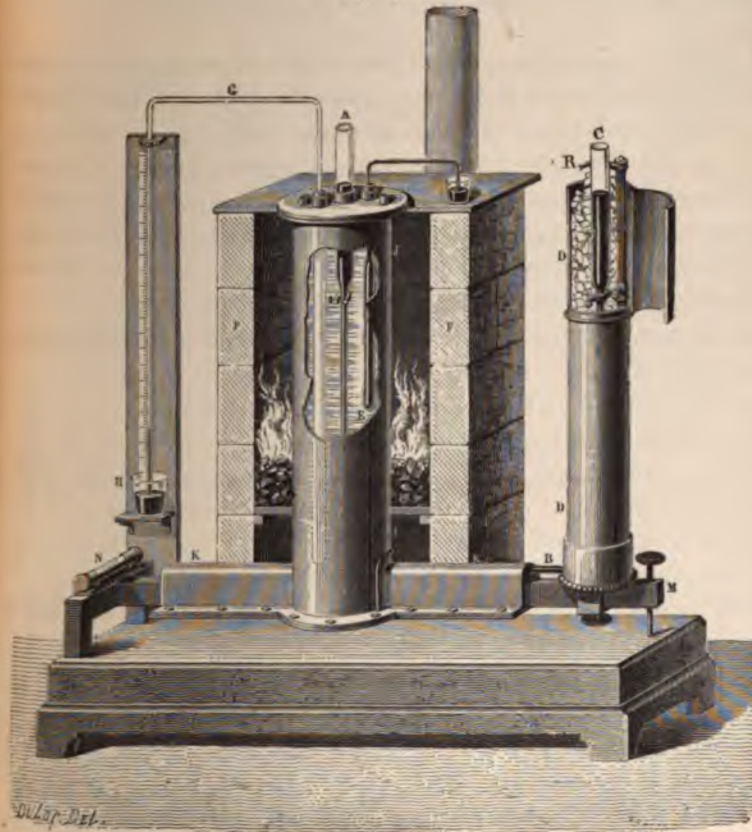
$$m = \frac{H_T - H_0}{H_0 T}.$$

L'appareil devra donc être disposé de façon à permettre la mesure de $H_T - H_0$, celle de H_0 et la détermination exacte de la température T.

Le tube qui contient le mercure se compose de deux branches verticales formées par l'assemblage de deux tubes de calibres très différents, soudés bout à bout; le tube inférieur est de petit diamètre pour diminuer la masse du mercure; on le termine par un tube plus large pour éviter l'erreur provenant de l'inégalité des effets capillaires due à la différence de température des deux colonnes (*fig.* 175).

Le tube de jonction B est capillaire et très régulier, il doit être horizontal; il repose sur une barre de fer MN en forme de T, à trois pieds, dont la face supérieure bien dressée porte deux niveaux à bulle rectangulaires; l'appareil est porté par une forte planche munie de vis calantes à ses quatre angles. Deux montants en fer, fixés verticalement

Fig. 175.



sur le T, servent à fixer les tubes A et C; celui qui est dans la glace fondante porte à sa partie supérieure une pièce de fer arquée dont la pointe en R sert de repère.

La colonne C, que l'on voulait maintenir à 0°, était entourée d'un large cylindre de fer-blanc mastiqué dans le bas autour de la barre de fer, et qu'on remplissait de glace pilée; une fenêtre D, ménagée vers le haut, permettait, en enlevant quelques morceaux de glace, d'apercevoir le sommet de la colonne au moment de l'observation.

Le manchon destiné à renfermer le bain d'huile à température élevée était formé d'un cylindre de cuivre rouge présentant dans le haut un rebord sur lequel se boulonnait le couvercle, et terminé en bas par deux appendices K, K′ ayant la forme de demi-cylindres et enveloppant la barre MN; un fond en cuivre était fixé par des boulons à vis après qu'on eut interposé entre ces diverses pièces un lut imperméable; enfin cette partie de l'appareil était établie dans un fourneau.

Quand on avait chauffé jusqu'à la température à laquelle on voulait faire l'observation, on fermait les issues du fourneau; la température restait alors stationnaire pendant un temps suffisant pour les lectures. A ce même moment, il était nécessaire que le niveau du mercure chaud fût visible un peu au-dessus du plan du couvercle, ce à quoi on arrivait facilement en ajoutant dans l'autre branche un peu de mercure préalablement refroidi à zéro.

Dulong et Petit avaient placé deux thermomètres dans ce bain : l'un était un thermomètre à poids de telle dimension qu'un échauffement d'un degré faisait sortir environ $0^g,1$ de mercure; le second était un thermomètre à air GH; les deux réservoirs cylindriques de ces appareils occupaient presque toute la hauteur du bain. Ils ne pouvaient évidemment se proposer de déterminer les températures avec le thermomètre à mercure, car c'eût été comparer la dilatation absolue du mercure à sa dilatation apparente, et les valeurs des coefficients ainsi calculés eussent été sensiblement indépendantes de la température; mais ils n'ont pas voulu « laisser échapper cette occasion de comparer la marche de ces deux instruments ».

La mesure des hauteurs $H_T - H_0$ et H_0 se déduisait d'observations faites au cathétomètre inventé par les deux savants en vue de cette expérience. $H_T - H_0$ peut se mesurer directement en visant le sommet des colonnes de mercure. Pour évaluer H_0, Dulong et Petit mesuraient au cathétomètre la distance h qui séparait le niveau C du mercure à o du repère R. La hauteur R de ce repère au-dessus du plan de la barre en T était mesurée, avec une *règle verticale graduée*, à un dixième de millimètre près; enfin on en retranchait la moitié du diamètre du tube de communication, car la hauteur H_0 doit être comptée à partir de l'axe de ce tube.

Il est à remarquer d'ailleurs que cette dernière mesure, qui comportait le moins de précision, ne pouvait occasionner que des erreurs négligeables et que c'était la mesure de $H_T - H_0$ qui était essentielle. Il est, en effet, facile de montrer que l'approximation avec laquelle

on connaît m est précisément égale à l'approximation avec laquelle on a mesuré $H_T - H_0$.

En effet, supposons qu'on ait mesuré $H_T - H_0$ avec une erreur absolue ε, il en résultera pour m une erreur absolue dm telle que

$$m + dm = \frac{H_T - H_0 + \varepsilon}{H_0 T},$$

d'où

$$dm = \frac{\varepsilon}{H_0 T}.$$

L'erreur relative est le quotient de dm par m :

$$\frac{dm}{m} = \frac{\varepsilon}{H_T - H_3};$$

or le second membre exprime précisément l'erreur relative que l'on a commise dans la mesure de $H_T - H_0$.

Si, $H_T - H_0$ étant mesuré exactement, on fait la même erreur absolue ε dans l'évaluation de H_0, l'erreur relative commise sur m est beaucoup plus petite. On a, en effet,

$$m + dm' = \frac{H_T - H_0}{(H_0 + \varepsilon) T},$$

d' l'on tire aisément

$$\frac{dm'}{m} = \frac{\varepsilon}{H_0}.$$

Le rapport de ces erreurs relatives est celui de H_0 à $H_T - H_0$; la conde est donc considérablement plus petite.

Les résultats de leurs expériences sont résumés dans le Tableau ivant, dont la première colonne contient les températures indiquées r le thermomètre à air, la seconde les températures données par le rmomètre à poids, et la troisième renferme les dilatations moyennes olues du mercure entre 0° et chacune des températures indiquées s la première colonne :

Températures.		
Thermomètre à air.	Thermomètre à mercure	Coefficient moyen.
100	100	$\frac{1}{5550}$
200	204,61	$\frac{1}{5425}$
300	314,15	$\frac{1}{5300}$

Malheureusement une connaissance imparfaite de la dilatation de l'air, pour laquelle on adoptait alors le nombre donné par Gay-Lussac, reconnu depuis beaucoup trop élevé, vient fausser toutes les déterminations de température de ces expériences, et, comme Dulong et Petit ont négligé de faire connaître les données de leurs expériences, toute correction est aujourd'hui impossible.

En outre, l'art de dessécher les gaz était inconnu à l'époque de Dulong et Petit; c'est Regnault qui, le premier en France, a montré l'importance de cette partie de l'expérience. Dulong et Petit se contentaient de faire passer l'air sur une colonne de chlorure de calcium, ce qui constituait une dessiccation insuffisante de l'air destiné à servir de corps thermométrique dans le thermomètre à gaz.

D'autre part, on peut reprocher à l'appareil qu'ils ont employé sa trop faible hauteur ($0^m,54$); la masse d'huile chauffée par le bas et non agitée devait présenter des variations notables de température à différents niveaux; et enfin les colonnes de mercure étaient en contact avec l'air par leurs parties supérieures, ce qui introduisait une incertitude assez grande sur leur température.

Aussi Regnault a-t-il repris ces expériences.

167. — EXPÉRIENCES DE REGNAULT.

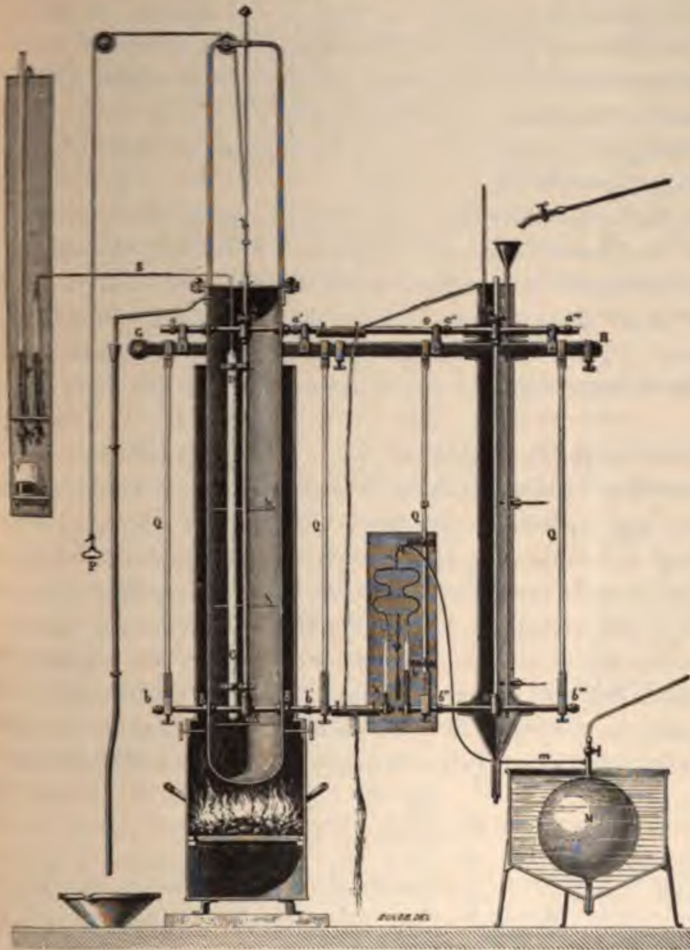
Les tubes en fer destinés à renfermer le mercure ont $1^m,50$ de hauteur et 1^{cm} de diamètre intérieur (*fig.* 176); ils sont rivés à leurs deux extrémités dans des godets A et A', B et B'; ces godets sont reliés horizontalement A à B, A' à B' par deux tubes forés exactement suivant l'axe d'un trou de $2^{mm},5$ de diamètre; les deux godets supérieurs A et B portent de plus deux tubes verticaux qui les mettent en relation avec l'atmosphère. Le tube horizontal supérieur est percé d'une ouverture capillaire O, le tube inférieur est coupé en son milieu, et sur deux godets placés à ses extrémités s'élèvent deux tubes de verre K et L, qui sont réunis par des tubes de plomb m à un grand ballon de cuivre M placé dans un vase plein d'eau qui maintient sa température constante. Enfin ces tubes horizontaux sont prolongés par des pièces de fer pleines Aa, Ba''', A'b, B'b'''.

Le tube AA' est disposé dans une chaudière en tôle de 2^m de hauteur et de $0^m,30$ de diamètre intérieur, enveloppée d'un manchon et maintenue à sa partie inférieure dans un fourneau; elle est pleine d'huile et contient un agitateur NN'; l'autre BB' est placé au milieu

d'un manchon en tôle galvanisée destiné à contenir de la glace ou, de préférence, à être constamment parcouru par de l'eau froide.

Le système tout entier est soutenu par une forte barre de fer GH

Fig. 176.



ui tourne autour de l'axe G scellé dans un mur en pierres de taille; extrémité H est soutenue sur une pièce de fer scellée dans le même ur et sur laquelle elle repose par l'intermédiaire d'une vis de appel. Le tube AB porte sur cette barre par quatre étriers; on peut e cette façon rendre les tubes AA' et BB' verticaux et le tube AB orizontal.

Des tirants en fer Q maintiennent les tubes horizontaux inférieurs et, à l'aide de vis de rappel, on peut dresser ces tubes de façon à rendre leurs axes parfaitement horizontaux. Pour faciliter cette partie de l'opération, Regnault avait placé sur les tubes AB, A'B' des repères $aa'a''a'''$ et $bb'b''b'''$, formés d'une croix tracée sur des anneaux de cuivre et disposés de façon à se trouver exactement à la hauteur de l'axe des tubes sur lesquels ils étaient portés.

Les températures de la colonne chauffée sont mesurées à l'aide d'un thermomètre à air dont le réservoir DC, de $1^m,50$ de hauteur, est placé très près du tube AA' et se termine par un tube capillaire E, relié au manomètre F.

Pour faire une expérience, on verse du mercure dans les tubes verticaux et en même temps on comprime l'air du réservoir M, de manière à maintenir le mercure en bas des tubes K et L; le mercure s'élève et les deux colonnes communiquent par le tube horizontal supérieur; l'excès de mercure se déverse par l'ouverture O et par suite le mercure s'élève à un même niveau dans les deux godets A et B.

Supposons que la température de la branche gauche soit T, la température de la branche droite t, et représentons par t' la température indiquée par le thermomètre placé entre K et L; le mercure étant maintenu au bas du tube K s'élèvera d'autant plus haut en L que T sera plus grand; comptons toutes les hauteurs à partir d'un même repère, b'' par exemple : soient H et H' les hauteurs des colonnes de mercure froide et chaude, h et h' les hauteurs des colonnes en L et K; nous pouvons exprimer de deux façons la pression du gaz contenu dans le réservoir M : la hauteur de la colonne de mercure qui fait équilibre à cette force élastique du gaz est, en effet, réduite à 0°,

$$\frac{H}{1+m_t} - \frac{h}{1+m_{t'}};$$

de même la hauteur de la colonne de mercure chaud, ramenée à 0°, diminuée de la colonne K, également réduite à 0°, mesure cette force élastique. Cette seconde expression est

$$\frac{H'}{1+m_T} - \frac{h'}{1+m_{t'}};$$

en égalant ces deux quantités on en déduit

$$1+m_T = \frac{H'}{\dfrac{H}{1+m_t} - \dfrac{h'-h}{1+m_{t'}}}.$$

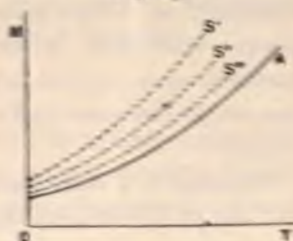
Les expériences avec la glace ont paru assez difficiles à réussir pour que Regnault préférât employer un courant d'eau; une partie de ce courant se déversait dans un petit réservoir placé entre b' et K et qui était destiné à ramener à t' degrés la température du mercure dans la branche K comme dans la branche L.

Méthode des approximations successives; résultats. — Pour déterminer à l'aide de cette formule m_T, c'est-à-dire la dilatation absolue du mercure entre 0° et T degrés, il faudrait connaître m_t et $m_{t'}$, c'est-à-dire la dilatation moyenne entre 0° et t° et entre 0° et t' degré; on peut pour tourner cette difficulté employer la méthode des approximations successives, supposer connues les valeurs de m_t et de $m_{t'}$ en les déduisant du Tableau Dulong et Petit, et calculer des séries de valeurs de m_T que l'on réunira par une formule d'interpolation; on utilisera alors cette formule pour calculer m_t et $m_{t'}$ et l'on calculera à nouveau les valeurs de m_T.

Les valeurs ainsi obtenues seront de plus en plus approchées de la valeur exacte. On peut s'en rendre compte graphiquement.

Prenons, en effet, la formule (1). Nous nous proposons d'en calculer le premier membre; le second contient m_t et $m_{t'}$; remplaçons ces quantités par leurs valeurs données par Dulong et Petit : ces valeurs sont trop fortes; elles augmentent donc leur valeur de $1+M_T$; la valeur de M_T sera donc représentée par une courbe S' (*fig.* 177) dont les ordonnées seront toujours plus grandes que celles de la courbe inconnue A qui figure exactement le phénomène.

Fig. 177.



Ces valeurs de M_T, données par la courbe S', nous fournissent deux valeurs de m_t et $m_{t'}$, encore trop fortes, mais moins, toutefois, que celles de Dulong; remplaçons, dans la formule (1), m_t et $m_{t'}$ par ces nouvelles valeurs : nous obtiendrons de nouveaux nombres pour M_T et, cette fois, le phénomène sera figuré par une deuxième courbe S'', plus voisine de A que la courbe S'. En continuant ainsi, on a des courbes S''', S'''', ..., de plus ne plus approchées de la courbe vraie que l'on peut considérer comme leur limite, et l'on voit que l'erreur peut devenir plus petite que toute quantité donnée.

Regnault modifia encore son appareil pour varier les méthodes de mesure; nous ne décrirons pas ce second dispositif, aussi bon théori-

quement que le premier et avec lequel Regnault ne fit que trente-six expériences, alors qu'il en avait fait une centaine avec celui que nous avons décrit; les résultats obtenus dans ces deux séries sont d'ailleurs concordants.

Comme les dilatations absolues du mercure croissent presque proportionnellement aux températures du thermomètre à air, elles peuvent être représentées d'une manière satisfaisante par une formule à deux termes

$$m_T = aT + bT^2.$$

Les constantes ont été calculées à l'aide de deux expériences assez éloignées et l'on a trouvé

$$\log a = \overline{4},2\,528\,690,$$
$$\log b = \overline{8},4\,019\,441.$$

Le coefficient vrai de dilatation à T° est donné par la relation

$$\frac{dm_T}{dT} = a + 2bT;$$

ce coefficient augmente avec la température.

Entre 0° et 100°, le coefficient moyen $a + bT$ est sensiblement constant; sa valeur pour 50° est $0,000\,180\,27 = \frac{1}{5547}$; c'est précisément celle dont on fait usage en général pour les corrections barométriques, et l'on peut employer avec avantage la fraction $\frac{1}{5550}$, qui est précisément celle que trouvaient Dulong et Petit entre 0° et 100°.

Regnault a, d'autre part, représenté les résultats de ses expériences par une méthode graphique; celle-ci permet en effet de distinguer à première vue les variations qui proviennent des erreurs accidentelles des observations et les erreurs constantes qui dépendent de la diversité des méthodes que l'on a employées; il fait remarquer, à ce propos, que les papiers quadrillés de commerce ne sont jamais bien réguliers, et qu'il est préférable d'exécuter les constructions graphiques sur une planche de cuivre à l'aide de laquelle on tirera les épreuves.

Sur une plaque de cuivre dont le côté de 80cm était divisé en 100 parties égales, on avait tracé un quadrillé à l'aide de la machine à diviser : les côtés des petits carrés avaient 8mm; on portait en abscisses les températures du thermomètre à air, chaque division de l'échelle correspondant à *un degré centigrade*, et l'on prenait pour ordonnées

les dilatations m_T qu'une colonne de mercure de 1^m subit en passant de o° à T degrés, chaque division de l'échelle verticale représentant un millimètre; l'emploi d'une machine à diviser a permis d'obtenir dans le tracé des points figuratifs des résultats de chacune des expériences une très grande précision.

168. — DILATATION ABSOLUE D'UN LIQUIDE QUELCONQUE.

L'étude de l'enveloppe de verre, que l'on veut employer à la détermination du coefficient de dilatation absolue d'un liquide quelconque, se fait par l'une des deux méthodes que nous avons décrites en détail.

Le coefficient moyen entre o et T est donné, pour le thermomètre à tige, par la formule

$$\mu_T = \frac{(N - n)}{Tn},$$

et, pour un thermomètre à poids, par la formule

$$\mu_T = \frac{p}{(P - p)T}.$$

Une série d'expériences faites à des températures différentes permet de calculer plusieurs valeurs de K_T par la formule

$$K_T = m_T - \mu_T.$$

Il suffira alors de recommencer exactement les mêmes opérations et d'employer des formules analogues, pour calculer pour un liquide quelconque les coefficients moyens de dilatation apparente Δ_T entre o° et T degrés.

Les températures seront déterminées par un thermomètre à mercure, comparé à un thermomètre à air.

Les coefficients moyens de dilatation absolue seront déduits de la formule

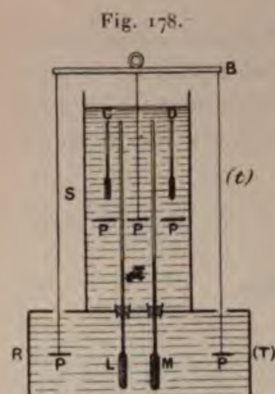
$$D_T = \Delta_T - K_T.$$

La méthode du thermomètre à poids et la méthode du thermomètre à tige peuvent toutes deux être employées : la première présente cet inconvénient que, les liquides autres que le mercure étant relativement légers, on opère sur des poids notablement plus petits, ce qui diminue la sensibilité de la méthode en même temps que les pesées du poids sorti p sont entachées d'erreur par suite de la volatilité du liquide soumis à l'expérience.

La méthode du thermomètre à tige a été le plus souvent employée dans ce genre de recherches, et c'est entre les mains de M. Is. Pierre (1842) qu'elle a, sous le nom de *Méthode des thermomètres comparés,* fourni les résultats les plus nombreux.

Ce savant, frappé d'une part de la précision que peut donner le thermomètre à tige, d'autre part de la longueur qu'il faut donner à la tige pour arriver à cette précision et de la difficulté d'obtenir une température égale dans des bains de grande hauteur, a imaginé le dispositif suivant (*fig.* 178).

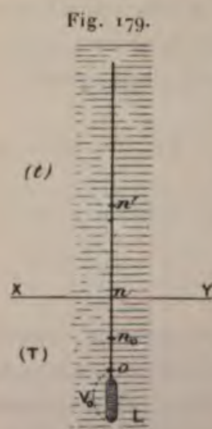
Fig. 178.



Le récipient dans lequel un liquide, formant bain chaud, est porté à la température la plus haute, est figuré en R; il a une faible hauteur et est surmonté d'un récipient cylindrique beaucoup plus haut, S, parcouru par un courant d'eau à une température constante t; des agitateurs P assurent l'égalisation des températures.

Le liquide à étudier est enfermé dans un thermomètre L, dont la tige, passée dans un bouchon étanche, traverse le fond commun qui sépare les deux bains. A côté de ce thermomètre à liquide L, se trouve un thermomètre à mercure de mêmes dimensions, M. Dans le bain supérieur sont deux petits thermomètres C et D, construits respectivement, l'un avec du liquide à étudier, l'autre avec du mercure, et dont les tiges sont *complètement plongées* dans le bain S.

Fig. 179.



Nous allons exposer avec quelque détail le calcul de cette expérience : il peut servir de type à tous les calculs similaires relatifs aux dilatations des liquides.

Soit XY (*fig.* 179) la surface de séparation des deux bains. Le thermomètre a eu, au préalable, sa tige divisée en parties d'égale capacité, numérotées de bas en haut à partir d'une division quelconque, le zéro étant en bas de la tige. Un jaugeage au mercure a fait connaître les volumes V_0 et v_0 respectifs du réservoir jusqu'à la division zéro, et d'une division de la tige.

Soit n_0 la division à laquelle s'arrête le liquide à zéro; soit n la

division qui coïncide avec la surface de séparation des deux bains, et soit n' la division à laquelle s'arrête le liquide quand on chauffe le bain inférieur à la température T°.

Exprimons que, dans le thermomètre L, au commencement et à la fin de l'expérience, le poids du liquide n'a pas varié. Le poids du liquide à o est $(V_0 + n_0 v_0) D_0$; à la fin de l'expérience, il se compose de deux parties : la première a pour expression $(V_0 + n v_0)(1 + K_T) D_T$, correspondant à la portion comprise dans le bain inférieur ; la seconde est $(n' - n) v_0 (1 + K_t) D_t$, portion comprise dans le bain supérieur. Nous avons donc

$$(1) \quad (V_0 + n_0 v_0) D_0 = (V_0 + n v_0)(1 + K_T) D_T + (n' - n) v_0 (1 + K_t) D_t,$$

K étant le coefficient de dilatation du verre.

Mais, pour tout liquide, on a

$$V_0 D_0 = V_t D_t,$$

d'où

$$D_t = D_0 \frac{V_0}{V_t} = D_0 \frac{1}{1 + m_t};$$

remplaçant dans (1) les densités à T° et à $t°$ par leurs valeurs en fonction de D_0, il vient

$$(V_0 + n_0 v_0) D_0 = \frac{(V_0 + n v_0)(1 + K_T)}{1 + m_T} D_0 + \frac{(n' - n) v_0 (1 + K_t)}{1 + m_t} D_0,$$

ou, en supprimant le facteur commun D_0,

$$(2) \quad V_0 + n_0 v_0 = (V_0 + n v_0) \frac{1 + K_T}{1 + m_T} + (n' - n) v_0 \frac{1 + K_t}{1 + m_t}.$$

Pour le thermomètre à mercure, on aura de même

$$(3) \quad U_0 + p_0 u_0 = (U_0 + p u_0) \frac{1 + K'_T}{1 + K_T} + (p' - p) u_0 \frac{1 + K'_t}{1 + \mu_t},$$

U_0, u_0, p_0, p et p' correspondant aux quantités V_0, v_0, n_0, n, n', dans le cas du thermomètre à liquide. De cette équation (3) on pourra tirer T, puisque μ_T est connu par les expériences de Regnault. T étant connu, on le portera dans (2), d'où l'on tirera m_T par la méthode des approximations successives, *m_t étant déterminé par le petit thermomètre à liquide* C, plongé dans le bain supérieur. Les résultats de ces expériences peuvent ensuite être reliés par une formule à trois termes, telle que

$$D_T = aT + bT^2 + cT^3.$$

169. — LIQUIDES SURCHAUFFÉS.

Cette même méthode, dite *des thermomètres comparés,* a été appliquée par Drion, en 1859, à l'étude des dilatations des liquides dits *surchauffés,* qui proviennent de la liquéfaction des gaz, tels que l'acide hypoazotique et l'acide sulfureux; il rappelle que les expériences de Is. Pierre montrent que la dilatation des liquides augmente rapidement avec la température et cite textuellement un passage d'un Mémoire de Thilorier publié en 1835 : « L'acide carbonique liquéfié présente le fait *étrange* et *paradoxal* d'un liquide plus dilatable que les gaz eux-mêmes; de 0° à 30° la quantité dont le volume s'est accru est égale à peu de chose près à la moitié du volume que ce liquide présentait à zéro; sa dilatation est donc quatre fois plus grande que celle de l'air. »

Ce fait étrange et paradoxal est un fait parfaitement général : la dilatation de ces liquides surchauffés, c'est-à-dire portés à une température notablement supérieure à celle de leur ébullition, devient rapidement plus grande que celle des gaz.

Drion faisait usage de tubes thermométriques un peu larges qui étaient fermés à la lampe après remplissage.

Le Tableau suivant, dans lequel sont données quelques-unes des valeurs des coefficients vrais de dilatation, montre bien que, pour les trois corps étudiés, le coefficient de dilatation dépasse à certaine température le coefficient des gaz, 0,00366.

Températures.	Éther chlorhydrique.	Acide hypoazotique.	Acide sulfureux.
0°........	0,001 482	0,001 445	0,001 734
50........	0,002 045	0,002 021	0,002 585
90	0,002 910	0,003 081	0,004 147
110........	0,003 690	»	0,005 719
130........	0,005 031	»	0,009 571

MAXIMUM DE DENSITÉ DE L'EAU.

170. — MÉTHODE DES THERMOMÈTRES COMPARÉS.

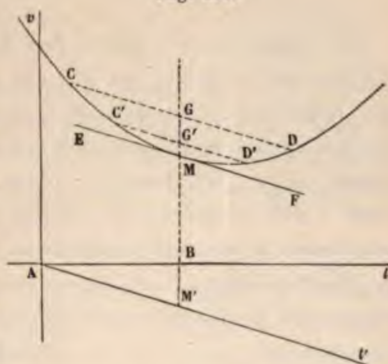
Cette méthode des thermomètres comparés, imaginée par Deluc, avait été employée par lui-même, puis par Dalton, dans des recherches sur la température du maximum de densité de l'eau; elle fut reprise

en 1839 par Despretz qui l'appliqua au même sujet et à la détermination du maximum de densité des solutions salines; c'est ce physicien qui lui donna la forme définitive que nous allons décrire.

L'appareil d'observation se compose d'un vase cylindrique en cuivre, semblable à une grande éprouvette à pied, dans lequel sont suspendus trois thermomètres à mercure et deux thermomètres à eau, alternant, et dont les réservoirs sont à la même hauteur; cette éprouvette fermée est placée dans un vase en terre rempli d'eau plus ou moins froide ou d'un mélange de glace et de sel; les observations sont faites à l'état stationnaire, c'est-à-dire lorsqu'on ne trouve plus de différence en notant la température de 2 minutes en 2 minutes.

On cherche alors à représenter les résultats par un tracé graphique, en portant en abscisses les températures données par les thermomètres à mercure et en ordonnées les volumes apparents de l'eau lus sur les thermomètres à eau; on fait ensuite passer une ligne par les extrémités de ces ordonnées; elle a une forme peu différente d'une parabole (*fig.* 180).

Fig. 180.



La plus petite ordonnée ne donnerait que le minimum de volume apparent; pour avoir le minimum de volume absolu, il faut ajouter à chacune de ces ordonnées la dilatation d'un égal volume de verre à cette même température; on a, en effet, en désignant par V_t le volume absolu à $t°$, par V'_t le volume apparent et par k la dilatation de l'enveloppe,

$$V_t = V'_t(1 + kt) = V'_t + V'kt.$$

Les valeurs de V'_t étant données par la courbe, il suffit de tracer en dessous de l'axe des t la droite At' définie par

$$y = V'kt,$$

pour que chaque ordonnée telle que MBM' comptée à partir de cette droite représente le volume absolu de l'eau à la température correspondante.

La plus courte ordonnée sera celle qui correspondra à la tangente à la parabole parallèle à la droite At'.

Le point de contact peut être déterminé avec une grande exactitude, puisque l'on sait que dans une parabole les parallèles à la tangente sont divisées en deux parties égales par les diamètres qui aboutissent au point de contact; il suffit donc de mener les deux parallèles CD, C'D', d'en joindre les milieux GG' : le point M d'intersection de cette droite avec la parabole définit le point de contact; il fait connaître par conséquent avec une grande rigueur la position du maximum.

La moyenne de toutes ces expériences est de 4°,007.

Ce procédé a permis de suivre la dilatation de l'eau jusqu'à — 20°: Gay-Lussac avait déjà constaté que, dans des tubes étroits où elle n'est pas agitée, l'eau peut descendre jusqu'à — 12° sans se solidifier.

171. — MÉTHODE DE HOPE.

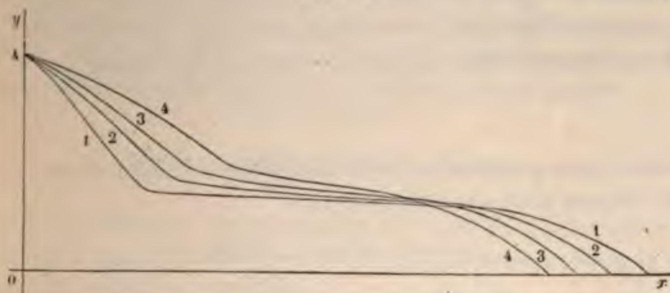
Une expérience réalisée par Trallès, en Suisse, et par Hope, en Angleterre, en 1804, et qui est le principe de la seconde méthode de Despretz, a servi plutôt à constater l'existence du maximum de densité de l'eau qu'à en déterminer la température. Ce procédé est fondé sur ce que, dans une masse liquide dont les diverses couches sont à des températures inégales, les molécules qui se trouvent au maximum de densité tombent au fond du vase. Si donc on entoure de glace le milieu d'une éprouvette pleine d'eau dont les parois sont traversées par deux thermomètres placés l'un vers le haut, l'autre vers le fond, ce dernier se refroidira d'abord jusqu'à la température du maximum, 4° environ, puis le thermomètre supérieur baissera à son tour jusqu'à cette température; si l'effet du refroidissement continue, ce même thermomètre descendra jusqu'à 0° pendant que le thermomètre inférieur restera stationnaire à 4°.

Despretz transforma cette simple expérience en une méthode véritablement scientifique; il étudia le réchauffement et le refroidissement d'une masse d'eau pesant 6^{kg}, renfermée dans un vase de faïence. Quatre thermomètres étaient placés horizontalement dans un plan vertical, deux d'un côté, deux de l'autre, de façon que les milieux des réservoirs fussent dans l'axe du vase; numérotons-les 1, 2, 3 et 4, à partir de la base; le vase avait 27^{cm} de hauteur; les thermomètres étaient, le premier à 5^{cm},4 du fond, et les suivants à cette même distance les uns des autres. Ce vase fermé et plein d'eau était soutenu en l'air par des cordes. De minute en minute on notait la tempéra-

ture indiquée par les thermomètres; on procédait par échauffement ou par refroidissement.

On construisait graphiquement les courbes des températures indiquées par chaque thermomètre, en prenant les temps pour abscisses, les températures pour ordonnées; on obtenait ainsi quatre courbes (*fig.* 181) et l'on prenait : 1° la moyenne de toutes les températures

Fig. 181.



où les courbes changent brusquement de direction; 2° la moyenne des points d'intersection de ces courbes; 3° la moyenne des points d'intersection de la courbe tracée d'après les températures moyennes avec les quatre courbes; 4° enfin la moyenne générale de ces moyennes.

On a trouvé de cette façon 3°,987.

Despretz fait remarquer que, les thermomètres étant placés pendant l'opération dans une position horizontale, tandis qu'ils avaient été gradués dans une position verticale, ils indiquaient une température trop élevée; dans la position verticale la pression de la colonne augmente en effet la capacité du réservoir. En essayant ses thermomètres à 0° debout et couché, il constata une correction de 0°,052.

172. — EXPÉRIENCES DE HÄLLSTRÖM.

Bien avant ces expériences, on avait déjà reconnu l'existence du maximum de densité de l'eau et institué des expériences pour déterminer la température correspondant à ce point intéressant.

La méthode suivie par Hällström paraît la plus simple; elle consiste à peser un corps dans l'eau prise à différentes températures. Schmidt et Charles se servaient d'aéromètres; Lefebvre-Gineau pesait un cylindre de laiton; Hällström employait des boules de verre creuses lestées avec du sable ou pleines, suspendues à la balance par un cheveu.

On peut calculer le volume de la sphère de verre à toutes les températures; il suffit pour cela de connaître son coefficient k de dilatation cubique, que Hällström prenait égal au triple du coefficient de dilatation linéaire mesuré sur une règle du même verre.

On peut mesurer la poussée que subit cette sphère dans l'eau à différentes températures; elle exprime le poids d'un volume d'eau égal au volume de la sphère à cette même température.

Le volume à t° peut s'exprimer de la façon suivante : ayant mesuré, à des températures variées, les longueurs d'un tube de verre, provenant de la même coulée, il put les relier par la formule

$$l = l_0(1 + kt + k't^2).$$

Il admit alors que le volume de la sphère à t° était donné en fonction du volume à zéro par l'expression

$$V = V_0(1 + kt + k't^2)^3, \tag{1}$$

ce qui suppose que la dilatation de la sphère de verre est régulière, et identique à celle de la tige étudiée.

Les poussées P que subit la sphère dans l'eau à t° peuvent se relier à la poussée à P_0 par une relation de la forme

$$P = P_0(1 + \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3). \tag{2}$$

Le quotient de ces deux équations donne

$$D_t = D_0 \frac{(1 + \alpha t + \beta t^2) + \gamma t^3}{(1 + kt + k't^2)^3}.$$

Car $\frac{P_t}{V_t}$ et $\frac{P_0}{V_0}$ sont les densités de l'eau à t° et à zéro; en effectuant et négligeant les termes supérieurs au troisième degré, il vient

$$D_t = D_0(1 + at + bt^2 + ct^3). \tag{3}$$

a, b, c sont des coefficients qui peuvent se calculer en fonction des coefficients k, k', α, β, γ résultant de la représentation des expériences préliminaires par les formules (1) et (2).

En dérivant la relation (3) et exprimant que cette dérivée est nulle, on aura une équation dont les racines répondront au problème proposé; on posera donc

$$a + 2bt + 3ct^2 = 0,$$

l'une des racines est

$$t = 4^\circ,108.$$

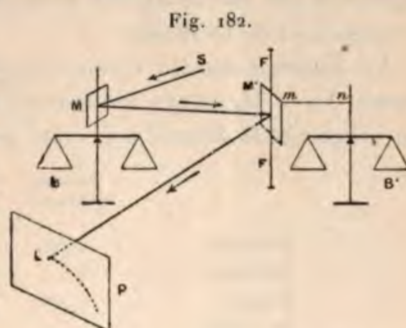
Cette valeur est déterminée avec une incertitude de $\pm 0°,238$; de sorte que la température du maximum de densité n'est connue qu'à $0°,5$ près.

Toutes les expériences faites par cette méthode sont affectées d'une cause d'erreur, le défaut d'identité entre la substance employée et celle qui a servi à la détermination du coefficient de dilatation; Hällström crut se mettre à l'abri de ce reproche en déterminant le coefficient sur des échantillons de verre provenant de la même coulée; mais on sait aujourd'hui que deux échantillons qui paraissent devoir être identiques sont loin d'avoir le même coefficient : un tube, une sphère pleine ou creuse, une tige ne présentent pas la même dilatation, même lorsqu'ils proviennent de la même coulée.

173. — MÉTHODE DE M. A. BERGET.

M. Berget a indiqué une méthode qui force le phénomène de la dilatation de l'eau à s'enregistrer photographiquement sous la forme d'une courbe dont les abscisses sont les températures et les volumes les ordonnées (*fig.* 182).

Fig. 182.



Deux balances B et B' ont leurs fléaux solidaires de deux miroirs M et M' qui oscillent, l'un autour d'un axe horizontal qui n'est autre que le couteau de la balance B, l'autre autour d'un axe vertical formé par un fil tendu F auquel le mouvement de la balance B' est transmis par un fil de cocon mn; un même rayon lumineux S se réfléchit successivement sur ces deux miroirs et va donner sur une surface photographique P un point brillant L.

Sur la première balance est équilibrée la coupelle d'un thermomètre à poids contenant de l'eau et dont le bec plonge dans l'eau de la coupelle; sur la seconde, celle d'un thermomètre à poids identique, contenant du mercure. Dans ces conditions, les surcharges des balances mesurent les dilatations. Or, l'angle α, dont s'incline une balance, est donné par

$$\tan g\alpha = \frac{pl}{\pi d};$$

sa tangente est donc proportionnelle à la surcharge p. Mais la mé-

thode des miroirs mesure, comme nous le verrons en Optique, précisément les tangentes des angles : les abscisses et les ordonnées de la courbe tracée par le déplacement du point lumineux sur la surface sensible sont donc respectivement proportionnelles aux températures et aux dilatations de l'eau.

Pour éviter l'évaporation de cette eau, on la recouvre d'une couche d'huile dans la coupelle, et l'on équilibre cette coupelle par une coupelle identique. Enfin, les corrections de poussées hydrostatiques et de capillarité, dues à l'immersion du bec du thermomètre dans la coupelle placée sur la balance, sont éliminées par l'immersion, dans une coupelle fixe, d'une tige de même diamètre que le bec du thermomètre, fixée *sous* le plateau où se trouve la coupelle-tare, et plongeant dans le même liquide.

174. — RÉSULTATS.

Des expériences plus récentes dues à M. Rossetti, et faites par la méthode des thermomètres comparés, ont confirmé l'exactitude des expériences de Despretz.

Le Tableau suivant résume les résultats dus à quelques observateurs, V_0 et D_0 représentent le volume et la densité de l'eau à zéro, le volume et la densité à 4° étant pris pour unités :

	Maximum de densité.	V_0.	D_0.
Rossetti........	4,07	1,000134	0,999866
Despretz........	4	1,000136	0,999862
Kopp...........	4,08	1,000123	0,999877
Is. Pierre.......	»	1,000119	0,999881

Les nombres obtenus par Despretz et par M. Rossetti inspirent le plus de confiance, et sont très voisins; la courbe de dilatation n'est pas symétrique des deux côtés du maximum d'après Despretz, et d'après M. Rossetti, qui confirme ce fait, l'eau aurait la même densité à la température de $8^o,46$ et à zéro.

On peut calculer les volumes de l'eau sur toute l'échelle des températures, par la formule suivante due à Rossetti :

$$V_t = 1 - A(t-4)^2 - B(t-4)^{2,6} + C(t-4)^3$$

$$A = 0,00000837991,$$
$$B = 0,000000378702,$$
$$C = 0,0000000224329.$$

Les différences entre les valeurs calculées et les valeurs tirées des expériences ne dépassent pas dans les températures élevées ±0,0003; cette formule nous dispensera de donner un Tableau des densités et des volumes aux différentes températures.

M. Amagat a trouvé que, si l'on étudie le maximum de densité de l'eau sous des pressions élevées, ce maximum s'abaisse de 0°,024 par atmosphère, et se produit à 0°, pour une pression de 170 atmosphères.

CHAPITRE IV.

DILATATION DES SOLIDES.

Les connaissances relatives à la dilatation des solides peuvent se déduire d'expériences faites en vue de déterminer la dilatation linéaire ou la dilatation cubique de ces substances; nous avons montré, en effet, quelle relation existe entre ces dilatations.

175. — MÉTHODE DU THERMOMÈTRE A POIDS.

La dilatation cubique peut se mesurer par l'appareil que nous avons étudié déjà : le thermomètre à poids; il nous a fait connaître la dilatation cubique de verres de différentes provenances; une modification très simple de cette expérience, due à Dulong et Petit, permet de mesurer la dilatation cubique de toute substance insoluble dans le mercure, ou protégée contre ce liquide par une légère couche d'oxyde ou de vernis.

On détermine le poids P d'un cylindre de fer, par exemple, de densité d à 0°, et on l'enveloppe d'un tube que l'on ferme d'un bout et à l'autre extrémité duquel on soude un tube capillaire recourbé pour le transformer en thermomètre à poids; on effectue ensuite avec cet appareil, comme s'il était vide, toutes les opérations que nous avons décrites (164); elles font connaître le poids P′ de mercure de densité d' à 0° qui remplit la capacité restée vide du tube à zéro, et le poids p de mercure qui en sort à la température T. Appelons x_T la dilatation cubique du métal entre 0 et T degrés, m_T la dilatation correspondante du mercure, et K_T la dilatation de l'enveloppe; nous pouvons trouver une équation qui nous permettra de calculer x_T, soit que nous écrivions qu'à T degrés le volume du contenant est égal au volume du contenu, soit que nous écrivions qu'à cette même température l'excès de dilatation du contenu sur l'accroissement de volume du contenant est égal au volume du mercure sorti. L'expres-

sion de cette deuxième formule sera plus simple; on aura

$$\frac{P}{d}x_T + \frac{P'}{d'}m_T - \left(\frac{P}{d} + \frac{P'}{d'}\right)K_T = \frac{p}{d}(1 + m_T).$$

m_T est donné par les expériences sur la dilatation du mercure; quant à K_T, le meilleur serait de le déterminer directement en construisant un thermomètre à poids avec une partie du tube qui a servi à l'expérience.

On peut, dans ces expériences, laisser au thermomètre sa forme ordinaire à tige, comme l'a fait Billet : la méthode est absolument analogue.

176. — MÉTHODE DE LAPLACE ET DE LAVOISIER.

Les méthodes de mesure des dilatations linéaires employées jusque dans la première partie du XIX[e] siècle ne présentent plus aujourd'hui qu'un intérêt historique; elles ont été remplacées par des méthodes d'une très haute précision : la méthode optique de Fizeau et la méthode du comparateur, toutes deux employées par le Bureau international des Poids et Mesures.

La méthode du comparateur, moins élégante mais très précise, se comprend par suite de la description de l'instrument de mesure qui en forme la partie essentielle : on pointe, avec les micromètres, les deux extrémités de la barre placée dans une auge à 0°; on porte ensuite cette auge à la température T, et la somme des déplacements des deux vis micrométriques donne directement l'allongement de la barre.

La méthode interférentielle de Fizeau est décrite dans une autre partie de cet Ouvrage.

La méthode employée par Laplace et Lavoisier, en 1782, rappelle en principe des instruments imaginés par Muschenbroek, Bouguer, Brongniart, etc., et destinés à montrer la dilatation des corps solides par la chaleur ou à déterminer des termes fixes dans les hautes températures et que l'on nomme des *pyromètres*.

La barre métallique AB (*fig.* 183) s'appuie par une de ses extrémités sur un obstacle fixe F et par l'autre sur un levier AO mobile autour de l'axe O, et qui entraîne dans son mouvement une lunette L dont l'axe optique vient rencontrer une mire M placée à grande distance.

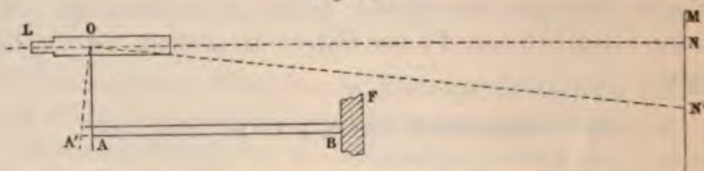
Lorsque, par suite de la dilatation, l'extrémité A de la tige vient en A', le levier étant déplacé, l'œil aperçoit l'image du point N' qui

succède au point N sur l'axe optique, et la similitude des deux triangles AA'O, NN'O conduit à la relation

$$AA' = NN' \frac{AO}{NO}.$$

La connaissance de l'allongement AA' de la barre résultera donc de la lecture de la longueur NN' sur la règle divisée et de la mesure des quantités AO et NO.

Fig. 183.



La mesure de AO serait, si on la faisait directement, entachée d'une erreur relative considérable, par suite de la détermination incertaine du point A, et de la faible grandeur de AO. On évite ces erreurs en mesurant, non pas séparément AO et NO, mais directement le rapport $\frac{AO}{NO}$.

A cet effet, on met dans la cuve, à 0°, une barre AB, dont on a mesuré la longueur l; on vise dans la lunette la division n; on remplace alors la barre de longueur l par une autre, de longueur l', mesurée à 0° : on vise la division n', et l'on a

$$l' - l = (n' - n) \frac{AO}{NO},$$

relation dans laquelle tout est connu, excepté le rapport $\frac{AO}{NO}$.

Les règles de 2m employées à ces mesures étaient chauffées dans un bain que l'on remplissait d'abord de glace et ensuite d'eau chaude, dont on déterminait la température avec de bons thermomètres à mercure; la mire était placée le plus souvent à 100 toises, et dans ce cas le rapport $\frac{NO}{AO}$ était égal à 144. On le déterminait expérimentalement en plaçant à 0° deux règles inégales, de longueurs connues.

177. — MÉTHODE DIFFÉRENTIELLE.

L'étude de l'allongement des barres métalliques préoccupait surtout à ces époques les physiciens chargés de mesurer une base destinée à des opérations de triangulation.

Aussi la méthode différentielle de Dulong et Petit n'est-elle autre chose que la méthode imaginée par Borda pour connaître la température de la règle de platine employée aux mesures de longueur dans la grande opération de la méridienne en France.

L'appareil de Borda se composait d'une règle en platine de 2^m environ, attachée par une de ses extrémités à une règle de cuivre de longueur un peu moindre. L'appareil étant dans la glace, on trace, vers l'extrémité de la règle de cuivre, sur la règle de platine, des divisions rigoureusement équidistantes (au cinquième de millimètre dans l'appareil de Dulong et Petit), et l'on trace en regard un vernier au vingtième sur la règle de cuivre. L'appareil étant porté à une température quelconque, on connaît par le vernier l'excès de dilatation de l'une des barres sur l'autre, et, par conséquent, on peut à volonté résoudre l'un des problèmes suivants :

1° *Calculer la température, en supposant connues les dilatations des deux tiges :* c'est le problème que se posait Borda.

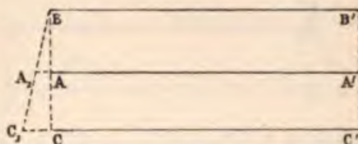
2° *Calculer la dilatation de l'une des barres, connaissant la dilatation de l'autre et la température t :* c'est l'étude des dilatations faite par Dulong et Petit.

178. — APPAREIL DE RAMSDEN.

C'est encore en vue de la mesure de la méridienne que fut construit par Ramsden un appareil imaginé par le général Roy pour étudier la dilatation des règles métalliques.

La règle à étudier AA′ est placée dans une auge que l'on portera à des températures variées; de part et d'autre se trouvent deux autres règles BB′, CC′ parallèles à la première, autant que possible (*fig.* 184), et soutenues dans des auges où elles sont constamment maintenues à zéro dans la glace fondante; les extrémités gauches de ces barres portent en B une mire formée par deux fils croisés, soutenus dans un anneau, en A un objectif porté dans un tube de laiton, en C un oculaire muni d'un réticule; dans le plan de ce réticule se trouvait un fil vertical mobile à l'aide d'une vis micrométrique parallèlement à l'axe de la règle CC′; l'objectif donnera de la mire une image réelle qui pourra venir se superposer au réticule, de sorte que l'œil, placé en avant de l'oculaire, verra se superposer

Fig. 184.



ces deux croisées de fil, à condition que les centres optiques des deux lentilles se trouvent sur la ligne de jonction des deux réticules. Les extrémités droites portent un système optique analogue, mais dont toutes les pièces sont fixes.

Au début de l'expérience, les trois auges étant pleines de glace, on déplace la règle AA', si cela est nécessaire, à l'aide d'une vis passant à travers la paroi de l'auge, de façon à établir la coïncidence pour le système optique de droite; puis on déplace le réticule mobile du système de gauche, de façon à établir aussi la coïncidence.

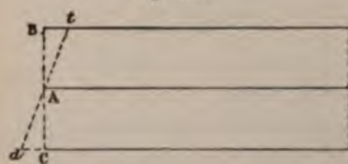
On chauffe alors la barre AA' et l'on cherche à la maintenir à une température stationnaire que l'on mesure; à ce moment, on rétablit la coïncidence pour le système de droite, et l'on mesure, à l'aide de la vis micrométrique, le déplacement qu'il faut donner au fil mobile du réticule pour le ramener en coïncidence avec l'image de la mire fixe dans le système de gauche.

Il est facile de voir, sur la figure, que, la mire étant demeurée fixe en B, le centre optique de l'objectif s'étant déplacé en A_1, l'image de B a dû se former en C_1 et qu'il a fallu déplacer, par conséquent, le fil mobile de la quantité CC_1. Les deux triangles AA_1B, CC_1B étant semblables, si les règles sont parallèles, on voit que l'on a

$$AA_1 = CC_1 \frac{BA}{BC}.$$

Ce rapport $\frac{BA}{BC}$, qui était environ $\frac{1}{5}$ dans l'appareil de Ramsden, peut se mesurer directement en mettant à la place de la mire une plaque portant quelques traits verticaux équidistants dont la distance était connue avec une très grande exactitude; en mesurant, à l'aide du micromètre, le déplacement du réticule correspondant à la distance de deux traits, alors que les trois règles étaient dans la glace fondante (*fig.* 185), on obtenait la relation

Fig. 185.



$$\frac{BA}{BC} = \frac{BA}{BA + AC} = \frac{Bt}{Bt + dC}.$$

L'allongement de la barre étant connu, il suffit de mesurer sa longueur pour en déduire la dilatation par unité de longueur.

Ce dispositif expérimental est à l'abri de critiques que l'on peut

adresser à des appareils de construction plus récente, dans lesquels la vis micrométrique est reliée à l'objectif et portée, par conséquent, par la règle AA′, dont la température est variable, ce qui nécessite une correction assez difficile à faire exactement, tandis que dans l'appareil de Ramsden la vis micrométrique reliée à une règle sans cesse à 0° peut être considérée comme fournissant des résultats toujours comparables à eux-mêmes.

CHAPITRE V.

DILATATION DES GAZ.

179. — EXPÉRIENCES DE GAY-LUSSAC.

Les expériences sur la dilatation des gaz antérieures à celles de Gay-Lussac n'ont qu'un médiocre intérêt, la plupart des circonstances qui influent sur ce phénomène étant restées complètement inconnues des physiciens de cette époque.

Les travaux de Gay-Lussac sur ce sujet sont, au contraire, restés classiques, et les résultats numériques auxquels il fut conduit ont pendant longtemps fait autorité.

Sa première méthode, qui est peu connue, consiste à enfermer un gaz dans un ballon fermé par un robinet, puis à le chauffer dans l'eau bouillante; en ouvrant le robinet, l'excès de gaz s'échappe et le ballon reste plein, à la pression atmosphérique, de gaz à 100° environ. On referme le robinet et on laisse l'appareil se refroidir, puis on l'ouvre sur une cuve pleine d'eau à 0°, en ayant soin de l'enfoncer de façon que la pression reste toujours égale à la pression atmosphérique, les niveaux de l'eau dans le ballon et dans la cuve étant dans le même plan. On comprend qu'il suffise alors de refermer le ballon et de déterminer le poids d'eau qui y est entré pour connaître la contraction du gaz entre 100° et zéro. Si l'on procède enfin à un jaugeage à l'eau, on en déduit le volume initial du gaz; et ces éléments ont permis à Gay-Lussac de trouver que l'air, l'azote, l'oxygène et l'hydrogène se dilataient de 0,375 de leur volume à 0°, en passant de 0° à 100°.

Ayant craint que la mesure des volumes des gaz en présence de l'eau n'ait faussé les résultats, il institua une deuxième série d'expériences, qui sont beaucoup plus connues et dont on trouve la description dans le *Traité de Physique* de Biot.

Son appareil consiste essentiellement en une boule soufflée à l'extrémité d'un tube étroit exactement gradué en parties d'égale capa-

cité. Pour dessécher le réservoir, Gay-Lussac le chauffe jusqu'à réduire en vapeur la petite couche d'eau adhérente aux parois; puis il le remplit de mercure qu'il fait bouillir comme dans un thermomètre, et alors, remarque-t-il, « soit que cette ébullition enlève ou non toute la couche d'eau adhérente au verre, du moins il ne pourra plus s'en rien exhaler quand le tube sera porté à des températures moindres que celles où le mercure peut bouillir ».

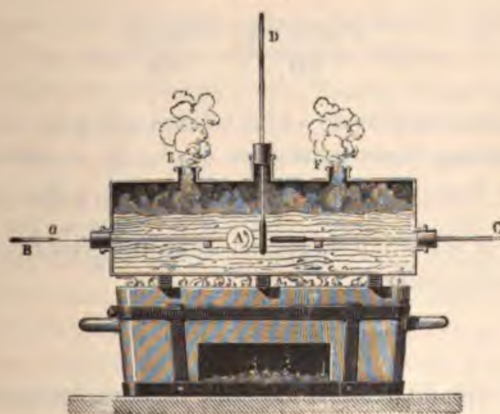
Fig. 186.



Ensuite, pour n'introduire dans ces tubes que de l'air ou des gaz secs, il lute à leur extrémité ouverte un autre tube plus large (*fig.* 186), rempli de fragments de chlorure de calcium ou de toute autre matière desséchante. Pour faire pénétrer l'air dans le tube et dans la boule, on renverse l'appareil et, en le maintenant vertical, on agite un petit *fil de fer* très fin, préalablement introduit dans le tube; le mercure s'écoule goutte à goutte et est remplacé par de l'air sec, si l'on a eu soin de le laisser séjourner quelque temps dans le réservoir à chlorure; avec quelques précautions on parvient à n'avoir plus dans le tube qu'une petite colonne de mercure a, qui sert à la fois de piston et d'index.

Pour porter le gaz successivement à diverses températures connues, Gay-Lussac employait une caisse métallique placée sur un fourneau

Fig. 187.



(*fig.* 187); les parois opposées étaient percées de deux ouvertures; dans l'une, un bouchon de liège soutenait le thermomètre à gaz, dans

l'autre était placé un thermomètre à mercure soutenu dans le même plan horizontal; les deux appareils étant ainsi placés horizontalement dans la même couche d'eau, Gay-Lussac pensait connaître exactement la température à laquelle était porté le gaz sans qu'il y eût lieu de se préoccuper de l'inégalité de température des diverses couches du liquide; un autre thermomètre était placé verticalement à travers une ouverture ménagée dans le couvercle de l'étuve : il servait à indiquer approximativement la température de l'eau et permettait de régler le chauffage.

Pour faire les lectures au thermomètre et pour repérer la position du globule de mercure sur le tube gradué, on le faisait glisser à frottement doux dans les bouchons, jusqu'à ce que les extrémités des colonnes de mercure vinssent se montrer aux orifices.

Appelons V le nombre de divisions que le gaz occupe dans l'enveloppe de verre lorsque celle-ci est entourée de glace fondante, et V' le nombre de divisions occupées par la même masse gazeuse lorsque la température est devenue t; soient H et H' les pressions lues au baromètre à l'instant des observations des volumes; représentons par δ la dilatation cubique du gaz, de 0° à t°, et par K le coëfficient de dilatation cubique de verre qui forme le réservoir à gaz; le volume du gaz à t° et sous la pression de 760^{mm} de mercure peut s'exprimer par $\frac{V(1+\delta)H}{760}$ ou par $\frac{V'(t+Kt)H'}{760}$. On peut donc écrire l'égalité

$$\frac{V(1+\delta)H}{760} = \frac{V'(1+Kt)H'}{760},$$

d'où

$$\delta = \frac{V'H' - VH}{VH} + \frac{V'H'Kt}{VH}.$$

En donnant successivement à t les valeurs t_1, t_2, t_3, ..., on pourra calculer les valeurs correspondantes δ_1, δ_2, δ_3, ... et comparer les rapports $\frac{\delta_1}{t_1}$, $\frac{\delta_2}{t_2}$, $\frac{\delta_3}{t_3}$, ...; or ces calculs conduisent à des valeurs numériques égales : la dilatation du gaz est donc uniforme et nous pouvons écrire d'une façon générale

$$\alpha = \frac{\delta}{t}.$$

Gay-Lussac étendit ces résultats aux vapeurs, lorsqu'elles sont un peu éloignées de leur point de condensation, en opérant avec des gaz non desséchés contenant par suite des quantités variables de vapeur d'eau, et par quelques expériences avec la vapeur d'éther sulfurique;

les valeurs de α, calculées comme nous venons de le dire, restèrent identiques.

Enfin des expériences faites en 1823 par Davy, qui étudia la dilatation des gaz soumis à des pressions très différentes, semblèrent montrer que cette dilatation était indépendante de la pression initiale.

180. — LOIS DE GAY-LUSSAC.

Ces expériences diverses conduisent à énoncer les lois suivantes, qui sont connues sous le nom de *lois de Gay-Lussac :*

1° *Les gaz et les vapeurs exposés à des températures égales, sous la même pression, se dilatent exactement de la même quantité;*

2° *La dilatation des gaz entre* 0° *et* 100° *est égale à* 0,375 *de leur volume primitif à* 0°, *la pression étant supposée constante;*

3° *La dilatation des gaz est indépendante de leur pression.*

181. — CRITIQUE DE CES EXPÉRIENCES.

Pendant près de quarante ans, ces résultats furent considérés comme étant d'une exactitude parfaite, jusqu'à ce qu'un physicien suédois, Rudberg, fît voir que le coefficient adopté était trop élevé et que sa véritable valeur devait être abaissée à 0,00365 environ.

En discutant les expériences de Gay-Lussac, on rencontre en effet des causes d'erreur.

L'index de mercure ne bouche pas parfaitement le tube dans lequel il se déplace. Des expériences directes de Regnault le prouvent, car l'index ne revient pas au même point, l'appareil étant plongé dans la glace, lorsque dans l'intervalle le gaz a été porté à la température d'ébullition. Mais si, dans une expérience de Regnault, il est passé de la division 152,7 à la division 154,5, à la même pression, dans une autre il est passé de 66,5 à 60,0, alors que la variation de la pression atmosphérique aurait dû produire un changement en sens contraire. Cette cause d'erreur aurait donc dû conduire Gay-Lussac à des résultats très variés, tantôt trop forts, tantôt trop faibles.

L'index peut être séparé du verre par une gaine d'air qui, restant en arrière quand le mercure se déplace, augmenterait à 100° le volume mesuré; mais le volume de cette gaine doit être excessivement faible.

Enfin, si le gaz était certainement desséché par son passage sur le chlorure de calcium, on n'en peut dire autant des parois du ballon;

on sait aujourd'hui, et c'est sur ce point que Rudberg appela l'attention des physiciens, que la vapeur d'eau condensée sur les parois de verre d'un ballon ne peut se dégager entièrement par un seul chauffage, même dans le vide; elle ne se dégage que lentement et ce n'est que par la méthode indiquée par Rudberg, c'est-à-dire en faisant de 30 à 50 fois le vide dans le ballon porté à 100°, et laissant à chaque fois rentrer le gaz sec, que l'on peut arriver à remplir un vase de verre, dont les parois sont si hygrométriques, d'un gaz réellement sec.

Ainsi, on doit penser que les précautions indiquées par Gay-Lussac, pour dessécher le réservoir thermométrique qu'il employait, étaient insuffisantes, et que c'est là la principale cause d'erreur de ses expériences. C'est la seule, d'ailleurs, dont le sens concorde nettement avec l'erreur qu'on y a relevée.

182. — DIVERSES SORTES DE DILATATIONS DES GAZ.

Regnault en France, Magnus en Allemagne, publièrent, à la fin de l'année 1841, les résultats des travaux qu'ils avaient entrepris pour vérifier les lois de dilatation des gaz; nous donnerons en détail les expériences du premier d'entre eux, en les faisant précéder de quelques considérations générales sur les gaz, qui ont conduit les physiciens à distinguer deux sortes de coefficients de dilatation.

Le volume d'un gaz change, soit lorsqu'on modifie la pression qu'il supporte, soit lorsqu'on fait varier sa température. On peut donc considérer une fonction

$$f(v, p, t) = 0,$$

qui, pour un gaz donné, relie le volume aux deux variables indépendantes, la pression et la température.

La loi de Mariotte, relative au cas où la température est constante, peut être considérée comme exprimant la relation qui existe entre le volume et la pression d'une même masse gazeuse, si les variations ne sont pas trop étendues; elle s'exprime par

$$pv = p_0 v_0.$$

La loi de Gay-Lussac, relative au cas où la pression est constante, donne théoriquement diverses valeurs du volume d'une même masse gazeuse lorsque la température vient à changer; elle s'exprime par la relation

$$v = v_0(1 + \alpha t).$$

Si donc ces deux lois sont applicables, nous allons pouvoir déterminer la forme de la fonction f. En effet, considérons trois états d'une même masse gazeuse définis par les valeurs suivantes des variables

$$\begin{matrix} v, & p, & t, \\ v', & p', & t', \\ v'', & p, & t'. \end{matrix}$$

La loi de Mariotte est applicable au deuxième et au troisième état, pour lesquels la température a la même valeur t' ; on a donc

$$v''p = v'p'.$$

La loi de Gay-Lussac est applicable au premier et au troisième état, pour lesquels la pression a la même valeur p ; on a donc

$$\frac{v}{1+\alpha t} = \frac{v''}{1+\alpha t'}.$$

Multipliant membre à membre, v'' disparaît, et il reste

$$(1) \qquad \frac{vp}{1+\alpha t} = \frac{v'p'}{1+\alpha t'} = p_0 v_0 = \text{const.}$$

Pour une même masse gazeuse, le rapport du produit du volume par la pression au binome de dilatation est une quantité constante.

Différentions la relation

$$pv = p_0 v_0 (1+\alpha t),$$

il vient

$$p\,dv + v\,dp = p_0 v_0 \alpha\,dt.$$

On peut considérer deux cas :

1° Supposons que $dp = 0$; le gaz se dilate à pression constante : c'est le cas des expériences de Gay-Lussac ; on a alors, en remarquant que $p = p_0$,

$$p_0\,dv = p_0 v_0 \alpha_1\,dt$$

ou

$$\alpha_1 = \frac{1}{v_0}\frac{dv}{dt}.$$

Cette expression définit le *coefficient vrai de dilatation d'un gaz à pression constante, et à la température t.*

Ce coefficient ne sera constant que pour un gaz théoriquement parfait suivant la loi de Mariotte et celle de Gay-Lussac; en général, il variera avec p et avec t.

2° Supposons que $dv = 0$; le gaz ne se dilate plus, sa pression seule varie, et, puisque $v = v_0$, on a

$$v_0\,dp = p_0 v_0 \alpha_2\,dt$$

ou

$$\alpha_2 = \frac{1}{p_0}\frac{dp}{dt}.$$

Ceci n'est plus, à proprement parler, un coefficient de dilatation, mais un coefficient de variation de pression; c'est ce qu'on appelle le *coefficient de dilatation à volume constant*. Il est, en réalité, fonction du volume de l'unité de masse du gaz et de sa température.

Si la relation (1) était satisfaite, c'est-à-dire si l'on pouvait trouver un gaz parfait, on aurait

$$\alpha_1 = \alpha_2.$$

Mais nous savons que les gaz sont, en général, plus compressibles que ne l'indique la loi de Mariotte; donc, si p_0 et v_0 sont la pression et le volume d'une masse gazeuse à 0°, supposons que, le volume restant le même, la température s'élève à $t°$ et la pression devienne p, on aura

$$p = p_0(1 + \alpha_2 t).$$

Si, au contraire, la pression restait constante, le volume devenant v par suite de la même élévation de température t, on aurait

$$v = v_0(1 + \alpha_1 t),$$

ou bien, en divisant membre à membre,

$$\frac{p v_0}{p_0 v} = \frac{1 + \alpha_2 t}{1 + \alpha_1 t}.$$

Or v_0 et p d'une part, v et p_0 d'autre part, sont les volumes et pressions correspondants de la même masse de gaz à t degrés, et, p étant plus grand que p_0, on sait que les écarts à la loi de Mariotte s'expriment par

$$p v_0 < p_0 v;$$

donc

$$\alpha_2 < \alpha_1.$$

Le coefficient de dilatation à volume constant devra, pour tous les

gaz, sauf l'hydrogène, être plus petit que le coefficient de dilatation à pression constante.

Les expériences de Regnault vérifient, comme nous allons le voir, ces prévisions théoriques.

Parmi ces expériences, nous en décrirons trois, qui ont eu pour but de déterminer : la première, un coefficient α, intermédiaire entre α_1 et α_2, c'est-à-dire correspondant à des expériences dans lesquelles le volume et la pression changeaient en même temps que la température; la seconde, le coefficient α_2 à volume constant; la troisième, le coefficient α_1 à pression constante.

183. — REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE DE LA DILATATION DES GAZ PARFAITS.

Il n'est pas sans intérêt de remarquer que, si l'on considère l'équation (1)

$$\frac{pv}{1+\alpha t} = M, \tag{1}$$

M étant une constante, cette équation, qui est *caractéristique des gaz parfaits,* définit un paraboloïde hyperbolique, les trois coordonnées étant p, v, t, puisque α et M sont des constantes. On le voit facilement en remplaçant successivement les trois coordonnées par des constantes, c'est-à-dire en coupant la surface par trois plans parallèles aux plans de coordonnées.

Pour $t = \text{const.}$, on a

$$pv = \text{const.};$$

c'est l'équation d'une hyperbole équilatère; elle définit une ligne *isotherme*.

Pour $p = \text{const.}$, on a

$$v = A(1+\alpha t),$$

A étant une constante : c'est l'équation d'une droite génératrice de la surface, et, si l'on fait $v = \text{const.}$, on trouve

$$p = B(1+\alpha t),$$

équation d'une autre génératrice rectiligne.

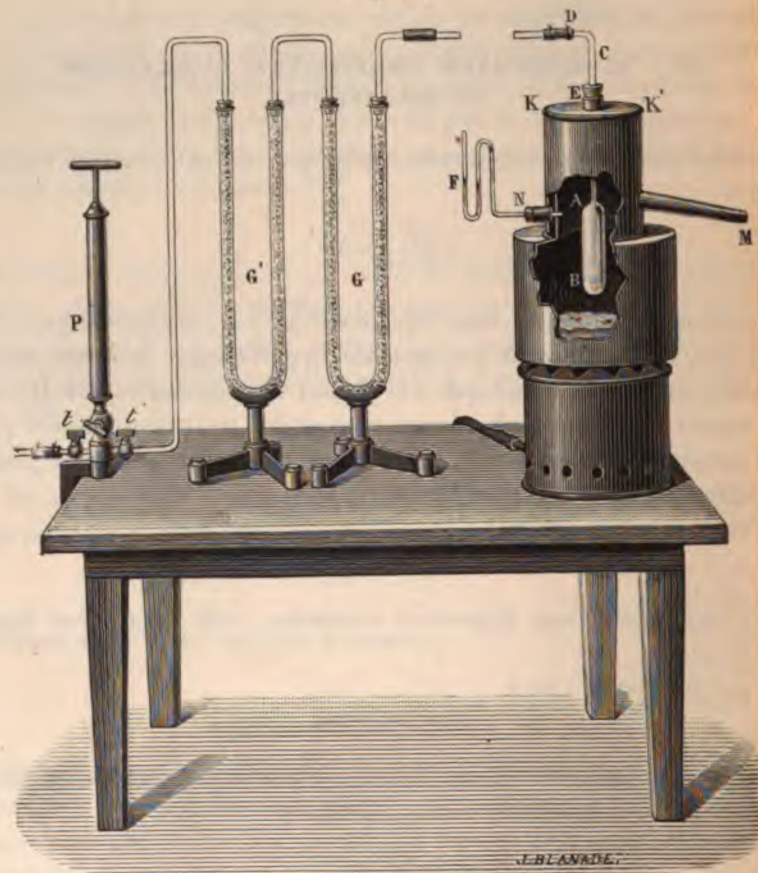
EXPÉRIENCES DE REGNAULT.

184. — DÉTERMINATION DE α.

La première série des expériences de Regnault a été faite par u méthode semblable à celle de Rudberg.

AB est un réservoir cylindrique (*fig.* 188) pouvant contenir

Fig. 188.



800g à 1000g de mercure, auquel est soudé un tube thermom trique AD recourbé à angle droit et étiré en pointe. Il est sout dans l'appareil à ébullition que l'on emploie pour la détermina

du point 100; d'autre part, il est relié à une pompe à main par l'intermédiaire d'un appareil de dessiccation, composé de tubes de 1^m de long et de $0^m,02$ de diamètre, remplis de ponce imbibée d'acide sulfurique. On fait 25 ou 30 fois le vide dans l'appareil, et on laisse chaque fois rentrer de l'air sec lentement; en même temps l'appareil est chauffé dans la vapeur de l'eau bouillante. Enfin, une dernière fois, on laisse rentrer de l'air sec, et, maintenant tous les robinets ouverts, on met le réservoir en communication avec l'atmosphère.

Fig. 189.



On détache, au bout d'une demi-heure, le caoutchouc qui sert à joindre l'appareil aux tubes desséchants, on ferme la pointe étirée au chalumeau et l'on note en même temps la pression atmosphérique H au baromètre.

Le réservoir étant ainsi rempli d'air sec à la température de la vapeur T et sous la pression H de l'atmosphère, Regnault se propose de mesurer le volume et la pression de cette masse d'air à 0°.

Pour cela, le réservoir AB est transporté sur un support formé d'un plateau circulaire (*fig.* 189) percé d'une ouverture en son centre et soutenu sur trois pieds verticaux. Trois tiges de métal inclinées, disposées symétriquement autour de l'ouverture centrale, terminées par de petites sphères, soutiennent le réservoir AB, dont la tige est maintenue verticalement par un bouchon. Une vis V, terminée par une calotte sphérique, peut se déplacer dans une traverse, et en s'appuyant

en B sur le fond du réservoir lui donner une fixité plus grande.

Le réservoir est entouré de neige fondante, et le tube vertical plonge alors au moins de 5^{cm} à 6^{cm} dans le mercure d'une petite cuve; on détache la pointe fermée du tube, et le mercure monte dans le réservoir à une certaine hauteur.

Après une heure environ, on ferme de nouveau le tube thermométrique en notant la pression barométrique H'. Pour cela, on fait avancer une petite cuiller K, pleine de cire, mobile sur l'un des pieds de l'appareil, de façon que l'ouverture D du tube capillaire s'engage dans la cire.

On mesure enfin au cathétomètre la hauteur h du mercure soulevé en faisant usage de la tige à deux pointes que l'on voit en t.

L'appareil est ensuite pesé avec le mercure qu'il contient, puis on achève de le remplir, et l'on pratique avec lui toutes les opérations décrites à l'étude du thermomètre à poids; on a alors tous les éléments nécessaires pour connaître le volume du réservoir à 0° et le coefficient de dilatation K du verre dont il est formé.

Soient P et P' les poids du mercure à 0° qui remplit l'appareil à 0° et du mercure soulevé. En écrivant les expressions de la relation $\frac{VH}{1+\alpha t} = \text{const.}$ à 0° et à 100°, on a, puisque les poids sont proportionnels aux volumes,

$$\frac{P(1+KT)}{1+\alpha T} H = (P - P')(H' - h),$$

équation d'où l'on déduit α.

Regnault remarqua qu'en cassant la pointe du tube thermométrique il y avait toujours une petite quantité d'air aspirée qui montait par le tube thermométrique; il attribua ce fait à cette propriété que possède le mercure de ne pas mouiller le verre. Il reste entre le mercure et le tube thermométrique une gaine d'air qui est aspirée au moment de l'ascension du mercure et qui peut souvent couper la colonne de mercure en plusieurs tronçons.

Pour éviter cette cause d'erreur, Regnault enveloppait le tube dans la partie plongée dans le mercure de plusieurs disques de cuivre qui sont mouillés par le mercure, et versait sur la cuve, avant de casser la pointe, mais après l'avoir saisie à l'aide de la pince, une couche d'acide sulfurique concentré, dont on se débarrassait aussitôt après cette opération.

La moyenne des résultats obtenus a donné, entre 0° et 100°,

$$100\alpha = 0,36623,$$

nombre plus élevé que la moyenne 0,3646, obtenue par Rudberg, ce qui doit tenir à l'aspiration de gaz dont nous venons de parler, et que Rudberg n'a pas remarquée, puisqu'il ne l'a pas signalée.

D'autres appareils, analogues à celui que nous venons de décrire, étaient disposés de telle sorte que le volume de l'air restât sensiblement le même à la température de la glace fondante et à la température de 100°, de sorte que l'effet de la dilatation fût transformé en une variation de force élastique; les résultats obtenus furent sensiblement les mêmes.

185. — DÉTERMINATION DE α_2.

L'appareil se compose d'un gros ballon d'environ 1^l, soudé à un tube thermométrique, et d'un manomètre à air libre (*fig.* 190). La branche B du manomètre est terminée par un tube coudé de même diamètre que le tube thermométrique; la jonction peut être établie par un tube de cuivre à trois branches *mn*, dans lequel les tubes de verre entrent à frottement doux. Le ballon est soutenu dans un vase de fer-blanc, dans lequel on peut faire bouillir de l'eau ou entourer à volonté le ballon de glace fondante.

Pour faire une expérience, on relie la troisième tubulure du tube *mn* avec l'appareil à dessiccation précédemment décrit, et, tout en chauffant le ballon, on fait le vide un grand nombre de fois, puis on laisse rentrer l'air lentement, la tubulure *n* étant fermée.

On remplit ainsi l'appareil une dernière fois d'air sec à 100° et sous la pression atmosphérique H; à ce moment, on ferme le tube d'aspiration à la lampe et l'on fait glisser le tube étroit du manomètre dans la branche *n* du tube de jonction jusqu'à l'amener bout à bout avec celui du réservoir, de façon qu'il n'y ait pas de vide entre eux, et on le mastique.

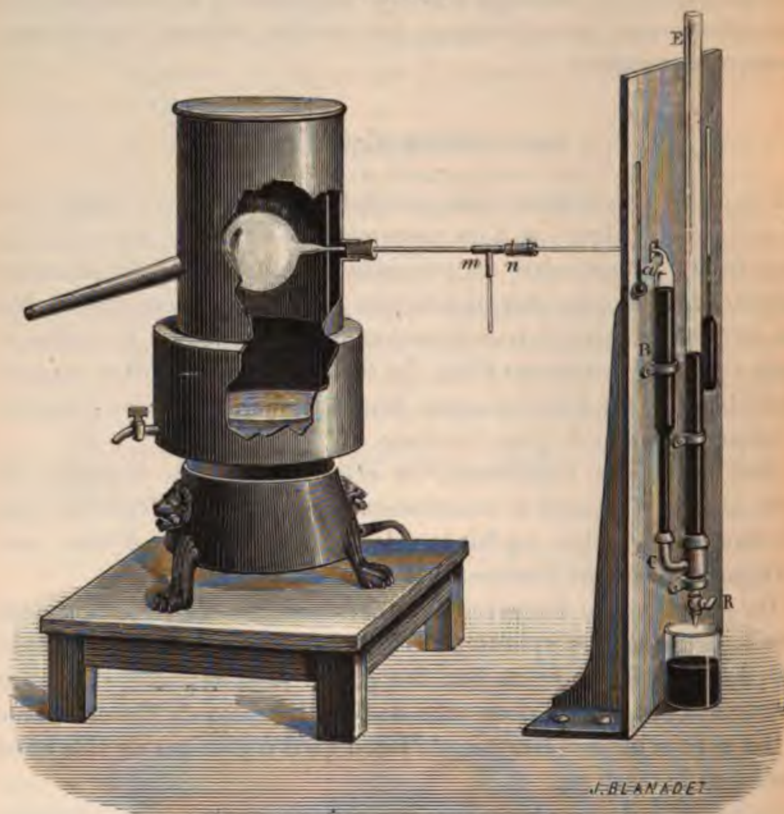
La branche B du manomètre, précédemment desséché, est pleine de mercure sec qui affleure à un trait *a* marqué sur le tube; le mercure, dans la branche E, affleure sur le même niveau *a*. On laisse refroidir le réservoir, puis on l'entoure de glace fondante; l'air se contracte et le mercure monte au-dessus de α, mais on le maintient à ce niveau en en laissant écouler par le robinet placé au-dessous du tube BC. Quand l'appareil a pris la température zéro, on note la pression barométrique H' et la différence de niveau *h* du mercure dans les deux branches du manomètre.

L'expérience peut être conduite autrement, en commençant par le

remplissage à 0°; dans ces conditions, la pression augmente penda[nt] le chauffage, et à 100° on noterait de même l'accroissement h de cet[te] pression.

La capacité V du ballon se détermine par un jaugeage à l'eau di[s]tillée, la capacité v des tubes thermométriques jusqu'en a par u[ne]

Fig. 190.



pesée de mercure; le coefficient k de dilatation du verre ne pouvant se déterminer directement, vu la trop grande dimension du réservoir, on admettait la valeur $k = 0,00233$, trouvée avec du verre de la même fabrique et de la même coulée. Des thermomètres donnaient les températures du petit volume d'air v et des colonnes de mercure.

Pour écrire l'équation d'où l'on déduira α_2, il faut appliquer à cette masse gazeuse constante les lois de Mariotte et de Gay-Lussac, et aussi la loi du mélange des gaz; dans le cas où l'expression initiale

est faite à T degrés, on a

$$\left[\frac{V(1+kT)}{1+\alpha_2 T}+\frac{v}{1+\alpha_2 t}\right]H=\left(V+\frac{v}{1+\alpha_2 t'}\right)(H'-h).$$

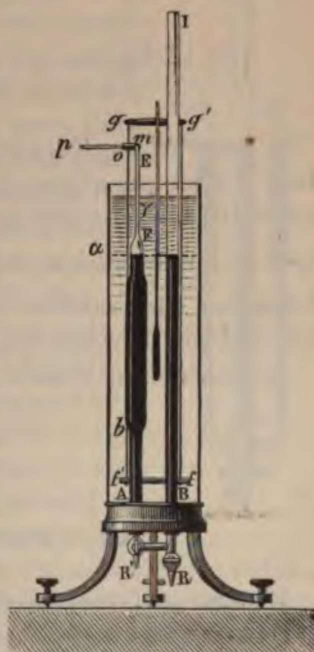
On substitue dans les termes en v à α_2 la valeur trouvée dans les expériences précédentes, ce qui n'a pas d'inconvénient, vu la petitesse de ces termes de correction, et l'on résout cette équation qui ne contient plus comme inconnue que α_2 du binome $1+\alpha_2 T$. La moyenne des expériences faites dans ces conditions est

$$100\,\alpha_2 = 0,3665.$$

186. — DÉTERMINATION DE α_1.

Ce coefficient est le véritable coefficient de dilatation; les irrégularités de la loi de Mariotte n'ont aucune influence sur les résultats qu'on obtient dans ces expériences. La méthode suivie est analogue à une méthode qu'avait employée Pouillet.

Fig. 191.



L'appareil est, pour le réservoir, le même que celui que nous venons de décrire, le manomètre seul diffère (*fig.* 191). La branche de gauche A est formée d'un tube présentant un large renflement cylindrique; deux repères sont tracés sur les parties plus étroites supérieures et inférieures du tube; un manchon que l'on remplit d'eau maintient ce réservoir à température constante; un agitateur permet d'y obtenir une température uniforme.

L'expérience est conduite comme la précédente.

Supposons qu'on ait achevé de remplir d'air sec le ballon et que le niveau du mercure affleure dans les deux tubes du manomètre vers le trait supérieur. Soit h leur différence et H la pression atmosphérique, t la température du manchon. On porte l'appareil à 100°, le gaz se dilate et, pour maintenir le mercure au même niveau

dans les deux branches, on doit en laisser écouler une partie par le robinet. Les deux colonnes arrivent à peu près au niveau du trait inférieur, et l'on mesure au cathétomètre leur différence de hauteur h' en même temps que la pression H' et la température du manchon t'.

Pour connaître la capacité du ballon, on fait un jaugeage à l'eau ou au mercure, suivant son volume; le volume v de m au trait supérieur et le volume v' de m au trait inférieur se jaugent au mercure de la façon suivante :

On fait monter le mercure jusqu'en m, puis, en ouvrant convenablement le robinet, on fait écouler le mercure de cette branche seule jusqu'à ce que le ménisque affleure au niveau du premier trait, ce dont on s'assure à l'aide d'une lunette; le poids de ce mercure est proportionnel au volume v; on fait écouler ensuite le mercure jusqu'au second trait; on ajoute les deux poids de mercure sorti et de leur somme on déduit le volume v' en tenant compte de la température à laquelle est fait ce jaugeage.

On a alors évidemment

$$\left[V\left(\frac{1+kT}{1+\alpha_1 T}\right)+\frac{v'}{1+\alpha_1 t'}\right](H'+h')=\left(V+\frac{v}{1+\alpha_1 t}\right)(H+h).$$

α_1 entre ici au dénominateur dans trois termes, et celui qui contient v' n'est pas négligeable; on procède alors par *approximations successives,* c'est-à-dire que l'on met dans la formule pour α_1, dans tous les termes excepté $V\frac{1+kT}{1+\alpha_1 T}$, une valeur approchée; on tire de l'équation une première valeur de α_1 qui est ensuite substituée une fois et donne la valeur définitive de $1+\alpha_1 T$.

Regnault obtint comme moyenne

$$100\alpha_1 = 0,36706.$$

187. — DILATATION DE DIFFÉRENTS GAZ.

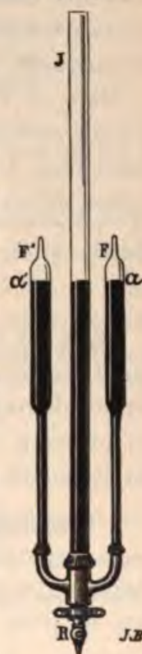
D'autres gaz furent ensuite soumis à l'expérience par ces méthodes, et Regnault trouva que les différents gaz présentaient des coefficients de dilatation très notablement différents, et que l'on n'obtenait pas les mêmes valeurs pour ces coefficients à pression constante ou à volume constant, comme le montre le Tableau suivant :

	Dilatation entre 0° et 100°.	
	$100\,\alpha_2$.	$100\,\alpha_1$.
Hydrogène	0,3667	0,3661
Air	0,3665	0,3670
Azote	0,3668	0,3670
Oxyde de carbone	0,3667	0,3669
Acide carbonique	0,3688	0,3710
Protoxyde d'azote	0,3676	0,3719
Acide sulfureux	0,3845	0,3903
Cyanogène	0,3829	0,3877

az se divisent donc nettement en deux catégories : les gaz dits *ents,* pour lesquels le coefficient a sensiblement la même les gaz relativement plus faciles à liquéfier, squels le coefficient est manifestement plus Dans les deux catégories, le coefficient à volume t α_2 est plus petit que le coefficient à pression te α_1, sauf pour l'hydrogène.

ult a disposé un appareil spécial pour mettre nce la dilatation inégale des gaz ; c'est une sorte nomètre différentiel composé de deux ballons n capacité et reliés par des tubes capillaires avec un tube manométrique ; ces deux tubes étriques, pris dans un même tube, ont des formes entiques que possible et sont mastiqués dans ce de fer à trois branches munie d'un robinet 92) ; la tubulure intermédiaire porte un long vert. Les deux ballons sont remplis d'air sec, deux sont soutenus dans le même réservoir en c où on les chauffera et où on les refroidira.

Fig. 192.



allons étant à zéro, on amène le mercure à deux α, α', tracés sur le manomètre : puis on chauffe rés et l'on constate que, pour amener le mer- α dans la branche gauche, il faut produire une ce de niveau h du mercure dans les tubes F que pour amener le mercure de droite en α' il faut produire érence de niveau h' entre F' et J. En écrivant pour chacun de momètres la relation qui permet de calculer α_2, on a

$$\left(V + \frac{v}{1+\alpha_2 t}\right) H = \left[\frac{V(1+KT)}{1+\alpha_2 T} + \frac{v}{1+\alpha_2 t'}\right](H' + h),$$

$$\left(V' + \frac{v'}{1+\alpha_2 t}\right) H = \left[\frac{V'(1+KT)}{1+\alpha_2 T} + \frac{v'}{1+\alpha_2 t'}\right](H' + h').$$

On voit facilement que la condition pour que $h = h'$ n'est que $\frac{V}{v} = \frac{V'}{v'}$; alors à toute température la même dénivellation h nerait simultanément le mercure des deux manomètres dans le du repère α. Il suffit donc de jauger V et le volume v jusqu'à α de jauger de même V' et v' jusqu'en α', la condition $\frac{v}{V} = \frac{v'}{V'}$ n pas en général satisfaite; on tracera alors un second repère α'' jaugeant $\alpha'\alpha''$, on trouvera une position du trait pour laquelle la dition sera satisfaite; il suffira ensuite, après avoir tracé un trait zontal en ce point, de mastiquer ce manomètre de telle façon trait se trouve sur la même horizontale que α.

Les deux ballons étant chargés d'air, on vérifie que les nivea mercure restent sur la même horizontale, en regard des deux ainsi déterminés, à toutes les températures et quelle que soi conséquent, la dénivellation h du mercure dans la branche J.

Mais, si l'on vient à remplacer dans un des ballons l'air p l'acide carbonique ou de l'acide sulfureux, le mercure remonte haut dans le manomètre correspondant, ce qui prouve que la tation de ces gaz est supérieure à celle de l'air.

188. – INFLUENCE DE LA PRESSION.

Dans les deux méthodes qui ont permis de mesurer α_1 et α peut, au lieu d'opérer sous une pression initiale égale à la pre atmosphérique, chercher quelle valeur prendraient ces coefficie la pression initiale devenait plus faible ou plus grande. C'est c fit Regnault.

1° **Dilatation à volume constant.** — Les mesures de α_2 ont été avec l'air et l'acide carbonique et ont donné les résultats don partie est consignée dans le Tableau suivant :

	Pression initiale.	$1 + 100\,\alpha_1$.
	mm	
Air...	109,72	1,36482
»	375,23	1,36572
»	760	1,3665
»	1678,40	1,36760
»	2144,18	1,36894
»	3655,56	1,37091
Acide carbonique	758,47	1,36856
»	1742,73	1,37523
»	3589,07	1,38598

Il montre que la dilatation des gaz va en augmentant avec la pression, et plus rapidement pour l'acide carbonique que pour l'air.

2° **Dilatation à pression constante.** — Les expériences à pression constante ont donné pour α_1 des résultats analogues.

	Pression constante.	$1+100\,\alpha_1$.
Air	380 mm	1,3650
»	760	1,36606
»	2620	1,36964
Hydrogène	760	1,36613
»	2545	1,36616
Acide sulfureux	760	1,3902
»	980	1,38980
Acide carbonique	760	1,37099
»	2520	1,38455

Tous ces gaz, sauf l'hydrogène, présentent une dilatation qui va en augmentant avec la pression.

Quant à la température, M. Amagat a constaté, en mesurant directement les coefficients de dilatation de gaz facilement liquéfiables entre deux températures dans l'intervalle desquelles l'air se dilate librement, que cette dilatation diminue à mesure que ces deux températures s'élèvent; ses expériences ont porté sur l'acide sulfureux et l'acide carbonique.

189. — CONCLUSIONS.

Les lois de Gay-Lussac sont donc des lois assez éloignées de la vérité et auxquelles il faut substituer les conclusions suivantes :

1° Le coefficient moyen de dilatation de l'air entre 0° et 100° à volume constant a pour valeur $\alpha_2 = 0{,}003665$ et à pression constante $\alpha_1 = 0{,}003670$.

2° Les coefficients moyens de dilatation des différents gaz ne sont pas égaux.

3° L'air et tous les autres gaz, sauf l'hydrogène, ont des coefficients moyens de dilatation d'autant plus grands que les pressions qu'ils supportent et, par conséquent, leurs densités sont plus considérables.

4° Les coefficients moyens de dilatation des différents gaz s'approchent d'autant plus de l'égalité que leurs pressions sont plus

faibles; de sorte que la loi qui consiste à dire que tous les gaz ont le même coefficient de dilatation peut être considérée comme une loi limite qui s'applique aux gaz dans un état de dilution extrême, mais qui s'éloigne d'autant plus de la réalité que les gaz sont plus comprimés.

CHAPITRE VI.

THERMOMÉTRIE.

190. — CHOIX D'UNE SUBSTANCE THERMOMÉTRIQUE.

Dès le début de cette étude des dilatations, nous sommes convenus mesurer la température précisément à l'aide d'une de ces dilatations; intenant que nous avons passé, à ce point de vue, en revue les so- es, les liquides et les gaz, nous sommes en mesure de choisir le ps thermométrique.

Mais auparavant nous devons nous demander si ce choix doit être ement arbitraire ou s'il n'y a pas quelque considération théorique puisse nous fixer. Dulong et Petit croyaient en avoir trouvé une plus importantes dans l'uniformité des lois auxquelles on croyait, ette époque, les gaz soumis; Gay-Lussac pensait avoir montré que s les gaz subissaient un égal accroissement de volume, quelle que leur nature ou leur pression. Il était donc naturel de mesurer températures par la dilatation des gaz. Nous savons, depuis, e ces lois ne sont pas exactes; les différents gaz ont des coefficients dilatation qui leur sont propres, et la pression fait varier ces efficients.

Si, d'autre part, dans les études calorimétriques, on rencontrait une stance dont les variations en dilatation fussent rigoureusement portionnelles aux quantités de chaleur reçues, on pourrait croire ce serait là une raison de la choisir comme substance thermomé- que; mais, d'une part, un tel corps n'existe pas, et, d'autre part, avantages que l'on tirerait de ce choix ne seraient pas aussi grands on le pourrait croire au premier abord.

L'étude calorimétrique des solides et des liquides nous montrera leurs dilatations sont loin d'être proportionnelles aux quantités chaleur qu'ils ont reçues. L'étude des gaz a fait croire d'abord ils satisfaisaient à cette condition; mais Regnault a montré qu'ils

s'en écartent assez pour qu'il ne subsiste aucune raison théorique imposant le choix des gaz comme substance thermométrique.

Il convient de remarquer d'ailleurs que, tout en admettant que les gaz puissent mesurer, à peu près, par leur dilatation la quantité de chaleur qu'ils ont reçue, il n'en reste pas moins vrai qu'ils ne mesureraient aucunement la chaleur reçue par les bains ou, plus généralement, par les corps dont ils serviraient à évaluer la température, ce qui diminue considérablement l'avantage que l'on pourrait tirer de cette propriété.

Ainsi, aucune considération théorique n'impose rigoureusement le choix des gaz comme substance thermométrique; bien que quelques-unes semblent montrer que ces corps se prêteront avec quelque avantage à la définition des températures.

Les physiciens ont donc dû se laisser guider par des considérations d'un ordre tout différent.

Ces considérations peuvent être de deux sortes : ou bien on cherchera la substance thermométrique dont l'usage conduit à la construction de l'appareil le plus pratique, le plus commode, ou bien la seule condition imposée sera la comparabilité des appareils. La première n'a scientifiquement aucune valeur; la seconde est, au contraire, capitale; elle signifie que le même appareil placé dans des conditions identiques devra indiquer toujours la même température, et que deux instruments construits par deux observateurs différents pourront leur servir à trouver, pour un même point fixe, l'ébullition d'un liquide sous une pression déterminée, par exemple, une même expression numérique de la température.

Nous allons montrer que, dans le premier cas, on est conduit à adopter le thermomètre à mercure, et, dans le second, le thermomètre à gaz.

1° **Solides**. — Nous écarterons d'abord les solides, qui ne peuvent fournir une bonne substance thermométrique, et cela pour deux raisons : 1° leur coefficient moyen de dilatation est excessivement faible, puisqu'il est compris entre 0,00001 et 0,00003; ces appareils présenteraient, par conséquent, un défaut de sensibilité; 2° le coefficient moyen de dilatation pour des échantillons d'un même métal de différentes provenances peut varier considérablement, de plus de 10 pour 100 pour certains métaux; les thermomètres construits avec un solide présenteraient donc un défaut de comparabilité entre eux. D'ailleurs le même échantillon, soumis à des recuits et à des trempes

comme ceux qu'il éprouve chaque fois qu'on élève sa température et qu'on le laisse ensuite refroidir, change de coefficient; le même thermomètre ne resterait donc pas comparable à lui-même.

2° **Liquides**. — On peut obtenir des liquides purs et les reproduire dans cet état à volonté; leur dilatation est, d'autre part, au moins six à sept fois plus grande que celle des solides : on pourrait donc baser sur la mesure des dilatations absolues des liquides des thermomètres à la fois comparables et sensibles; malheureusement, cette méthode ne conduit à la construction d'aucun appareil pratique.

On ne peut donc mesurer que la dilatation apparente des liquides, et nous avons vu qu'en les enfermant dans des réservoirs terminés par des tubes très capillaires, on pouvait accroître, dans des proportions énormes, la sensibilité de cette méthode thermométrique; mais alors la comparabilité cesse en même temps d'exister : la nécessité où l'on se trouve d'employer des réservoirs en verre introduit, dans cette méthode, tous les défauts que nous venons de signaler à propos des thermomètres solides. La dilatation apparente que l'on observe n'est que la différence entre la dilatation absolue et la dilatation de l'enveloppe qui est loin d'être négligeable; or celle-ci varie avec les échantillons, et, de plus, un même réservoir thermométrique change de dimensions avec le temps, ce qui produit le déplacement des points fixes que nous avons déjà signalé, de sorte que les thermomètres à liquides ne sont pas comparables entre eux et même, à parler rigoureusement, ne restent pas comparables à eux-mêmes.

3° **Gaz**. — Les gaz ont un coefficient de dilatation qui est de 100 à 400 fois plus grand que celui des solides et environ 20 fois plus grand que celui du mercure; on obtiendra donc, avec les thermomètres à air, une sensibilité très grande; d'autre part, on peut prévoir que la nécessité où l'on sera de n'observer que la dilatation apparente du gaz contenu dans une enveloppe n'aura pas, au point de vue de la comparabilité, le même inconvénient que pour les liquides; la dilatation du gaz est, en effet, plus de 150 fois plus grande que celle du verre et que celle du platine; et si, pratiquement, son influence n'est pas négligeable, on peut penser que ce n'est que pour les mesures de haute précision qu'il y aura lieu d'en tenir compte. Enfin ces appareils se prêtent aussi bien à la mesure des températures basses et hautes, et, tandis que l'échelle du thermomètre à mercure est limitée entre — 40° et + 360°, celle du thermomètre à air n'a pas d'autre li-

mite que celle que lui fixent la température de fusion des réservoirs employés et la liquéfaction de l'air.

Le thermomètre à gaz sera donc, pour les températures, l'étalon des physiciens jusqu'au jour où l'on aura trouvé, dans des considérations purement théoriques, une méthode et un appareil d'estimation préférables.

191. — THERMOMÈTRES A GAZ.

Cherchons dès lors comment on devra disposer un thermomètre à air et exposons les expériences qui ont *a posteriori* vérifié les considérations que nous venons de développer.

L'une quelconque des méthodes qui ont servi à Regnault pour déterminer α peut être, aujourd'hui que la valeur de ce coefficient est connue, employée à l'évaluation des températures; en effet, les équations que nous avons écrites à ce propos sont des fonctions à la fois de α et de T, température finale de l'expérience; au lieu de les résoudre par rapport à α, T étant connu, nous pouvons les résoudre par rapport à T en y substituant à α la valeur qui convient. Voyons si les deux méthodes principales sont aussi bonnes l'une que l'autre. L'équation qui permettra de calculer la température sera, dans le cas où l'on emploiera l'appareil à pression constante,

$$(1) \qquad \left(V + \frac{v}{1+\alpha_1 t}\right) H = \left(V \frac{1+Kx}{1+\alpha_1 x} + \frac{v'}{1+\alpha_1 t}\right) H'.$$

Cette méthode présente un inconvénient très grave dans la mesure des hautes températures; on conçoit, en effet, que, dans ce cas, la plus grande partie de l'air se trouve dans le tube calibré, et le terme de correction v' prend une importance de plus en plus grande; la sensibilité est d'ailleurs représentée par la variation dv' correspondant à une élévation dx de la température et peut se calculer en différentiant la relation (1), en y supposant $H' = H$,

$$\frac{1}{1+\alpha_1 t} \frac{dv'}{dx} = V\left(\alpha_1 \frac{1+Kx}{(1+\alpha_1 x)^2} - K \frac{1}{1+\alpha_1 x}\right)$$

ou

$$dv' = dx\, V \frac{(\alpha_1 - K)(1+\alpha_1 t)}{(1+\alpha_1 x)^2}.$$

On voit que dv' varie en raison inverse du carré du binome $(1+\alpha_1 x)$; la sensibilité diminue donc rapidement aux températures élevées.

Dans le cas, au contraire, où l'on emploiera la méthode à volume constant, l'équation à écrire sera

$$\left(V + \frac{v}{1+\alpha_2 t}\right) H = \left(V \frac{1+Kx}{1+\alpha_2 x} + \frac{v}{1+\alpha_2 t}\right)(H+h);$$

en différentiant et négligeant les termes en v, il vient

$$V\left(K\frac{1}{1+\alpha_2 x} - \alpha_2 \frac{1+K)}{(1+\alpha_2 x)^2}\right)(H+h) + \frac{V(1+Kx)}{1+\alpha_2 x}\frac{dh}{dx} = 0;$$

d'où l'on tire

$$dh = dx\frac{(\alpha_2 - K)H}{(1+Kx)^2}.$$

La sensibilité $\frac{dh}{dx}$ dans cette méthode varie donc en raison inverse du carré du binome $(1+Kx)$; mais il est à remarquer que K est une quantité considérablement plus petite que α; par suite, la sensibilité dans cette méthode est beaucoup plus grande; on voit même que si dans l'expérience de la dilatation K de l'enveloppe était négligeable, la sensibilité serait constante.

Cette discussion ne permet donc pas d'hésiter entre les deux méthodes; l'appareil disposé pour la mesure des coefficients à volume constant est celui que l'on devra employer à la mesure des températures.

Ainsi, en définitive, nous renonçons à employer un appareil à dilatation proprement dite pour définir le degré étalon de température, et nous adoptons l'appareil dans lequel on observe à volume constant des *variations de pression*.

192. — COMPARABILITÉ DES THERMOMÈTRES A GAZ.

1° **Influence du réservoir.** — La nature de l'enveloppe a-t-elle une influence considérable sur la température déterminée?

Supposons que le coefficient moyen de dilatation K de l'enveloppe soit connu, par une expérience directe, entre 0° et 100°; la formule que l'on doit employer pour calculer la température est celle du n° 185; simplifiée, elle peut s'écrire

$$VH = V\frac{1+Kx}{1+\alpha x}(H+h).$$

Admettons que ce coefficient K conserve la même valeur au delà

de 100°; en calculant les températures par la formule que nous venons d'écrire, on obtient les résultats suivants :

T.	Cristal.	Verre.
100	100	100
200	199,95	199,85
300	299,80	299,58
350	349,68	349,17

Les différences, toujours inférieures à 1°, sont un peu plus grandes avec le verre qu'avec le cristal. On peut admettre que dans ces conditions de calcul ces appareils sont comparables.

2° **Influence de la pression**. — En plaçant dans ces appareils de l'air sous la pression de l'atmosphère, lorsque le réservoir est entouré de glace, on est sûr d'obtenir des instruments rigoureusement comparables; mais, si l'on veut mesurer des températures élevées, les pressions peuvent devenir considérables et il est à craindre que l'enveloppe ne subisse de ce fait une déformation permanente; on peut, dans ce cas, éviter cet accident en ne chargeant l'appareil à zéro qu'avec de l'air sous une pression initiale inférieure à la pression atmosphérique; mais ce sera aux dépens de la sensibilité, qui est, comme nous le voyons par l'expression de dh, proportionnelle à H, c'est-à-dire à la pression initiale.

On est ainsi conduit à se demander si des thermomètres à air chargés avec du gaz à des pressions initiales différentes resteront d'accord dans toute l'échelle des températures, si l'on fait accorder leurs échelles à 0° et à 100°.

Nous savons déjà que le coefficient moyen de dilatation des différents gaz change avec la pression; il reste à chercher si la valeur de la pression initiale ne peut pas modifier la loi de la dilatation des gaz. L'appareil employé par Regnault pour résoudre cette question a déjà été décrit. Des deux thermomètres, l'un est chargé d'air, toujours à la pression atmosphérique; l'autre à des pressions tantôt inférieures, tantôt supérieures, variant depuis 438^{mm} jusqu'à 1486^{mm}; le coefficient employé dans les calculs étant 0,003665 pour toutes les pressions, la différence entre les températures mesurées aux deux thermomètres ne dépassa jamais $\frac{2}{10}$ de degré, et cela entre 0° et 324°. Regnault put donc conclure de ces expériences que *le thermomètre à air est un instrument parfaitement comparable, lors même qu'on le charge avec de l'air sous des pressions différentes.*

3° **Influence de la nature du gaz.** — La troisième question qu'on peut se poser au sujet des thermomètres à gaz est la suivante : Des thermomètres chargés avec différents gaz marchent-ils d'accord, lorsqu'ils ont été réglés pour les points fixes 0° et 100°?

Le même appareil a permis à Regnault de résoudre cette question : l'un des réservoirs étant chargé d'air à la pression atmosphérique, l'autre fut rempli d'hydrogène, et il constata que l'accord était complet, à condition d'employer dans les calculs, pour chacun des gaz, son coefficient moyen de dilatation propre.

Il substitua ensuite à l'hydrogène l'acide carbonique sous la pression d'une demi-atmosphère et sous la pression atmosphérique; il constata que les thermomètres étaient d'accord si l'on prenait pour valeur de α dans les calculs les coefficients moyens de dilatation de l'acide carbonique déterminés dans les expériences faites avec les pressions initiales d'une demi ou d'une atmosphère.

Enfin il essaya de charger le thermomètre à l'acide sulfureux sous des pressions différentes; mais il constata que, même en prenant pour les calculs les coefficients déterminés à ces mêmes pressions, l'accord entre ces thermomètres et le thermomètre à air ne persistait pas au-dessus de 120°.

Ces diverses expériences le conduisirent aux conclusions suivantes :

1° La loi de la dilatation est la même pour l'air depuis 0° jusqu'à 350°, lors même que la force élastique initiale varie entre $0^m,400$ et $1^m,30$; ainsi, les thermomètres à air seront comparables entre eux, quelle que soit la densité de l'air avec lequel on les aura chargés.

2° L'air, l'hydrogène et l'acide carbonique possèdent, entre 0° et 35°, sensiblement la même loi de dilatation, bien que leurs coefficients de dilatation soient notablement différents. Aussi les thermomètres construits avec ces différents gaz marcheront d'accord, pourvu que l'on calcule les températures avec le coefficient propre à chacun d'eux.

3° Le gaz sulfureux s'écarte notablement de la loi de dilatation que présentent les gaz précédents. Le coefficient de dilatation de l'acide sulfureux diminue avec la température prise sur le thermomètre à air.

Échelle thermométrique normale adoptée par le Comité international des Poids et Mesures. — En se basant sur les résultats précédents et sur ceux obtenus dans les recherches spécialement

effectuées par M. P. Chappuis, le Comité a adopté la définition suivante :

L'échelle thermométrique normale est l'échelle centigrade du thermomètre à hydrogène, pris sous volume constant et sous la pression manométrique initiale de 1^m de mercure, c'est-à-dire de 1,316 atmosphère normale. L'atmosphère normale est le poids d'une colonne de mercure de 760^{mm} de hauteur, ayant la densité 13,59592 et soumise à l'intensité normale de la pesanteur.

Ce thermomètre à hydrogène a un réservoir en platine iridié, d'une capacité de 1^l, communiquant avec un manomètre à mercure à tube large, observé à l'aide du cathétomètre décrit (*fig.* 14); il est installé à côté du baromètre normal.

193. — THERMOMÈTRE A AZOTE.

En regard de ses avantages théoriques, le thermomètre à hydrogène présente, dans la pratique, des inconvénients assez sérieux, quand on veut l'employer à la mesure des températures élevées. Dans ces conditions, la plupart des métaux deviennent perméables à l'hydrogène; en outre, l'hydrogène peut exercer une action réductrice sur les parois de verre.

Le thermomètre à azote, avec un réservoir en platine iridié, échappe à ces difficultés; le platine iridié est imperméable à l'azote. Aux faibles pressions, l'échelle thermométrique de l'azote se confond avec celle de l'hydrogène. Aux pressions plus élevées, la différence de marche varie avec la pression initiale. Quand cette pression est celle de 1^m de mercure, les deux échelles se confondent pratiquement, au-dessus de $100°$, si l'on prend pour le calcul des températures

$$\beta = 0,0036738$$

et si l'on attribue à la pression initiale, non pas la valeur directement observée, mais celle qu'on aurait observée si l'azote conservait jusqu'à $0°$ les propriétés des gaz parfaits. Le thermomètre à azote sous pression constante se prête mieux à la mesure des températures élevées; mais, pour la même pression initiale, les écarts de marche avec l'échelle normale sont à peu près doubles.

194. — HAUTES TEMPÉRATURES.

Pour la mesure des hautes températures, on peut employer le verre vert jusqu'à 500°; au delà, il faut avoir recours à la porcelaine, qui peut supporter sans se déformer des températures d'environ 1200°, ou au platine, qui permet d'aller encore bien au delà. Dans les appareils de ce genre, la température du gaz contenu dans le tube qui joint le réservoir au manomètre est mal connue, et il y a là une cause d'erreur assez notable que l'on peut faire disparaître par l'emploi de ce qu'on appelle un *compensateur*.

Supposons, par exemple, un thermomètre à réservoir de porcelaine; la tige du thermomètre n'a pas plus de 20^{cm}; on mastique à son extrémité un tube métallique capillaire assez lông et qui se rattache par un second masticage au manomètre. Le premier, étant très près de l'enceinte très chaude dans laquelle est le thermomètre, doit être entouré d'un tube de plomb en spirale dans lequel on fera passer un courant d'eau froide : on évitera de cette façon qu'il fonde.

A côté de la tige du thermomètre, on en dispose une autre qui est fermée par un bout et mastiquée par l'autre à un tube métallique, autant que possible de même longueur, qui communique à un second manomètre. On a constitué de cette façon un petit thermomètre à air qui ne servira qu'à donner la température moyenne de ce qu'on peut appeler l'*espace nuisible* du grand thermomètre.

La dilatation de la porcelaine, qu'il importe de connaître pour la détermination des températures avec cet appareil, a été mesurée sur des tiges par MM. Deville et Troost. Entre 1000° et 1400°, ce coefficient se maintient entre 0,000016 et 0,000017; il augmente vers 1500°, et enfin, au blanc, il se produit une dilatation permanente, sans que le coefficient de dilatation change sensiblement.

Les réservoirs de porcelaine ne se prêtent pas à des mesures très exactes, d'une part, à cause de leurs résidus de dilatation, d'autre part, à cause des difficultés d'obtenir un vernissage sans défaut, qui assure l'imperméabilité : ce vernissage est d'ailleurs impossible à l'intérieur du tube capillaire.

195. — COMPARAISON DU THERMOMÈTRE A GAZ ET DU THERMOMÈTRE A MERCURE.

En résumé, le thermomètre à gaz sera un excellent instrument, parfaitement comparable dans les conditions que nous avons définies,

et c'est lui seul qui servira à la définition du degré; mais il faut bien reconnaître qu'il est d'une manipulation délicate et que chaque détermination de température a l'inconvénient d'exiger une longue expérience dans laquelle le nombre considérable des lectures multiplie les chances d'erreur; enfin cette expérience doit être suivie d'un calcul relativement long.

D'ailleurs il est des cas où l'emploi de cet appareil est absolument impossible et où l'on devra lui substituer un thermomètre à mercure soigneusement comparé au thermomètre à hydrogène.

La première comparaison de deux appareils de ce genre a été faite par Dulong et Petit entre — 36° et 360°; ils ont donné une Table au moyen de laquelle on peut transformer les indications de ces deux appareils les unes dans les autres : elle est particulière au thermomètre à mercure qu'ils avaient employé; de plus, elle est inexacte, puisqu'ils ont fait usage, dans les calculs, du nombre 0,375 de Gay-Lussac, reconnu depuis erroné. Mais elle présente un intérêt, parce qu'ils disent avoir retrouvé, en faisant des expériences à 100°, le nombre de Gay-Lussac.

Regnault et Magnus ont fait de nombreuses comparaisons, à la suite desquelles ils ont reconnu que les thermomètres à mercure n'étaient pas comparables.

Regnault employait à cette étude des thermomètres à poids, parce qu'il est plus facile d'en chauffer toute la tige, et qu'il n'y a, par conséquent, pas de correction à faire de ce côté.

Il constata d'abord que les enveloppes des thermomètres construits avec du cristal de Choisy-le-Roi ne gardaient pas la même dilatation lorsque ces vases avaient été soufflés ou étirés en tubes; que, d'autre part, si les indications thermométriques de ces appareils n'étaient pas tout à fait identiques, les divergences étaient assez faibles, entre 0° et 325°, pour qu'une même Table de comparaison avec le thermomètre à air pût être mise en usage pour tous ces thermomètres construits avec un cristal de même origine et de composition chimique bien constante.

L'étude comparative d'une série de thermomètres en verre ordinaire a conduit Regnault à des conclusions analogues. Il étudia enfin un thermomètre en verre de Suède et un autre construit avec du verre vert. Pour donner une idée de la grandeur des écarts que l'on obtiendrait en déterminant sans correction les températures à l'aide de ces instruments, nous donnerons, dans le Tableau suivant, quelques-uns des nombres extraits des Mémoires de Regnault :

Température du thermomètre à air.	Températures des thermomètres à mercure :			
	Cristal de Choisy.	Verre ordinaire.	Verre vert.	Verre de Suède.
100......	100,00	100,00	100,00	100,00
150......	150,40	149,80	150,39	150,15
200......	201,25	199,70	200,80	200,50
250......	253,00	250,05	251,85	251,44
290......	295,10	290,80	293,30	»
350......	360,50	334,00	»	»

Cette Table ne montre pas de comparaison entre 0° et 100°. Des expériences, dues à I. Pierre, ont montré que deux thermomètres, l'un en verre, l'autre en cristal, ne restaient même pas d'accord dans ce court intervalle.

On ne devra donc faire usage d'un thermomètre à mercure qu'après avoir soigneusement établi sa Table de comparaison avec le thermomètre normal.

196. — THERMOMÈTRE A MERCURE DE PRÉCISION.

Jusqu'à ces derniers temps, en se basant sur les résultats que nous venons d'exposer, on n'attribuait au thermomètre à mercure aucune des qualités que doit posséder un instrument précis. Pourtant la commodité de son emploi, la facilité de sa lecture le recommandaient dans bien des cas. Aussi le Bureau international des Poids et Mesures reprit-il la question, en s'attachant principalement à réaliser des conditions identiques pour tous les thermomètres qu'il mettait à l'étude.

Les recherches faites sur ce sujet ont montré que, contrairement aux opinions anciennes, le thermomètre à mercure, lorsqu'il est soigneusement construit, minutieusement étudié, et employé suivant certaines règles toujours scrupuleusement respectées, peut devenir un instrument de précision de premier ordre.

Le Bureau international a été conduit à employer exclusivement

Fig. 193.



l'échelle thermométrique fournie par le thermomètre en *verre dur* peu fusible et légèrement verdâtre (*fig.* 193).

Les thermomètres de précision sont formés d'une tige, choisie

aussi cylindrique que possible, et divisée en parties d'*égales longueurs,* et non plus en parties d'égales capacités. On y soude un réservoir dont les dimensions sont calculées suivant les indications que l'instrument est appelé à fournir.

Mesures des températures avec le thermomètre de précision. — Toute mesure de température est le résultat de deux lectures différentes, faites toutes deux sur la tige graduée de l'instrument : l'une correspondant à la température que l'on veut mesurer, l'autre correspondant à une température invariable et déterminée, celle de la fusion de la glace par exemple, qui constituera *par définition* le zéro de l'appareil. Ce zéro varie, pour un instrument donné, avec le temps et avec les conditions de service antérieur. Longtemps on a considéré ces variations comme n'étant pas susceptibles de représentation régulière; mais, aujourd'hui, on est parvenu à les élucider d'une manière à peu près complète.

Quand le thermomètre est resté quelque temps à une température déterminée, son zéro prend une position limite sensiblement fixe, qui est précisément celle qui doit constituer le point de départ de l'échelle pour l'observation correspondante. Les températures sont donc comptées à partir d'un zéro variable qui doit être déterminé dans chaque cas immédiatement après l'observation dans la réduction de laquelle il doit entrer. L'expérience a montré que cette simple pratique suffisait à éliminer complètement l'influence des déplacements de l'échelle. Dans les conditions ordinaires, il suffit même de faire cette détermination du zéro après une série entière de lectures, dans lesquelles l'instrument indique toujours des températures peu différentes.

Les deux lectures, celle de la température et celle du zéro, doivent subir les trois corrections de *calibrage,* de *pression extérieure* et de *pression intérieure,* qui les ramènent à ce qu'elles auraient été : 1° si les divisions de l'échelle étaient d'égales capacités; 2° si la pression extérieure avait toujours conservé une valeur déterminée; 3° si le thermomètre était couché horizontalement, de façon que la colonne n'exerçât aucune pression sur les parois du réservoir. La différence des deux lectures ainsi corrigées donne le nombre de divisions de l'échelle correspondant à la température à mesurer : il reste à transformer ces divisions en degrés centigrades exacts, ce qui se fait en ajoutant à cette différence une nouvelle correction dite d'*intervalle fondamental.* Ces quatre corrections se déduisent de Tables

préparées d'avance et dont l'ensemble constitue l'étude de l'instrument.

Le *calibrage* se fait en isolant des colonnes de mercure de longueurs données que l'on déplace dans le tube et dont on mesure les longueurs *par l'échelle elle-même*. On choisit les longueurs de ces colonnes de façon qu'elles représentent les multiples successifs de la plus petite d'entre elles, et on les déplace de quantités précisément égales à cette plus petite longueur. L'observation de ces déplacements se fait à l'aide de l'appareil représenté figure 194, et formé de deux

Fig. 194.



microscopes pouvant viser les deux extrémités de la colonne isolée, dans les meilleures conditions d'inclinaison et d'éclairement.

La *correction de pression extérieure* β_e se détermine en suspendant le thermomètre dans un tube fermé, qu'on met alternativement en communication avec l'atmosphère et avec le récipient d'une machine pneumatique. Chaque détermination comporte 40 observations.

Pour les thermomètres en *verre dur*, employés au Bureau international, le coefficient de pression par millimètre de mercure varie entre 0°,00010 et 0°,00013. Il est connu à 0,01 de sa valeur.

Quant au *coefficient de pression intérieure* β_i, on le déduit du précédent en tenant compte de la compressibilité du mercure. En appelant d la distance du milieu du réservoir thermométrique au zéro et l la longueur moyenne du degré, exprimées en millimètres, la correction à $t°$ est $\beta_i(d + lt)$.

Enfin la *mesure de l'intervalle fondamental* se fait à l'aide des deux appareils déjà décrits, servant à déterminer d'abord le point 100°, puis le point 0°. La valeur de cet intervalle est toujours, par construction, voisine de 100°, et l'erreur probable de la moyenne des déterminations faites à de très longs intervalles (plusieurs mois) s'est trouvée comprise entre $\pm$ 0°,001 et $\pm$ 0°,002.

Du reste, les études simultanées des thermomètres *en verre dur*

ont démontré leur comparabilité parfaite, réalisée, en général, 0°,001 ou 0°,002 près.

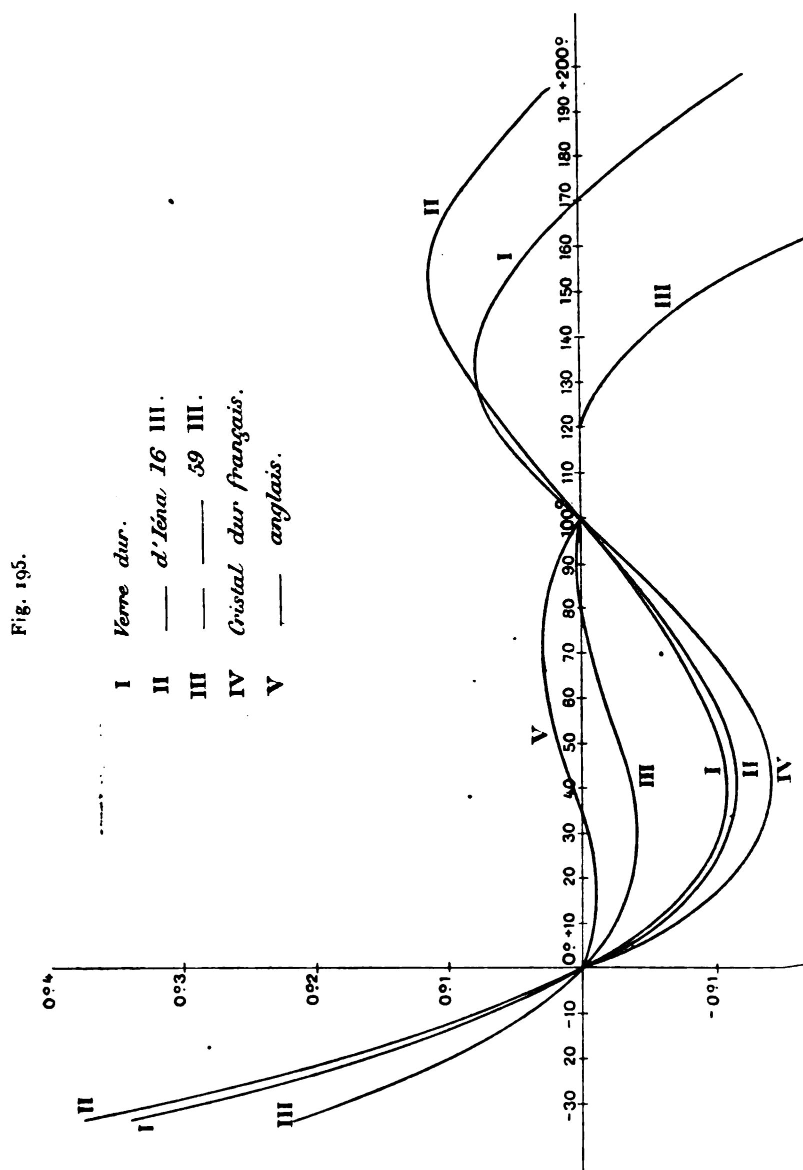


Fig. 195.

M. P. Chappuis a ensuite comparé ces thermomètres au therm mètre normal à hydrogène que possède le Bureau international.

Les courbes de la figure 195 représentent les résultats des exp

riences. Les abscisses sont proportionnelles aux températures indiquées par le thermomètre à hydrogène; les ordonnées aux corrections qu'il faut ajouter aux indications des thermomètres à mercure pour obtenir celles du thermomètre à hydrogène.

Les corrections trouvées pour le verre dur sont applicables à tous les thermomètres construits par M. Tonnelot.

D'ailleurs les résultats d'expériences exprimés dans l'échelle du thermomètre à mercure en verre dur peuvent être transformés et exprimés dans l'échelle du thermomètre à hydrogène, soit en se servant de cette Table de correction, soit directement, à l'aide de *formules de transformation* calculées par M. Guillaume et dont les coefficients se déduisent des limites de température entre lesquelles doit être établie la concordance.

197. — DIVERS SYSTÈMES.

Le système centigrade défini par le choix des points 0 et 100, conseillés par Newton dès 1701, fut proposé en 1800 par Celsius, de l'Université d'Upsal; deux autres systèmes, celui dit *de Réaumur*, dû en réalité à de Luc, et celui de Fahrenheit, sont à signaler, non pas qu'ils soient employés par les physiciens, mais parce qu'ils sont d'un usage vulgaire dans certains pays.

Réaumur, en 1730, avait pris, comme points fixes, le zéro défini par la fusion de la glace et le point 80 marqué sur le thermomètre à la plus haute température que l'alcool puisse supporter sans bouillir, ce qui conduisit à une graduation presque identique à la centigrade; depuis on marque, sur les graduations Réaumur, 80° à la température de l'eau bouillante, c'est-à-dire 100° C. Si l'on appelle T_R et T_C l'expression en Réaumur et en centigrade d'une même température, on a évidemment

$$\frac{T_R}{T_C} = \frac{80}{100},$$

d'où

$$T_R = \frac{4}{5} T_C \qquad \text{et} \qquad T_C = \frac{5}{4} T_R,$$

formules qui permettent de passer de l'un des systèmes à l'autre.

Lorsque Fahrenheit imagina, en 1724, le système qui porte son nom, on ne savait pas obtenir des températures très basses; aussi, pour éviter les températures négatives, proposa-t-il de fixer le zéro au point le plus bas qu'on obtenait avec un mélange de glace et de

sel qui est en centigrade à peu près de $-17^{\circ},7$. Dans ce système, le zéro et le point 100 de l'échelle centigrade tombent à $+32^{\circ}$ et $+212^{\circ}$. Si donc on désigne par T_F et T_C une même température lue sur les deux instruments, on a

$$\frac{T_F - 32}{T_C} = \frac{312 - 32}{100},$$

d'où

$$T_F = 32 + \frac{9}{5} T_C \qquad \text{et} \qquad T_C = (T_F - 32)\frac{5}{9},$$

formules qui permettent la lecture des températures dans ces deux systèmes.

CHAPITRE VII.

DENSITÉ DES SOLIDES ET DES LIQUIDES.

198. — DÉFINITIONS.

On appelle *densité absolue* ou *masse spécifique* d'un corps la *masse* de l'unité de volume de ce corps.

C'est le quotient d'une masse par un volume; ses dimensions sont donc données par la relation $\Delta = ML^{-3}$.

On appelle *poids spécifique absolu* d'un corps *le poids* de l'unité de volume de ce corps; c'est donc le quotient d'un poids ou d'une force par un volume, et ses dimensions sont $\varpi = ML^{-2}T^{-2}$.

On appelle *densité relative* d'un corps A par rapport à un second corps B, pris comme terme de comparaison, le rapport des densités absolues de ces deux corps.

Enfin, on désigne, sous le nom de *poids spécifique relatif* du corps A par rapport au corps B, le rapport de leurs poids spécifiques absolus.

Avant d'aller plus loin, nous allons démontrer d'abord que : *les densités relatives et les poids spécifiques relatifs sont exprimés par les mêmes nombres si l'on opère dans un même lieu.*

En effet, soit M la masse de l'unité de volume du premier corps : M est, par définition, sa densité absolue; si P représente le poids de cette unité de volume, P sera, aussi par définition, son poids spécifique absolu, et l'on a entre M et P la relation

(1) $$P = Mg.$$

Pour un second corps B, on aurait de même, si M′ et P′ représentent respectivement la masse et le poids de son unité de volume,

(2) $$P' = M'g,$$

g étant, dans ces deux égalités, l'accélération de la pesanteur au lieu de l'expérience.

Divisant (1) et (2) membre à membre, il vient

$$\frac{P}{P'} = \frac{M}{M'};$$

or le premier membre représente, par définition, le poids spécifique relatif du premier corps par rapport au second, et le second membre représente la densité relative du même corps. Ces deux grandeurs sont donc numériquement égales.

Dans la pratique on les confond sous le seul nom de *densité*, et l'on définit la *densité usuelle* d'un corps : le rapport entre le poids de ce corps et le poids d'un égal volume d'eau distillée prise à 4°, température de sa densité maxima.

199. — PRINCIPE DES MÉTHODES QUI SERVENT A DÉTERMINER LES DENSITÉS.

On voit, d'après ce qui précède, que, pour déterminer la densité d'un corps, nous aurons à faire deux opérations distinctes :

1° Déterminer avec précision le poids du corps ;

2° Déterminer le poids d'un égal volume d'eau à 4°.

La détermination du poids du corps est l'opération courante de la pesée, décrite antérieurement. Quant au poids d'un volume d'eau égal à celui du corps, on peut le déterminer de deux manières : par simple déplacement, ou par poussée, en s'appuyant sur le principe d'Archimède. De là deux séries de méthodes.

La méthode par déplacement s'appelle aussi *méthode du flacon*.

Quelle que soit la méthode employée, on pourra toujours substituer à l'eau un liquide quelconque dans les expériences ; il suffira, lorsque la densité D' par rapport à ce liquide intermédiaire aura été déterminée, de la multiplier par la densité D_1 de ce liquide par rapport à l'eau ; le produit sera la densité cherchée : $D = D_1 D'$.

En effet, soient M' et M_1 les masses de l'unité de volume du corps soumis à l'expérience et du liquide intermédiaire ; sa densité relative à ce liquide sera

$$D' = \frac{M'}{M_1};$$

la densité D_1 du liquide par rapport à l'eau sera, si l'on désigne par M la masse de l'unité de volume de l'eau,

$$D_1 = \frac{M_1}{M},$$

et l'on voit que

$$D_1 D' = \frac{M'}{M_1}\frac{M_1}{M} = \frac{M'}{M};$$

or le dernier terme de cette égalité est, par définition, la densité du corps par rapport à l'eau. *Cette remarque permet de déterminer la densité des corps solubles dans l'eau.*

200. — CORRECTION A FAIRE SUBIR AUX PESÉES EFFECTUÉES DANS L'AIR.

Nous avons d'abord à indiquer la manière de déterminer avec précision le *poids réel* du corps dont on cherche la densité.

Les pesées faites dans les laboratoires sont toujours effectuées dans l'air. Or, tout corps, en vertu du principe d'Archimède qui, on le sait, s'applique au gaz, subit de la part de l'air une poussée égale au poids de l'air déplacé. Cette poussée est, par essence, variable, car la pression, la température, l'état hygrométrique varient à chaque instant. Cette poussée se retranche du poids *réel* du corps, et c'est la différence qui constitue le poids *apparent* de ce corps dans l'air.

Quand on équilibre sur la balance un corps A et des poids marqués Π, la poussée s'exerce inégalement sur A et sur Π; par conséquent la balance ne nous fait connaître que l'égalité de deux poids *apparents*, alors que nous cherchons le poids vrai qu'aurait, dans le vide, le corps étudié.

Soit Π l'indication numérique du poids, c'est-à-dire la somme, en grammes et fractions de gramme, des chiffres gravés sur les poids; cette somme représente leur poids *dans le vide*. Dans l'air, il en faut retrancher la poussée, et leur poids *apparent* dans l'air sera

$$(1) \qquad P = \Pi - v(1 + kt)a,$$

v étant le volume des poids en centimètres cubes, et a le poids d'un centimètre cube d'air sec à 0° et à 760, poids qui est égal à $0^g,001293$; k est le coefficient de dilatation de la matière dont sont constitués les poids; soit d la densité de cette matière

$$v = \frac{\Pi}{d},$$

portons cette valeur dans (1), il vient

$$(2) \qquad P = \Pi\left[1 - \frac{a}{d}(1 + kt)\right].$$

Mais le poids a doit lui-même subir une correction, parce que : 1° il n'est pas à zéro; 2° la pression n'est pas 760; 3° il est mélangé de vapeur d'eau dont la force élastique actuelle est f, et l'on sait que

$$a = 0^{g},001293 \times \frac{1}{1+t\alpha} \cdot \frac{H - \frac{3}{8}f}{760};$$

remplaçant, dans (2), a par cette valeur, nous avons, en définitive,

$$(3) \qquad P = \Pi\left[1 - \frac{0^{g},001293}{d}\,\frac{1+kt}{1+\alpha t}\,\frac{H-\frac{3}{8}f}{760}\right];$$

telle est la formule *exacte* qui donne la *valeur apparente*, P, *dans l'air, d'un poids marqué* Π.

Formule approchée. — Remarquons que, les poids étant faits de métaux très denses, la fraction $\frac{0,001293}{d}$ est toujours très petite, et que les deux facteurs de corrections qui la suivent dans la parenthèse sont des grandeurs de second ordre dont les variations sont, la plupart du temps, négligeables. On pose donc simplement

$$\sigma = \frac{0,001293}{d},$$

et la formule (3) se réduit pratiquement à

$$(4) \qquad P = \Pi(1-\sigma).$$

Les poids sont généralement en platine, en laiton ou en aluminium. Voici, pour ces trois métaux, les valeurs respectives de d et de σ :

	d.	σ.
Platine................	22	0,00006
Laiton.................	8,4	0,000154
Aluminium............	2,7	0,00048

On voit immédiatement l'avantage qu'il y a à employer des poids en platine.

Correction aux pesées. — Toutes les pesées assez précises pour nécessiter une correction se faisant par double pesée, nous n'examinerons que ce cas.

Soient l et l' les longueurs des deux bras du fléau de la balance. Soient F le poids *apparent* du corps à peser, k' son coefficient de dilatation, Φ son poids réel; Π les poids marqués, P leur poids appa-

rent, λ leur coefficient de dilatation ; π le poids réel de la tare, k'' son coefficient de dilatation :

1° On équilibre le corps avec la tare. Donc, en écrivant que les moments sont égaux, on a

$$\Phi l'\left[1-\frac{a}{d}(1+k't)\right]=\pi l\left[1-\frac{a}{d''}(1+k''t)\right];$$

2° On remplace le corps par des poids marqués Π ; si la température est devenue t', a est devenu a', et l'on a

$$\Pi l'\left[1-\frac{a'}{d}(1+k't')\right]=\pi l\left[1-\frac{a'}{d''}(1+k''t')\right].$$

Divisant membre à membre ces deux équations, il vient

$$\Phi=\Pi\frac{\left[1-\frac{a'}{d}(1+k't')\right]\left[1-\frac{a}{d''}(1+k''t)\right]}{\left[1-\frac{a}{d'}(1+k't)\right]\left[1-\frac{a'}{d''}(1+k''t')\right]}.$$

Si l'opération a été conduite assez vite pour que la température, la pression et l'état hygrométrique n'aient pas changé, $t=t'$, $a=a'$; on a alors simplement

$$\Phi=\Pi\frac{1-\frac{a}{d}(1+kt)}{1-\frac{a}{d'}(1+k't)},$$

ou, en employant la notation déjà adoptée,

$$\Phi=\Pi\frac{1-\sigma}{1-\frac{a}{d'}(1+k't)}.$$

On voit donc que, si les deux corps ont sensiblement la même densité, on a

$$\Phi=\Pi.$$

Correction à faire subir aux pesées d'un volume d'eau. — Les densités relatives sont, nous l'avons vu, définies par rapport à l'eau, à $+4°$. A cette température, la densité relative de l'eau est 1, *par définition*. C'est donc le même nombre qui exprime à la fois son poids réel et son volume à 4°

$$\Pi=v_4.$$

Si la température est t_0, on a

$$v_t = v_4(1 + \mu_t);$$

d'où

$$\Pi = \frac{v_t}{1 + \mu_t},$$

μ_t étant fourni à chaque température par les expériences sur la dilatation de l'eau.

Remarque importante. — Il est essentiel d'observer que, *par définition*, le kilogramme est la masse d'un décimètre cube d'eau distillée prise à 4°; mais le ***kilogramme étalon*** déposé aux Archives n'a probablement pas une masse ***rigoureusement*** égale à la masse d'un cube d'eau distillée, à 4°, dont l'arête aurait pour longueur la dixième partie du ***mètre étalon*** déposé également aux Archives.

La mesure du rapport de ces deux masses est à l'étude. Il résulte de cette remarque que, ***si l'on tient à une précision absolue***, des pesées ne peuvent pas faire connaître, dans l'état actuel de la Science, le volume d'un corps en centimètres cubes. En pratique, ces pesées fournissent pourtant une précision déjà très grande dont nous nous contenterons dans ces études.

201. — MÉTHODE DU FLACON.

C'est une méthode où l'on opère par déplacement.

1° **Corps solides**. — L'appareil se compose d'un flacon en verre soufflé (*fig.* 196), haut de quelques centimètres, et dont le goulot, rodé à l'émeri, porte un bouchon creux, terminé par un tube à entonnoir sur la tige duquel est un trait de repère.

Fig. 196.



On remplit d'abord le flacon d'eau distillée à $t°$; à cet effet, on le remplit jusqu'au-dessus de l'entonnoir; on le porte alors dans la glace fondante et l'on enlève l'excès d'eau qui dépasse le repère, à l'aide d'un petit rouleau de papier buvard. On essuie le flacon et on le porte sur la balance en mettant à côté de lui, sur le même plateau, le corps dont on cherche la densité; on équilibre le tout par une tare π. Cette tare équilibre : 1° le verre V du flacon; 2° l'eau E_0 qu'il contient; 3° le corps étudié dont le poids est $vd - v(1 + kt)a$. On a donc

$$\pi = V + E_0 + vd - v(1 + kt)a. \quad (1)$$

On remplace le corps par des poids marqués Π; la tare n'a pas changé; on a donc

$$(2)\qquad \pi = V + E_0 + \Pi(1 - \sigma).$$

On introduit alors le corps dans le flacon, et on les fait passer sous la cloche d'une machine pneumatique, pour enlever les bulles d'air adhérentes; enfin on remplit, comme ci-dessus, le flacon d'eau jusqu'au repère, en enlevant l'excès avec du papier buvard; l'opération est faite dans la glace fondante. On a ainsi soustrait le corps à la poussée de l'air, en même temps qu'on a été forcé d'ajouter des poids Π'. Le corps occupe à zéro le volume v et prend la place d'un poids d'eau égal à $\frac{v}{1+\mu_0}$, μ_0 étant la dilatation de l'eau de $4°$ à $0°$.

La tare π n'a pas changé; on a donc

$$(3)\qquad \pi = V + E_0 - \frac{v}{1+\mu_0} + vd + \Pi'(1 - \sigma).$$

A l'aide de ces trois équations, on peut tirer d, si l'on remarque que V et E_0 entrent toujours par leur somme, que l'on peut remplacer par le symbole M.

On obtient ainsi

$$d = \frac{\Pi}{\Pi'}\,\frac{1}{1+\mu_0} - \left(\frac{\Pi - \Pi'}{\Pi'}\right)(1 + kt)a.$$

2° **Corps liquides**. — Le flacon pour les liquides a une forme un peu différente (*fig.* 197) : on le remplit, à t_0, du liquide à étudier, à l'aide d'un entonnoir capillaire; on le plonge dans la glace et l'on enlève avec du papier buvard tout le liquide qui dépasse un repère placé sur la tige.

Fig. 197.



On équilibre le flacon, ainsi rempli de liquide et essuyé, avec une tare π; on a

$$(1)\qquad \pi = V + vd - va;$$

en opérant de même avec de l'eau, il faut ajouter des poids Π' :

$$(2)\qquad \pi = V + \frac{v}{1+\mu_0} - va + \Pi'(1 - \sigma);$$

enfin on équilibre, avec la même tare, le flacon vide : la somme des

poids marqués est, dans ce cas, Π :

$$(3)\qquad \pi = V + \Pi(1 = \sigma).$$

On tire de ces trois équations

$$d = \frac{\Pi - \Pi'}{\Pi}\frac{1}{1+\mu_0} + \frac{\Pi'}{\Pi}a.$$

202. — MÉTHODE DE LA BALANCE.

1° **Solides.** — On suspend le corps à étudier, par un très mince fil de platine, sous le plateau de la balance, et on l'équilibre par de la tare π. On a donc

$$(1)\qquad \pi = vd - v(1+kt)a;$$

on remplace le corps par des poids marqués Π :

$$(2)\qquad \pi = \Pi(1-\sigma);$$

on immerge le corps dans l'eau t^0; il faut ajouter des poids Π′ pour équilibrer la poussée. On a donc

$$(3)\qquad \pi = vd - \frac{v(1+kt)}{1+\mu_t} + \Pi'(1-\sigma),$$

μ_t étant la dilatation de l'eau à t^0. On obtient ainsi la densité

$$d = \frac{\Pi}{\Pi'}\frac{1+kt}{1+\mu_t} - \frac{\Pi-\Pi'}{\Pi'}(1+kt)a.$$

2° **Liquides.** — On suspend sous la balance une boule de verre lestée par du mercure et fermée à la lampe; soit $v(1+kt)$ son volume, p son poids réel. On équilibre par une tare π. On a donc

$$(1)\qquad \pi = p - v(1+kt)a,$$

on immerge ensuite ce corps dans l'eau; il faut, pour rétablir l'équilibre, ajouter des poids Π :

$$(2)\qquad \pi = p - v\frac{1+kt}{1+\mu_t} + \Pi(1-\sigma);$$

enfin, on immerge le corps dans le liquide; il faut remplacer les poids Π par des poids Π′ :

$$(3)\qquad \pi = p - v\frac{1+kt}{1+mt}d + \Pi'(1-\sigma),$$

μ étant le coefficient de dilatation du liquide étudié; d sa densité. On tire de ces équations

$$d = \frac{\Pi'}{\Pi} \frac{1 + mt}{1 + \mu_t} + a \frac{\Pi - \Pi'}{\Pi} (1 + mt).$$

Remarques. — Pour que la méthode de la balance soit précise, il faut que le fil de suspension soit fin et imperméable aux liquides ambiants; comme une partie de ce fil est immergée, il faut, du côté du plateau tare, accrocher un fil identique, de même longueur de même poids, et qui plonge, à chaque expérience, dans le même liquide que le fil de suspension; on évite ainsi la correction relative à la poussée sur le fil et aux actions capillaires.

Fig. 198.



203. — MÉTHODE DES ARÉOMÈTRES.

1° **Solides :** *Aréomètre de Nicholson.* — Cet instrument (*fig.* 198) se compose d'un flotteur cylindro-conique, surmonté d'une tige portant un plateau de balance, et supportant à sa partie inférieure une corbeille C. Sur la tige supérieure est tracé un trait de repère A appelé *point d'affleurement*. Tout l'appareil flotte dans une éprouvette contenant de l'eau.

On met le corps à étudier sur le plateau, et l'on ajoute, à côté de lui, de la tare, jusqu'à ce que l'affleurement ait lieu. On enlève alors le corps, on le remplace par des poids marqués Π qui donnent le poids du corps par double pesée.

On transporte le corps du plateau supérieur dans la corbeille inférieure; il subit une poussée qu'on équilibre par des poids Π', et l'on a évidemment

$$d = \frac{\Pi}{\Pi'}.$$

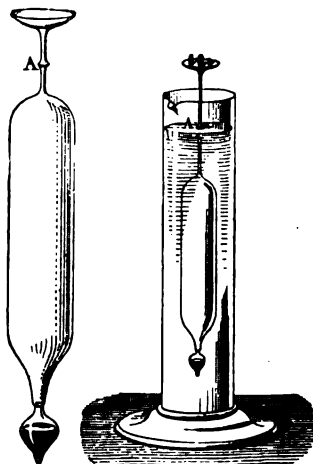
Nous n'avons pas, à dessein, fait suivre Π et Π' de leurs facteurs de correction : le peu de précision de l'appareil, du fait de la capillarité, rend toute correction illusoire.

2° **Liquides :** *Aréomètre de Fahrenheit* (*fig.* 199). — L'instru-

ment, de forme analogue au précédent, est construit *tout en verre* et, lesté à sa partie inférieure par une masse fixe de mercure, ne porte pas de corbeille.

On le porte d'abord sur une balance pour avoir son poids que nous désignerons par p; on le plonge dans le liquide à étudier : il faut, pour obtenir l'affleurement jusqu'au trait A, le charger de poids Π; la poussée F, qui représente le poids de liquide égal au volume immergé, est donc

Fig. 199.



$$F = p + \Pi.$$

On répète l'expérience dans de l'eau : il faut remplacer Π par Π' pour équilibrer la nouvelle poussée F', et l'on a

$$F' = p + \Pi',$$

par définition, et en vertu du principe d'Archimède; on a

$$d = \frac{F}{F'};$$

donc

$$d = \frac{p + \Pi}{p + \Pi'}.$$

Comme pour l'aréomètre de Nicholson, toute correction est illusoire en présence des erreurs systématiques de l'instrument.

204. — ARÉOMÈTRES A POIDS CONSTANT.

Les deux instruments que nous venons d'étudier sont ce qu'on nomme des aréomètres à *volume constant,* étant donné qu'un repère assure l'invariabilité du volume immergé.

Il existe toute une classe d'instruments servant à apprécier rapidement et par lecture directe la densité approchée des liquides : ce sont les *aréomètres à poids constant.*

Principe : Un flotteur en verre, M, lesté par du mercure, est surmonté d'une tige cylindrique graduée, AB, formée d'un tube de verre fermé à sa partie supérieure (*fig.* 200). L'instrument, ayant un poids

invariable, s'enfonce inégalement dans des liquides de densités différentes; et la lecture de la division d'affleurement peut faire connaître la densité.

Aréomètres de Baumé. — Ces appareils, dont la routine a maintenu l'usage dans l'industrie, sont encore d'un usage commercial; il est impossible de les passer sous silence. Ils sont de deux sortes : les *pèse-liqueurs,* pour les liquides moins denses que l'eau, et les *pèse-acides,* pour les liquides plus denses.

Fig. 200.



Voici comment se construit ce dernier appareil dont la forme est celle de la figure 200.

Avant de fermer le tube supérieur, on plonge l'instrument dans l'eau à 12°,5 (10° Réaumur) et l'on y ajoute du lest jusqu'à ce qu'il s'enfonce presque jusqu'au sommet de la tige, c'est-à-dire au point A; on marque o à cet endroit. On fait ensuite, à la même température, une solution de 15 parties en poids de sel marin et de 85 d'eau; on y plonge l'appareil au lest duquel on n'a pas touché, on marque 15° au point d'affleurement. On partage l'intervalle ainsi obtenu en 15 parties égales et l'on continue la division en portant de haut en bas des degrés équidistants, égaux à ceux ainsi déterminés, après quoi on ferme l'instrument.

Pour construire le *pèse-liqueurs,* on suit une marche inverse. On fait à 12°,5 une solution de 90 parties d'eau et de 10 parties de sel marin; on y plonge l'instrument dont on règle le lest de façon qu'il affleure au bas de la tige, vers le point B. On marque o au point d'affleurement; on le plonge ensuite dans l'eau, et l'on marque 10 au nouveau point d'affleurement; on partage l'intervalle en 10 parties égales et l'on continue la division de bas en haut.

Ces instruments ne peuvent servir qu'à vérifier au point de vue des transactions commerciales la densité d'un liquide : l'acide sulfurique concentré doit, commercialement, marquer 66° au pèse-acides Baumé.

205. — ALCOOMÈTRE CENTÉSIMAL DE GAY-LUSSAC.

Plus rationnel est l'instrument imaginé vers 1820 par Gay-Lussac. C'est un appareil, de forme identique à celle des aréomètres précédents, mais sur lequel on lit directement le rapport du volume de l'alcool, au volume total de l'eau avec lequel il est mélangé. On le construit de façon qu'il affleure au point o, dans l'eau pure, au bas de la

tige, au point 100, dans l'alcool absolu, vers le haut de la tige. On le plonge ensuite dans divers mélanges d'alcool et d'eau contenant 10, 20, 30,.... On a ainsi des divisions inégalement distantes, entre lesquelles on admet la proportionnalité par interpolation : on divise donc en 10 parties égales chacun des intervalles ainsi obtenus. Cette graduation doit être faite à 15° C.

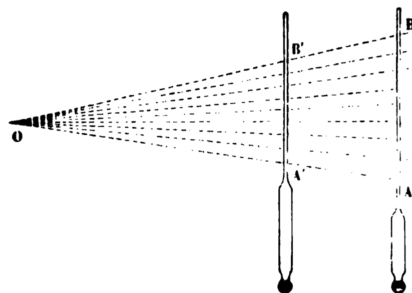
Si la température varie, des corrections sont nécessaires, car les densités du mélange d'alcool et d'eau varient avec la température et varient inégalement pour des mélanges différents. Gay-Lussac a construit des Tables à double entrée, donnant les teneurs en alcool correspondant à une température donnée. L'instrument est légal en France.

Un appareil ainsi construit peut servir d'étalon pour en construire d'autres, sans qu'il soit nécessaire, pour les appareils dérivés, de passer par toute la série des graduations intermédiaires.

Soit AB (*fig.* 201) l'appareil étalon.

Plaçons à côté de lui, et parallèlement, sur un carton, l'appareil dérivé A′ B′ dont on a déterminé directement les points 0° et 100°. Joignons AB, A′B′ : ces lignes se rencontrent en un point O, centre de similitude des deux divisions. Il n'y a donc qu'à joindre le point O à la division 10 de AB et à prendre l'intersection de la droite ainsi obtenue pour avoir la division 10 A′B′, et ainsi de suite.

Fig. 201.



Transformation des aréomètres Baumé en densimètres. — On peut se poser le problème de mesurer la densité d'un liquide avec l'instrument de Baumé : un calcul simple permet de le résoudre.

Prenons, par exemple, le *pèse-acides*. Soit V le volume des flotteurs et de la portion de tige jusqu'au 0. Soit v le volume d'une division, e la densité de l'eau, d la densité de la solution de sel à 15 pour 100 et x celle du liquide étudié.

Quand l'instrument plonge dans l'eau, c'est le volume V qui est immergé ; il en résulte une poussée Ve qui fait équilibre, d'une part, à $(V - 15v)d$, quand l'appareil plonge dans la solution de sel, et, d'autre part, à $(V - nv)\,x$, quand il affleure, dans le liquide étudié,

'à la division n. On a donc

$$Ve = (V - 15v)d,$$
$$Ve = (V - nv)x,$$

l'on tire x.

peut d'ailleurs construire directement des *densimètres :*
t un appareil ayant la forme générale des aréomètres; on le
de façon qu'il affleure dans l'eau vers le bas de la tige; soit p
oids *total;* on lui ajoute alors des quantités p, $2p$ de mercure,
i multiplie par 2, 3 les poids et, par suite, les volumes immer-
es trois points d'affleurement correspondent donc à des volumes
ont entre eux comme les nombres 1, 2, 3. On marque 50, 100,
ces trois points et l'on divise en 50 parties égales chacun des
alles. L'appareil s'enfonçant au point 100 dans l'eau distillée,
arrête, dans un liquide, à la division 74, c'est que la densité de
rnier est $\frac{100}{74}$ de celle de l'eau.

a aujourd'hui des densimètres de précision, construits expéri-
lement et donnant les densités par lecture directe.

us les aréomètres ont un défaut commun qui limite leur précision.
int d'affleurement ne dépend pas seulement du poids spécifique
quide dans lequel il est plongé, mais aussi de la tension superfi-
de ce liquide. Seuls échappent à cette cause d'erreur les instru-
s qui, comme l'alcoomètre de Gay-Lussac, reçoivent une gradua-
mpirique, pour une série de liquides déterminés et sont employés
sivement à l'étude de ces liquides.

CHAPITRE VIII.

DENSITÉ DES GAZ ET POIDS DU LITRE D'AIR.

206. — MÉTHODE GÉNÉRALE.

La densité d'un gaz est le rapport du poids d'un certain volume de ce gaz au poids d'un égal volume d'air pris dans les mêmes conditions de température et de pression.

Les densités des gaz sont donc rapportées à l'air; il suffit, comme nous l'avons montré, pour obtenir leurs densités par rapport à l'eau, de multiplier les premières par la densité de l'air par rapport à l'eau.

La détermination de la densité d'un gaz à une température quelconque suppose une série d'opérations que l'on effectue dans l'ordre suivant :

1° On pèse un grand ballon plein d'air sec à $t°$ et sous la pression H; puis on y fait le vide à une pression h à la même température et on le pèse de nouveau; la différence $P - p$ de ces deux pesées représente le poids d'air qui remplit la capacité à $t°$ du ballon sous la pression $H - h$. On peut en déduire immédiatement l'expression du poids du gaz qui remplirait la capacité du ballon à 0°, sous la pression de 76^{cm}, et qui est

$$(P - p)\frac{76}{H - h}\frac{1 + at}{1 + kt},$$

α étant le coefficient de dilatation du gaz et k celui du ballon.

2° En effectuant les mêmes opérations sur un gaz quelconque, on obtiendrait deux nombres P' et p' tels, que le poids du gaz, qui à 0° et 76^{cm} remplirait la capacité du même ballon, serait donné par l'expression

$$(P' - p')\frac{76}{H' - h'}\frac{1 + at'}{1 + kt'}.$$

La densité du gaz est représentée par le rapport de ces deux poids.

Cette méthode générale présente des causes d'erreur considérables, parce qu'il est très difficile de déterminer avec une exactitude suffisante les diverses données numériques nécessaires à ce calcul.

En particulier, les températures t et t' de l'air et du gaz seraient mal connues, à moins que, comme le faisaient d'ailleurs Dumas et Boussingault, on n'ait la précaution de placer les thermomètres dans l'intérieur même du ballon.

Mais les plus graves causes d'erreur se rencontrent dans les pesées; le ballon est en effet pesé dans l'air et il faut, pour avoir son véritable poids, ajouter à son poids apparent le poids de l'air déplacé qui, dans certains cas, peut être supérieur au poids du gaz inclus. Or le poids de cet air est très difficile à connaître avec une précision suffisante, puisqu'il suppose à lui seul la détermination d'un nombre considérable de données qui sont autant de causes d'erreur. Il faut, en effet, déterminer la pression, la température, l'état hygrométrique, toutes quantités qui varient d'ailleurs pendant l'expérience même. D'autres causes d'erreur résultent encore de la variation de composition de l'air et ne sont plus négligeables lorsqu'il s'agit de la détermination de la densité de gaz légers, et enfin la condensation de l'eau sur les parois du ballon est tellement variable qu'il paraît impossible de l'apprécier.

207. — MÉTHODE DE REGNAULT.

Regnault évite complètement, par un artifice très simple, les incertitudes qui proviennent de l'état de l'air au milieu duquel on pèse le ballon. Au lieu d'équilibrer le ballon avec une tare, il l'équilibre avec un second ballon fermé aussi identique que possible; toutes les variations qui surviennent dans l'air affectent pareillement les deux ballons, et, lorsqu'ils se sont mis en équilibre de température, on peut constater que le fléau de la balance reste toujours horizontal. Les deux ballons étant plongés dans le même air condensent à leur surface des quantités égales d'eau, s'ils sont faits avec le même verre; ils se mettront donc en équilibre d'humidité, ce ne sera qu'une question de temps.

Les ballons ont 10^l environ. Celui qui est destiné à renfermer le gaz est muni d'une monture à robinet; on le pèse dans l'air et dans l'eau pour déterminer, par la différence de ces pesées, son volume extérieur. Le second, fabriqué avec le même verre, présente à très peu près le même volume, il est muni d'une monture métallique à

crochet; Regnault détermina sa capacité extérieure, qui se trouva être un peu inférieure à celle du premier ballon. Il accrocha alors à ce second ballon un petit tube de verre fermé par les deux bouts, déplaçant exactement un nombre de centimètres cubes égal à la différence que présentent les volumes des deux ballons; enfin, dans ce second ballon, on place quelques gouttes de mercure pour établir en sa faveur un excès de poids d'environ 10^g.

Ces deux ballons, suspendus sous les plateaux d'une balance pesant 1^{kg} au demi-milligramme, restèrent en équilibre pendant quinze jours, la température ayant varié de 17° et la pression de 30^{mm}.

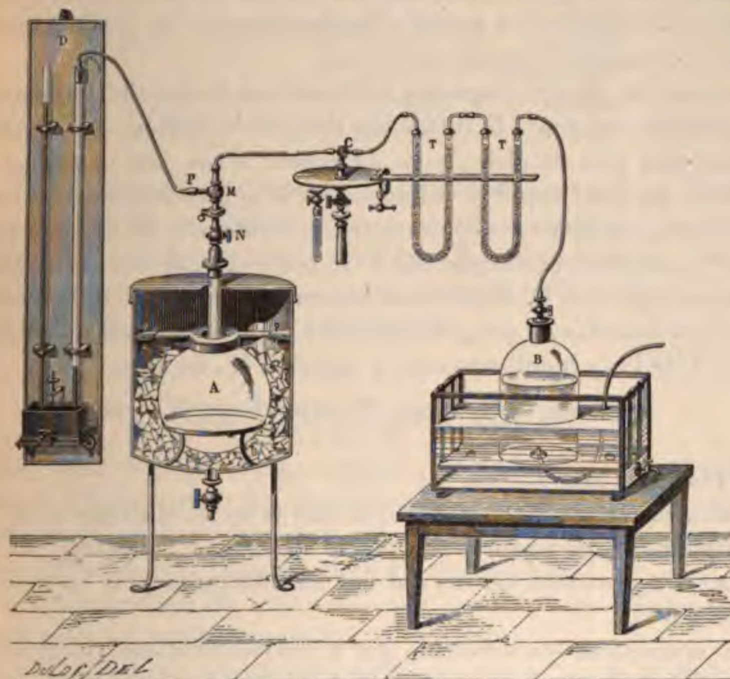
Voici maintenant comment Regnault conduisait une expérience : Le premier ballon était entouré de glace; il y faisait, par une tubulure latérale, le vide plusieurs fois en y laissant à chaque opération entrer le gaz en expérience pur et sec. Il ouvrait le robinet et laissait le gaz se mettre, dans une dernière opération, en équilibre de pression avec l'atmosphère. Le ballon était alors sorti de la glace, lavé, essuyé et suspendu à la balance où on l'abandonnait pendant plus de deux heures pour qu'il se mette en équilibre de température et d'humidité. Il faut avoir soin de n'essuyer le ballon qu'avec un linge humide et non tout à fait sec, sans quoi il se développe à sa surface, comme l'ont montré Dumas et Boussingault, de l'électricité; l'attraction sur les parois voisines de la balance peut produire un excès de poids apparent de près de 1^g; cette électricité ne se dissipe que fort lentement : l'excès de poids était encore de plus de $0^g,01$ après cinq heures.

Les pressions dans le ballon à gaz étaient lues au moyen du *manomètre barométrique* D (*fig.* 202), composé de deux tubes barométriques parallèles plongés dans une cuvette à deux compartiments séparés par une cloison.

L'un de ces tubes est un baromètre de 2^{cm} de diamètre, l'autre est de même diamètre et peut, au moyen d'un tube de plomb, communiquer par sa partie supérieure avec le ballon; le compartiment dans lequel il plonge est muni d'un robinet. Ce dispositif a pour but de permettre d'isoler complètement le baromètre du manomètre, de façon à éviter de faire osciller la colonne barométrique, ce qui a pour effet de vicier l'appareil en y faisant pénétrer, au bout d'un certain temps, des traces d'air. Lorsqu'on veut mesurer une différence de pression aux deux tubes, on ajoute du mercure, de façon à noyer la cloison sous une couche de ce liquide et à former ainsi une cuvette unique.

On mesure avec cet appareil la pression barométrique H, au moment où le ballon est plein de gaz, et la pression h du gaz qui reste dans le ballon quand on y a fait le vide aussi bien que possible. Les

Fig. 202.



pesées P et p, faites à ces mêmes instants, donnent par différence le poids $P - p$ du gaz qui, à 0°, remplit la capacité du ballon sous la pression $H - h$; par conséquent, le poids π du gaz qui, à 0° et sous la pression normale de 76^{cm}, remplit la même capacité, est

$$\pi = (P - p)\frac{76}{H - h}.$$

La même série d'opérations exécutée avec l'air donnera le nombre π' par lequel il faudra diviser celui-ci pour avoir la densité cherchée dont la valeur est

$$\frac{\pi}{\pi'}.$$

208. — VÉRIFICATION DES LOIS DE MARIOTTE ET DE GAY-LUSSAC.

Cet appareil se prête à la vérification de la loi de Mariotte; il suffit de remplir le ballon dans des expériences successives, à des pressions intermédiaires soigneusement déterminées, à la même température de 0°, et d'effectuer les pesées correspondantes. On vérifiera si les poids trouvés sont d'accord avec la loi.

On peut de même l'employer à déterminer la densité des gaz à la température de 100°. Il suffira de remplir le ballon, après l'avoir entouré non plus de glace, mais de vapeur d'eau. En comparant le poids du gaz qui remplit le ballon à 0° et le poids du gaz qui le remplit à 100°, on pourra calculer aussi le coefficient de dilatation du gaz. Si, en effet, on désigne par P le poids du gaz sous la pression $H - h$ et à 0°, par H' la pression barométrique quand le ballon est dans l'eau bouillante, par p le poids du gaz qui est sorti à la température T de l'eau bouillante sous la pression H', on aura

$$P \frac{H}{H-h} - P \frac{H'}{H-h} \frac{1+kT}{1+\alpha T} = p,$$

d'où l'on peut tirer α.

Enfin, on peut s'assurer si le gaz suit la loi de Mariotte à 100°. Il suffit pour cela de répéter, en opérant dans l'eau bouillante, les expériences à pressions variées qui ont été indiquées plus haut sur le ballon à 0°.

En soumettant les différents gaz à ces vérifications, Regnault a trouvé que les gaz permanents suivent sensiblement la loi de Mariotte, aussi bien à 0° qu'à 100°, et que leurs coefficients de dilatation sont sensiblement égaux.

Pour le gaz carbonique, on trouve par cette méthode sensiblement le même coefficient de dilatation (0,003719) que celui déterminé par la méthode générale (0,0037099).

La vérification de la loi de Mariotte à 0° et à 100° conduit à ce résultat que le gaz s'écarte nettement de la loi à 0° et beaucoup moins à 100°, comme le montre le Tableau suivant où sont inscrits les poids trouvés sous des pressions variées et les poids qu'on devrait trouver si le gaz suivait la loi de Mariotte :

	Pressions.	Poids trouvé.	Poids d'après la loi de Mariotte.
	mm		
A 0°	374,13	9,5845	9,6628
	224,17	5,7345	5,7634
A 100°	760,00	14,2717	»
	338,36	6,3549	6,3545

La densité du gaz carbonique varie donc avec la pression et avec la température ; elle prend, d'après les nombres que nous venons de citer, les valeurs suivantes :

	Pressions.	Densités.
	mm	
A 0°.............	760,00	1,52910
	374,13	1,52366
	224,17	1,52145
A 100°...........	760,00	1,52418
	383,39	1,52410

Ainsi, à température constante, la densité augmente et diminue avec la pression, et, d'autre part, à pression constante, la densité diminue lorsque la température s'élève. Nous retrouverons tous ces résultats d'une façon beaucoup plus nette avec les vapeurs et nous montrerons qu'on peut en prévoir le sens.

309. — DÉTERMINATION DU POIDS DU LITRE D'AIR.

Pour calculer le poids d'un volume quelconque d'un gaz, il suffira, après la détermination des densités que nous venons d'effectuer, de connaître le poids du litre d'air dans les conditions normales, c'est-à-dire à 0° et sous la pression de 760^{mm} de mercure.

La détermination de cette constante capitale a été faite par Regnault avec les mêmes appareils.

Les expériences précédentes font connaître le poids A d'air sec, à 0° et sous la pression de 760^{mm} de mercure, qui remplit la capacité du ballon ; son expression est

$$A = (P_2 - p_2)\frac{760}{H_2 - h_2}.$$

Il suffit donc de connaître le volume V_0 du ballon à 0° pour obtenir immédiatement le poids du litre

$$a = \frac{A}{V_0}.$$

Or, le volume du ballon a numériquement la même expression que le poids d'eau prise à 4° qui remplirait la capacité à 0° du ballon.

Pour faire cette détermination, on pèse le ballon qui a servi de réservoir à gaz, ouvert, non compensé par un ballon taré, la température étant $t°$, la pression H et l'état hygrométrique e. Cette

première pesée donne un nombre P qui exprime le poids de l'enveloppe B, augmenté du poids de l'air contenu A', diminué de la poussée ϖ :

$$P = B + A' = \varpi.$$

En second lieu, on fait bouillir quelques gouttes d'eau dans le ballon en y faisant le vide, et l'on chasse ainsi l'air; puis on ferme le robinet. On fixe ensuite sur la tubulure un tube de verre coudé qui plonge dans un second ballon plein d'eau qu'on a maintenue longtemps en ébullition; en ouvrant enfin le robinet du ballon à densité, on le remplit lentement d'eau pure bouillante à l'abri du contact de l'air. On laisse refroidir, puis on entoure le ballon de glace, et il achève de se remplir d'eau privée d'air à 0°, ce qui demande environ une douzaine d'heures.

Lorsqu'on le sort de la glace, on le plonge dans l'eau à la température de la salle; on l'y laisse deux heures avant de le suspendre sous la balance. On pouvait, sans crainte de rupture, fermer le robinet au moment où l'on sortait l'appareil de la glace; les expériences étaient faites, en effet, dans une salle dont la température était voisine de 6°, et ce n'est qu'au-dessus de 8° que l'eau, qui se contracte en s'échauffant jusqu'à 4° et ne se dilate qu'au-dessus de cette température, reprend le volume qu'elle présente à 0°.

Cette seconde pesée donne le poids P' du ballon, plus le poids de l'eau E_0, qui remplit la capacité à 0°, moins la poussée

$$P' = B + E_0 - \varpi'.$$

Soient Π et Π' les poids $P + \varpi$ et $P' + \varpi'$ corrigés des poussées. On a

$$E_0 = \Pi' - \Pi + A';$$

l'expression numérique de A' se calcule en fonction de A, qui est connu, par la formule

$$A' = A \frac{(1 + kt)\left(H - \frac{3}{8} eF\right)}{(1 + \alpha t)\, 760}$$

On connaît donc E_0; pour en déduire V_0, c'est-à-dire le poids d'eau E_4 à 4° qui remplirait cette même capacité, il suffit de calculer

$$\frac{E_0}{0,999881} = V_0,$$

a densité de l'eau à 4° étant donnée par le nombre $\frac{1}{0,999881}$, si elle st prise comme unité à 0°.

Dans les expériences de Regnault, on avait en moyenne

$$V_0 = 9881^{cm},086$$

t

$$A = 12^{g},278.$$

Le poids spécifique qu'on en déduit est donc

$$a = 0^{g},001293187.$$

Lord Rayleigh a fait une remarque importante au sujet du mode xpérimental adopté par Regnault. Le ballon de 10¹ est pesé vide, puis plein de gaz à la pression atmosphérique; le ballon vide subit de ce fait une compression qui a pour effet de diminuer son volume extérieur, et son poids apparent se trouve augmenté de celui de la quantité d'air qu'il déplace en moins. M. Crafts a mesuré directement la contraction sur des ballons de mêmes dimensions que ceux de Regnault; il a trouvé qu'elle était de 0,000247 du volume par atmosphère. Le poids du litre d'air corrigé serait alors

$$1^{g},29349,$$

et les densités, un peu différentes de celles de Regnault, sont réunies lans le Tableau suivant :

	Regnault.	Après correction.
Air...............	1,00000	1,00000
Az................	0,97137	0,97138
H.................	0,06927	0,06949
O.................	1,10564	1,10562
CO^2...............	1,52910	1,52897

L'accroissement de densité de l'hydrogène serait d'après cela assez otable.

210. — INFLUENCE DE LA PESANTEUR SUR LE POIDS DU LITRE D'AIR.

On rapporte la densité des gaz à celle de l'air; cette convention est icheuse, car elle suppose la composition de l'air rigoureusement inariable; il serait préférable de prendre pour terme de comparaison n gaz simple, facile à préparer à l'état de pureté.

D'autre part, le poids du litre d'un gaz ne reste pas constant et varie

avec la pesanteur : le poids spécifique d'un gaz est, en effet, proportionnel à la pression qui est elle-même proportionnelle à la pesanteur; il en résulte que la densité par rapport à l'eau varie avec la latitude et l'altitude, et que la valeur que nous venons de calculer ne convient rigoureusement que pour la localité dans laquelle les expériences ont été faites, c'est-à-dire pour une altitude de $a = 60^m$ au-dessus de la mer et une latitude de $48°50'14''$.

Le poids du litre d'air sous le parallèle de $45°$ serait

$$1^g,293187 \frac{1}{1 - 0,002552 \cos 2(48°50'14'')} = 1,292697.$$

Le poids du litre d'air dans une localité placée sous la latitude λ et à une hauteur h serait, en désignant par R le rayon de la Terre :

$$1^g,292697 \left(\frac{R+a}{R+h}\right)^2 (1 - 0,002552 \cos 2\lambda).$$

En remplaçant R par 6366198^m et a par 60^m, on trouve définitivement

$$1^g,292673 \frac{1}{1 + \frac{2h}{R}} (1 - 002552 \cos 2\lambda).$$

211. — POIDS MOLÉCULAIRES. DENSITÉS PAR RAPPORT A L'HYDROGÈNE.

D'après les lois générales des combinaisons chimiques, les densités des corps à l'état gazeux forment un système de nombres proportionnels : c'est la base du système des *poids moléculaires*. Le poids moléculaire d'un gaz est le poids de ce gaz qui, dans les conditions normales, occupe le même volume que 2^g d'hydrogène, soit $22^l,38$: c'est donc la moitié de la densité du gaz par rapport à l'hydrogène. Il serait donc rationnel de rapporter toutes les densités gazeuses à l'hydrogène. Ce choix aurait d'ailleurs un avantage pratique. Dans une première approximation, souvent suffisante dans les applications, la densité d'un corps simple à l'état gazeux, rapportée à l'hydrogène, est un nombre assez simple, facile à retenir, et la densité d'un corps composé se déduit immédiatement de sa formule chimique.

212. — APPLICATION DE LA DENSITÉ DES GAZ : DÉCOUVERTE DE L'ARGON.

Nous avons vu que Lord Rayleigh avait fait, au sujet de la mesure des densités des gaz par Regnault, une importante remarque relative

à la précision de la méthode. L'éminent savant anglais poursuivait, en effet, depuis plusieurs années, des expériences suivies en vue de mieux connaître la densité et la composition de l'air atmosphérique.

Il fut frappé, dans des travaux entrepris en collaboration avec M. W. Ramsay, de ce fait que l'azote extrait de l'atmosphère par élimination d'oxygène est toujours plus dense que l'azote extrait des composés azotés, quels que soient ces composés. Il en a conclu l'existence probable d'un troisième élément de l'air, dans la proportion de 1 pour 100, et qui avait échappé jusqu'ici à toute analyse.

Pour vérifier cette hypothèse, ils ont pris de l'azote extrait de l'atmosphère et l'ont, en grande quantité, fait passer sur du magnésium chauffé au rouge : un azoture de magnésium se forma, et ils trouvèrent un résidu, c'était l'argon.

L'histoire du nouveau gaz, dont la densité par rapport à l'hydrogène est 20, est du domaine de la Chimie, mais c'est par une méthode physique admirablement mise en œuvre qu'il a été rationnellement cherché et trouvé; c'est par des méthodes physiques qu'on l'a distingué des deux autres éléments de l'air. En effet, l'argon est soluble dans l'eau, qui, à 12°, en dissout $3^{vol},94$ pour 100; il est donc deux fois et demie plus soluble que l'azote et un peu moins que l'oxygène. Son spectre est caractérisé par deux raies spéciales; il a été liquéfié à — 128°, sous 38^{atm} de pression, et sa température critique est — 121°, avec une pression critique de 50^{atm}.

La découverte de l'argon est un bel exemple de l'utilité qu'il y a à augmenter sans cesse la précision dans les mesures de Physique expérimentale : un simple corollaire d'une expérience bien faite suffit à un physicien pour enrichir la Science d'un corps nouveau dont la Chimie était, avec ses seules ressources, dans l'impuissance de soupçonner même l'existence.

CALORIMÉTRIE.

CHAPITRE I.

CHALEUR SPÉCIFIQUE DES SOLIDES ET DES LIQUIDES. MÉTHODE DES MÉLANGES.

213. — PRINCIPES GÉNÉRAUX.

La calorimétrie a pour but la mesure des quantités de chaleur, dans tous les phénomènes où il y a absorption ou dégagement de chaleur, tels que les dilatations, les changements d'état et les réactions chimiques; elle a pour but, aussi, la recherche des relations qui peuvent exister entre les quantités de chaleur accumulées dans un corps et ce que nous avons défini la température de ce corps.

C'est de ce premier point que nous nous occuperons d'abord.

Des idées très simples émises par Black vers 1760 ont servi de point de départ à cette branche de la Science.

Il est de toute nécessité d'admettre d'abord que, si un phénomène se produit en dégageant une quantité Q de chaleur, la réalisation du phénomène inverse sera accompagnée d'une absorption d'une quantité Q de chaleur précisément égale; ainsi la quantité de chaleur qu'il faudrait communiquer à un corps pour faire élever sa température de 0° à t° serait égale à celle qu'il abandonnerait en passant de t° à 0°.

En second lieu, pour chauffer d'un même nombre de degrés deux poids différents d'un même corps, il faut des quantités de chaleur proportionnelles à ces poids, ce qui est évident.

Ces principes une fois admis, on peut prouver par deux expé-

riences très simples, dues aussi à Black, deux faits très importants :

1° Pour élever d'un certain nombre de degrés la température d'un corps, il faut lui communiquer une quantité de chaleur approximativement proportionnelle à la variation de température que l'on veut produire.

Versons en effet dans un même vase deux masses égales d'eau à des températures initiales différentes; la température finale du mélange est sensiblement égale à la moyenne des températures initiales; or le corps le plus chaud n'a pu échauffer l'autre qu'en se refroidissant lui-même, c'est-à-dire que l'équilibre final n'est établi que parce que la quantité de chaleur perdue par l'un des corps est précisément égale à celle qui a été gagnée par l'autre. Si l'eau froide s'est échauffée de t°, l'eau chaude s'est refroidie aussi de t°; les deux phénomènes inverses ont mis en jeu la même quantité de chaleur puisqu'on doit admettre que c'est la chaleur perdue par l'eau chaude qui a échauffé l'eau froide.

2° Pour des corps différents les quantités de chaleur nécessaires pour produire une même variation de température sont différentes. Si, en effet, on mélange dans un même vase 1^{kg} de mercure à 100° et 1^{kg} d'eau à 0°, la température finale ne sera plus 50° comme dans l'expérience précédente; elle sera voisine de 3°,2 si l'on admet que les parois du vase n'interviennent pas dans les conditions de l'équilibre final. Ainsi la quantité de chaleur abandonnée par le mercure lorsque sa température varie de 96°,8 environ n'a pu échauffer le même poids d'eau que de 3°,2.

Les quantités de chaleur contenues dans les différents corps ne sont donc pas du tout accusées par leur température.

Tyndall l'a aussi montré par une expérience bien simple : sur un gâteau de cire de 12^{mm} d'épaisseur il déposait en même temps des balles de différents métaux : fer, plomb, bismuth, étain, cuivre, qu'il venait de chauffer à 180° dans un même bain d'huile. Ces balles fondaient la cire et s'y enfonçaient, mais avec des vitesses différentes. Le fer traversait la cire de part en part, et tombait; le cuivre suivait; la boule d'étain arrivait juste au-dessous du gâteau, mais ne pouvait traverser; le plomb et le bismuth enfonçaient à peine.

214. — DÉFINITIONS.

Calorie. — On a choisi une unité de chaleur pour la mesure de ces quantités; on la nomme la *calorie*.

La calorie est la quantité de chaleur qu'il faut fournir à un gramme d'eau prise à 0° pour élever sa température à 1°.

On rapporte aussi l'unité de chaleur au kilogramme ; c'est alors la *grande calorie.*

Chaleur spécifique. — On appelle *chaleur spécifique d'un corps le nombre de calories nécessaire pour élever la température de l'unité de masse de ce corps de un degré.*

Cette définition suppose que cette quantité reste constante dans toute l'étendue de l'échelle thermométrique, ce qui n'a pas toujours lieu.

Les gaz ont une chaleur spécifique ; pour les solides la quantité que nous venons de définir n'est pas rigoureusement constante, mais on peut la considérer comme invariable dans une étendue assez considérable de l'échelle thermométrique ; les liquides ne possèdent pas de chaleur spécifique définie comme nous venons de le faire.

La relation qui lie la quantité de chaleur Q à la variation de température t qu'elle produit est remarquablement simple dans le cas des corps qui possèdent une chaleur spécifique c ; si l'on désigne par P la masse du corps, on a d'une façon générale

$$Q = Pct. \tag{1}$$

Le produit du poids P d'un corps par sa chaleur spécifique c prend le nom de *capacité calorifique* ou d'*équivalent en eau.*

Chaleur spécifique moyenne entre des températures déterminées. — Supposons un corps tel que des variations de températures égales soient produites en différents points de l'échelle thermométrique par des quantités de chaleur inégales, et supposons qu'on ait mesuré la quantité Q de chaleur qui fait passer l'unité de masse de ce corps de la température $t°$ à $t'°$; le quotient $\frac{Q}{t'-t}$ mesure la quantité moyenne de chaleur qui élèverait la température du corps de 1° dans cet intervalle : on l'appelle *la chaleur spécifique moyenne entre $t°$ et $t'°$.*

Chaleur spécifique vraie à $t°$. — Supposons que l'intervalle $t - t' = dt$ tende vers 0, la température étant t : la quantité de chaleur dQ nécessaire pour produire cette variation dt tend elle-même vers 0 et le rapport $\frac{Q}{t-t'}$ devient $\frac{dQ}{dt}$; la limite vers laquelle il tend s'appelle *la chaleur spécifique vraie à $t°$.*

On voit donc que la quantité de chaleur emmagasinée dans un corps et nécessaire pour porter la température de l'unité de masse de ce corps à t° ne pourra pas toujours se représenter par une fonction linéaire comme celle qui suffit au cas des gaz. Si l'étendue des variations thermométriques est assez grande, il faudra pour les solides employer des relations de la forme

$$(2) \qquad Q = at - bt^2$$

et pour les liquides on devra employer jusqu'au troisième terme

$$(3) \qquad Q = at + bt^2 + ct^3.$$

Il sera alors très facile de former les chaleurs spécifiques moyennes entre o et t°, ou les chaleurs spécifiques vraies à t° dont les expressions seraient par exemple, dans le dernier cas,

$$\frac{Q}{t} = a + bt + ct^2,$$

$$\frac{dQ}{dt} = a + 2bt + 3ct^2.$$

D'après la définition de la calorie la substance calorimétrique la plus commode à employer est l'eau; mais cela suppose que l'on connaisse exactement pour l'eau la relation de la forme (3); nous supposerons dans la suite que les variations de température de l'eau employée comme corps calorimétrique soient assez peu étendues pour qu'on puisse admettre dans cet intervalle que la chaleur spécifique de l'eau est constamment égale à l'unité.

Les principales expériences calorimétriques peuvent se rattacher à quatre méthodes :

1° La méthode des mélanges;

2° Les méthodes calorimétriques à température constante;

3° Les méthodes par fusion de la glace;

4° La méthode par refroidissement.

La première est tout à fait générale et peut s'appliquer dans tous les cas; les deux dernières ont été moins employées, et nous les décrirons : la troisième comme application de la mesure des chaleurs latentes de fusion de la glace, la quatrième comme application de l'étude des lois du rayonnement.

215. — MÉTHODE DES MÉLANGES

Principe de la méthode. — Le principe de la méthode est des plus simples.

Soient p le poids d'un corps, porté à une température t, et p' un poids d'eau à température initiale t'; supposons la température du corps plus élevée que celle de l'eau et mélangeons les deux substances : le corps abandonnera de la chaleur, sa température s'abaissera; l'eau absorbera la chaleur abandonnée, sa température s'élèvera. Si l'on agite le mélange, un équilibre de température s'établira : soit θ la température commune finale.

Il nous suffira d'exprimer que la chaleur perdue par l'un des corps est égale à la chaleur gagnée par l'autre, pour obtenir une relation qui nous permettra de calculer la chaleur spécifique moyenne c du corps entre t et θ. En effet, la chaleur perdue a pour expression $pc(t-\theta)$, la chaleur gagnée $p'(\theta-t')$; on a donc

(1) $$pc(t-\theta)=p'(\theta-t'):$$

c'est l'expérience de Black.

Évaluation des poids. — Revenons sur la détermination des quantités diverses qui figurent dans cette équation.

1° p'. — p' représente le poids de l'eau qui s'échauffe; mais cette eau est nécessairement contenue dans un vase qu'on appelle le *calorimètre;* il est formé en général d'un vase cylindrique mince en métal, le plus souvent en laiton; et, si la température initiale de ce vase est t', sa température s'élèvera avec celle de l'eau qu'il contient et sera finalement θ; il participe donc à l'expérience calorimétrique et absorbe de la chaleur.

De même pour l'agitateur plongé dans l'eau du calorimètre, de même aussi pour le mercure et le verre qui forment le thermomètre destiné à la mesure de la variation de température $\theta-t'$.

Soient $p'_1, p'_2, p'_3, \ldots, c'_1, c'_2, c'_3, \ldots$ les poids et les chaleurs spécifiques respectifs de ces différentes substances; l'expression exacte de la chaleur dégagée sera

$$(p'+p'_1c'_1+p'_2c'_2+p'_3c'_3+\ldots)(\theta-t').$$

L'une quelconque des expressions, par exemple $p'_1c'_1$, représente un

... quivalent, au point de vue calorimétrique, à la substance ... appelle le poids *réduit en eau* de la substance.

... onsidérations analogues sont à présenter pour le ... : s'il est liquide, il est enfermé dans une enve- ... que soit d'ailleurs son état physique, le corps ... dans un panier en laiton. Ces enveloppes, ces ... au refroidissement, et apportent, tout aussi bien ... de la chaleur.

... c_1, c_2, ... leurs poids et leurs chaleurs spéci- ... tale de chaleur abandonnée aura pour expression

$$(\ldots - p_1 c_1 - p_2 c_2 + \ldots)(t - \theta).$$

... la détermination de l'inconnue c nécessite la con- ... eurs spécifiques c_1, c_2, ..., c'_1, c'_2, ... qui entrent ... corrigée. On pourra ou bien prendre leurs valeurs ... ces chaleurs spécifiques ont été déterminées dans ... inspirant une confiance suffisante, ou bien faire des ... es ayant pour but la détermination de ces coeffi- ... du mercure, et des échantillons de laiton, de ... à ceux qui entrent dans la construction du ... thermomètres et des agitateurs; on aura ainsi autant ... connues et l'on pourra résoudre ce système.

... déterminer directement la capacité calorifique du ... accessoires, et la capacité calorifique de l'enve- ... expériences, dans lesquelles le corps chaud est ... férente dans les deux cas. En écrivant les équa- ..., on a deux équations qui ne renferment comme ... quantités cherchées :

$$\Sigma \ldots (\theta - t) = (P - \pi\lambda)(T - \theta),$$
$$\Sigma \ldots (\theta' - t') = (P' - \pi\lambda)(T' - \theta').$$

... des **températures ; pertes par rayonnement :** ... θ et ... température finale du calorimètre, $\theta - t'$ sa varia- ... en supposant que cet appareil n'ait été le siège ... chaleur avec ce qui le touche ou l'environne: or ... ont pas réalisables. Le calorimètre perd ou gagne ... supports, et par rayonnement.

... perte par les supports négligeable: il suffit pour ... le calorimètre sur les pointes de trois cônes de

liège, ou sur deux fils de soie croisés, c'est-à-dire de réduire le nombre des points de contact et d'employer comme support une substance conduisant mal la chaleur.

Quant à la perte par rayonnement, on peut se proposer ou de la rendre négligeable ou de la calculer exactement.

Pour la rendre négligeable, on emploie des calorimètres soigneusement polis que l'on soutient dans des enceintes métalliques cylindriques, de diamètre un peu plus grand, polies sur leur face interne; ce sont là en effet les conditions les plus favorables pour que les pertes par rayonnement soient les plus faibles.

On peut aussi augmenter le poids p' de l'eau et opérer avec un calorimètre dont la température initiale t' soit voisine de la température de l'air ambiant τ. Dans ces conditions la variation de la température $\theta - t'$ sera sensiblement diminuée; θ n'étant que fort peu supérieur à τ, la perte de chaleur par rayonnement sera négligeable, puisque l'expérience montre que cette perte est proportionnelle à l'excès moyen de température pendant l'opération. Mais on voit qu'il faudra alors employer des thermomètres très sensibles pour apprécier la variation $\theta - t'$; on fait usage dans ce but de thermomètres sur lesquels le degré est divisé en 50 parties égales et qui permettent par suite d'évaluer $\frac{1}{100}$ ou même $\frac{1}{200}$ de degré.

La perte par rayonnement étant d'autre part proportionnelle au temps que dure l'expérience, cette correction sera d'autant plus négligeable que l'expérience aura été de plus courte durée.

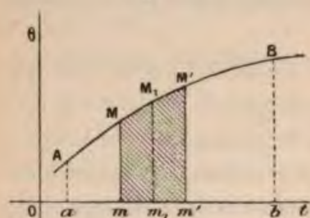
Méthode de Rumford. — Rumford a proposé des conditions expérimentales dans lesquelles il croyait que la correction pourrait être négligée. Il détermine dans une expérience préliminaire et approximative la valeur de la variation de température $\theta - t' = a$ du calorimètre. Dans l'expérience définitive, la température initiale de l'eau du calorimètre t' est prise égale à $\tau - \frac{a}{2}$, τ étant la température de l'air au moment de l'expérience; il résulte de là que la température finale θ est sensiblement égale à $\tau + \frac{a}{2}$, l'expérience se divise donc en deux phases : dans la première, la température du calorimètre étant inférieure à la température de l'air, il reçoit de la chaleur; dans la seconde au contraire, sa température étant plus élevée que celle de l'air, il perd de la chaleur. Rumford admet que le gain est égal à la perte et que la compensation est suffisamment complète pour qu'il n'y ait pas lieu de faire de correction à θ.

On peut représenter graphiquement, d'une manière simple, la correction proposée par Rumford.

Remarquons d'abord que *toute quantité de chaleur perdue par rayonnement peut se représenter par l'aire d'un contour curviligne.*

En effet, l'étude expérimentale du rayonnement fait voir que *les quantités de chaleur perdues sont proportionnelles au temps et à l'excès moyen, pendant ce temps, de la température du corps rayonnant sur la température ambiante.*

Fig. 203.



Si donc nous construisons expérimentalement la courbe ayant pour abscisses les temps t et pour ordonnées les excès de température θ du corps rayonnant sur la température ambiante (*fig.* 203), nous aurons une courbe AB.

Pendant un intervalle de temps très petit, $mm' = dt$, l'excès moyen de température est $M_1 m_1$, et, en vertu de la loi du rayonnement, la quantité de chaleur dQ, perdue par rayonnement pendant ce temps, sera

$$dQ = K \times M_1 m_1 \times dt,$$
$$dQ = k \,.\, M_1 m_1 \,.\, mm'$$

ou

$$dQ = K \times \text{surface } M m m' M' = K . dS,$$

dS étant l'élément de surface ombré sur la figure.

On voit donc que, pendant un intervalle de temps *fini*, ab, la quantité totale de chaleur perdue par rayonnement sera

$$Q = \Sigma\, dQ,$$
$$Q = K \times \Sigma\, dS$$

on enfin

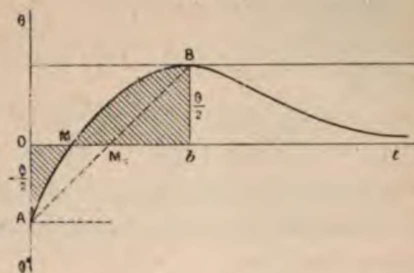
$$Q = K . \text{surface } A ab B.$$

Appliquons ce résultat à la méthode de Rumford.

Une expérience préalable ayant montré que l'excès final serait θ, on refroidit d'abord le calorimètre de $\frac{\theta}{2}$ degrés au-dessous de la température ambiante : les excès étant portés en ordonnées (*fig.* 204) nous aurons donc une ordonnée négative OA; à la fin de l'expérience, l'excès est positif et égal à $+\frac{\theta}{2}$: le point de la courbe correspondant est le point B.

La courbe des variations de température du calorimètre est AMB, et, pour évaluer l'aire qui servira à faire la correction, on remarquera que cette aire, ombrée sur la figure, se compose de deux parties : la première AOM, qui est *négative*, la seconde MBb, qui est *positive*. Elles se retranchent donc l'une et l'autre.

Fig. 204.



Pour que la méthode de Rumford fût rigoureuse, il faudrait que ces aires fussent égales : or l'expérience montre que jamais la courbe AMB n'est confondue avec la droite AM_1B_1, ce qui réaliserait la condition posée. Il subsiste donc une erreur, égale à la *différence* des deux aires en question.

Si l'élévation totale θ est petite et que la durée de l'expérience soit courte, la courbe AMB ne diffère pas sensiblement de la droite AM_1B_1 et l'erreur résultant est à peu près nulle : il est donc toujours utile d'appliquer la méthode de Rumford.

Méthode de calcul. — Si l'on veut calculer exactement la correction à faire subir à la température θ et par conséquent à la variation $\theta - t'$ observée, voici comment on peut procéder :

Divisons l'expérience en trois parties : au temps o, la température de l'eau du calorimètre sera supposée égale à t' et plus petite que τ, température de l'air; au bout du temps x_1 la température du calorimètre deviendra égale à τ. On notera en second lieu le nouvel intervalle de temps x_2 qui s'écoulera jusqu'à ce que le thermomètre passe par le maximum θ, et enfin, dans une dernière période, on observera le temps z employé par le thermomètre à passer de θ à θ', cette dernière température étant plus petite que θ, mais restant plus grande que τ.

Les lois du rayonnement nous montreront que les variations du thermomètre sont proportionnelles au temps et à l'excès moyen de température pendant ce temps; nous pouvons donc calculer ces variations; en représentant par k un coefficient constant, par x un temps, et par t_1 l'excès moyen, elles sont de la forme

$$\delta t = k x t_1.$$

Pour les trois parties de l'expérience calorimétrique, nous les avons

calculées dans le Tableau suivant :

Expérience.	Temps.	Excès initial.	Excès final.	Excès moyen.	Correction.
1re partie......	x_1	$\tau - t'$	o	$\frac{\tau - t'}{2}$	$-kx_1\frac{\tau - t'}{2}$
2e »	x_2	o	$\theta - \tau$	$\frac{\theta - \tau}{2}$	$+kx_2\frac{\theta - \tau}{2}$
3e »	z	$\theta - t$	$\theta' - \tau$	$\frac{\theta + \theta'}{2} - \tau$	$+kz\left(\frac{\theta + \theta'}{2} - \tau\right)$

A θ doit donc être ajoutée une quantité $\Delta\theta$ donnée par la somme des corrections correspondant aux deux premières parties de l'expérience; on a ainsi

$$\Delta\theta = k\left(x_1\frac{t' - \tau}{2} + x_2\frac{\theta - \tau}{2}\right).$$

La troisième partie de l'expérience sert à calculer le coefficient k; l'expérience donne, en effet, directement la variation $\theta - \theta'$ du thermomètre que la loi du rayonnement permet de calculer; on a donc :

$$\theta - \theta' = kz\left(\frac{\theta + \theta'}{2} - \tau\right)$$

et, en définitive,

$$\Delta\theta = \frac{\theta - \theta'}{z\left(\frac{\theta - \theta'}{2} - \tau\right)}\left(x_1\frac{t' - \tau}{2} + x_2\frac{\theta - \tau}{2}\right).$$

Or, l'hypothèse de Rumford consiste à supposer que

$$\tau - t' = \theta - \tau,$$

et l'on voit que, dans cette hypothèse, $\Delta\theta$ ne s'annule que si l'on a en même temps

$$x_1 = x_2.$$

Or, cette équation de condition ne peut être satisfaite en même temps que la première; x_1 est toujours beaucoup plus petit que x_2, la variation de température étant toujours plus rapide au début et plus lente quand la température s'approche du maximum θ. La correction de Rumford n'est donc qu'approximative; malgré cela, elle sera suffisante dans bien des cas.

Température initiale du corps : 4° t. — Il ne nous reste plus qu'à donner des indications sur la détermination de la température initiale t du corps soumis à l'expérience. Cette détermination présente

une incertitude qu'il est impossible de faire complètement disparaître; il est facile de comprendre en effet que, quel que soit le procédé employé pour chauffer le corps soumis à l'expérience et quelque bien déterminée que soit sa température à ce moment, il faudra toujours porter le corps de cette première enceinte dans le calorimètre, et il est impossible d'admettre que ce transport puisse s'effectuer sans une certaine perte de chaleur.

On doit donc chercher les dispositifs expérimentaux les plus propres à atténuer cette perte; ceux dans lesquels la distance à parcourir entre l'appareil de chauffage et le calorimètre sera la plus courte, et dans lesquels cette distance pourra être parcourue dans le moins de temps possible, seront les meilleurs.

Méthode de Dulong et Petit. — Dulong et Petit employaient, pour connaître la température du corps, au moment de son immersion dans le calorimètre, des bains d'eau ou de mercure bouillant dont la température d'ébullition était connue, ou des bains d'huile dont la température était mesurée au thermomètre à air; les métaux sur lesquels ils opéraient étaient en forme d'anneau plat pour en augmenter la surface, et l'on déterminait dans des expériences préalables les poids de liquide entraînés par ces anneaux de façon à tenir compte de la chaleur amenée au calorimètre par cette matière.

On voit combien était incertaine cette manière d'opérer.

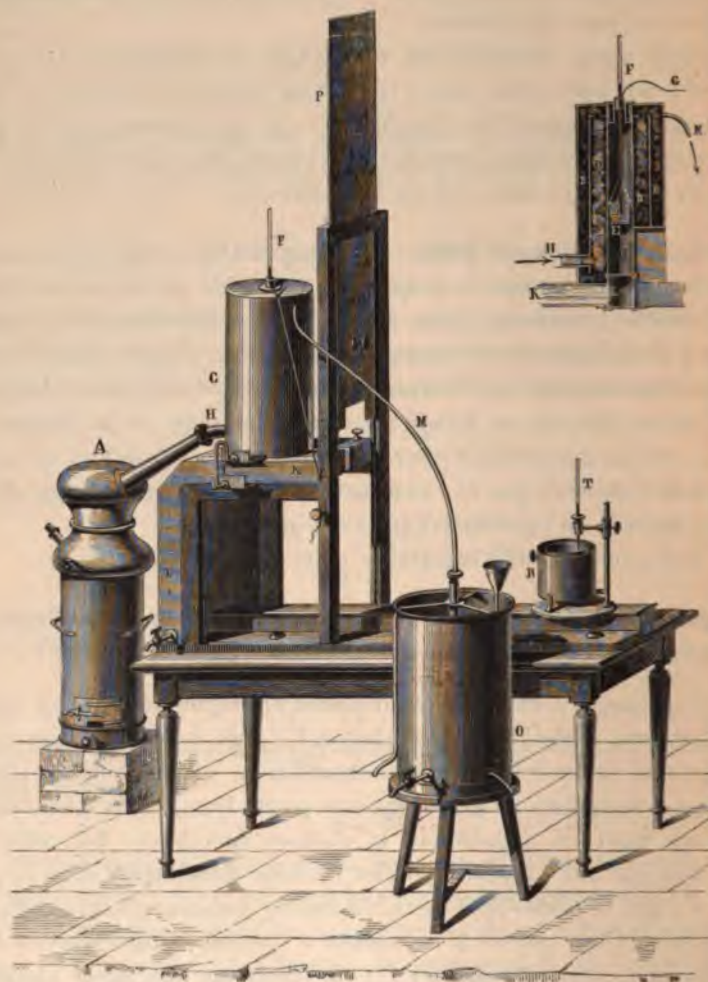
Appareil de Regnault. — Nous empruntons au Mémoire de Regnault la description de son appareil.

« La substance à examiner était placée en fragments plus ou moins gros dans une corbeille en fil de laiton E (*fig.* 205) très mince (on fait séjourner la corbeille, après sa fabrication, dans l'acide azotique) dont le poids ne formait jamais qu'une petite fraction du poids de la substance dont on déterminait la chaleur spécifique. La corbeille porte dans son axe un petit cylindre en toile métallique, dans lequel vient se loger le réservoir d'un thermomètre pendant que la substance est chauffée. Pour porter la substance à la température convenable, on suspend la corbeille par des fils de soie dans une étuve chauffée par la vapeur d'eau.

» Cette étuve se compose de trois enveloppes concentriques en fer-blanc. Dans l'enveloppe du milieu C est suspendue la corbeille avec la substance à échauffer; le réservoir d'un gros thermomètre occupe le vide central de la corbeille. Dans l'espace annulaire B, D,

on fait circuler continuellement un courant de vapeur d'eau qu
fourni par une chaudière A. Cette vapeur, au sortir de l'étuv
rend par le tuyau M dans un serpentin O où elle se condense;
troisième enceinte fait l'office d'un manchon d'air qui préserve

Fig. 205.



veloppe du refroidissement par l'air extérieur. Dans les étuves
l'on construit aujourd'hui, on fait passer le courant de vapeur
cette troisième enceinte comme le montre la figure. Le cylindre i
rieur C est fermé à sa base supérieure par un bouchon de fer-b

traversé par la tige du thermomètre destiné à indiquer la [illegible] à laquelle la substance est arrivée : la base inférieure [illegible] est fermée par un registre creux en fer-blanc.

L'étuve à plusieurs enveloppes est supportée [illegible] 0m,4 du sol par une enveloppe [illegible] K en fer-blanc [illegible] on maintient de l'eau [illegible] renouveler aussi souvent [illegible] afin que le petit vase [illegible] gagner aucune chaleur par [illegible] celui de la chaudière [illegible] est percée d'un trou [illegible] et qui est tenu fermé [illegible] moyen d'un registre L [illegible] de sorte que ces deux registres [illegible] ouvrir ainsi la base [illegible]

[illegible]

[illegible] l'étuve.

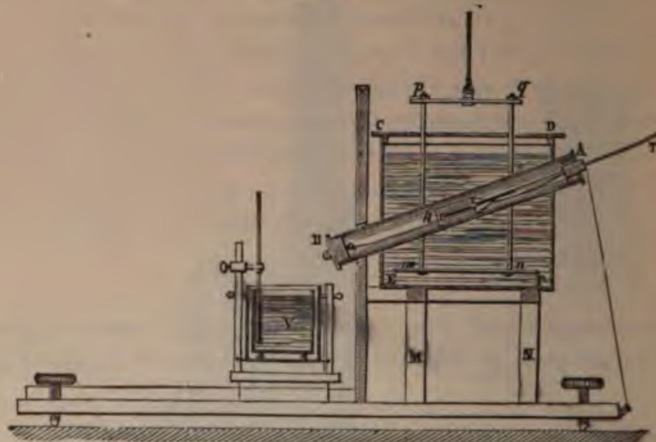
[illegible]

[illegible]

peut se procurer que de faibles quantités, car alors pour un même poids de substance l'élévation de la température est plus forte avec l'essence qu'avec un même poids d'eau.

Autre appareil. — Regnault a fait usage d'un autre appareil; la figure 201 est la reproduction exacte de celle qu'il en a donnée dans

Fig. 206.



son Mémoire; il est formé d'une cuve traversée obliquement par un tube en laiton fermé à ses deux extrémités par des bouchons, et qui joue le rôle d'étuve sèche.

Cet appareil pouvait servir aux températures élevées, et alors on chauffait le bain avec une lampe; mais il a été employé aussi pour les très basses températures, et on le remplissait alors d'un mélange réfrigérant formé de chlorure de calcium et de glace pilée que l'on devait agiter continuellement.

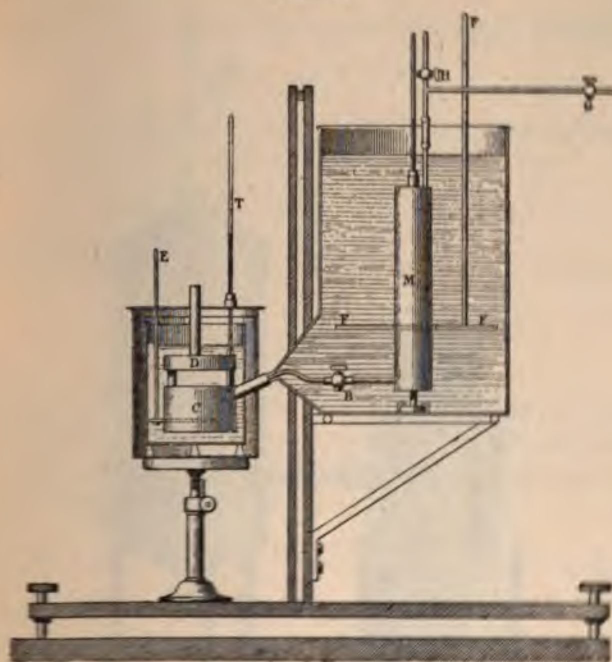
Cas des liquides. — Regnault a imaginé un appareil spécial pour l'étude des chaleurs spécifiques des liquides à différentes températures (*fig.* 207).

Il comprend une cuve en cuivre munie d'un appendice conique; un cylindre M, placé dans l'axe de la cuve, reçoit le liquide sur lequel on opère. Ce cylindre porte une ouverture dans laquelle est logé un thermomètre donnant la température du liquide; une tubulure latérale par laquelle on peut, en ouvrant le robinet G, exercer une pression dans l'intérieur; enfin, une tubulure latérale inférieure par laquelle le liquide peut s'écouler, grâce au jeu du robinet B, dan

caisse C du calorimètre; cette caisse est surmontée d'une boîte ate D, contenant une hélice et destinée à condenser les vapeurs qui ourraient se former.

On peut opérer à des températures comprises entre $-35°$ (en

Fig. 207.



ttant dans la caisse un mélange de glace et de chlorure de *calcium*) a température d'ébullition du liquide d'expérience.

La manipulation de cet appareil se comprend facilement *après la* cription que nous venons d'en donner.

216. — CHALEUR SPÉCIFIQUE DE L'EAU.

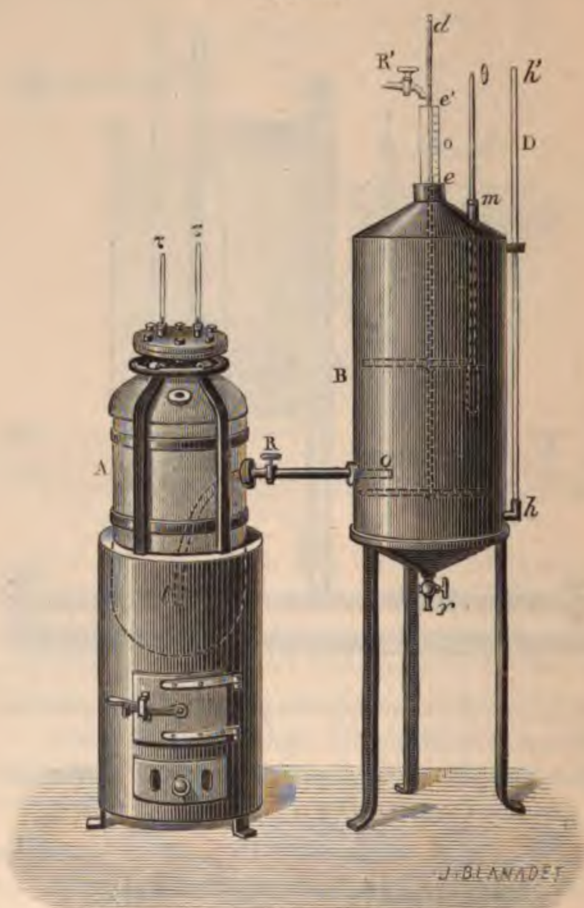
Regnault employa pour cette mesure un appareil spécial. *La paroi* rale d'une forte chaudière A (*fig.* 208) *est percée et l'on y adapte* tube muni d'un robinet. Ce tube est coudé et *descend dans la* udière à $0^m,1$ du fond; il est fermé *à son autre extrémité, mais* té sur sa paroi d'un nombre considérable de petites *ouvertures*; e partie du tube est engagée dans le calorimètre.

Le calorimètre est muni, à sa partie *supérieure, d'un tube divisé*;

il porte un tube latéral D qui permet de connaître, à chaque i
le niveau de l'eau dans son intérieur, il est muni d'un robin
partie inférieure.

Pour faire une expérience, on exerce dans la chaudière un

Fig. 208.



sion connue, correspondant à une température d'ébullition
celle à laquelle on veut chauffer l'eau. On remplit ensuite le
mètre jusqu'au o, à une température connue, et l'on fait écou
poids d'eau que l'on détermine avec soin ; on a jaugé le calor
et l'on connaît son volume à toutes les températures (110[l] env
on sait donc exactement le poids d'eau qui y reste.

On tourne alors le robinet R, et l'eau chaude, chassée par la

n, achève de remplir le calorimètre jusqu'au o. L'observation des ermomètres se fait comme dans une expérience ordinaire. L'opéra- n ne dure pas plus d'une à deux minutes, et, comme l'on opère sur très grandes masses, les causes d'erreur sont considérablement minuées.

egnault put ainsi calculer les coefficients d'une formule

$$Q = T + AT^2 + BT^3$$

ui donne les quantités de chaleur abandonnée par l'unité de poids eau, en passant de M° à zéro; il trouva l'expression

$$Q = T + 0,000\,02\,T^2 + 0,000\,000\,3\,T^3,$$

ui permet de calculer la chaleur spécifique vraie à T degrés,

$$\frac{dQ}{dT} = 1 + 0,00004\,T + 0,0000009\,T^2.$$

D'après les expériences très soignées de Bartoli et Stracciati, la haleur spécifique de l'eau entre 0° et 32°, en prenant pour unité la haleur spécifique à 15°, et comptant les températures dans l'échelle ormale, peut être représentée par la formule

$$C = 1,006880 - 0,000\,556\,t - 0,000006\,t^2 + 0,000001\,015\,t^3 - 0,000\,000\,013\,t^4.$$

Barnes a trouvé, entre + 5° et + 37°,5,

$$C = 0,99733 + 0,0000035\,(37,5 - t)^2 + 0,000\,000\,010\,(37,5 - t)^3.$$

La chaleur spécifique passerait par un minimum à 37°,5. Entre 37°,5 et 55°, la même formule s'applique en prenant positivement les valeurs du troisième terme. Au-dessus de 55°,

$$C = 0,998\,50 + 0,000\,120\,(t - 55) + 0,00\,000\,025\,(t - 55)^2.$$

217. — RÉSULTATS.

1° **Influence de la température.** — La chaleur spécifique des solides et des liquides augmente avec la température; nous venons de voir qu'une formule à trois termes permet de calculer la quantité Q de chaleur nécessaire pour porter de o à T degrés l'unité de poids d'eau; des formules du même genre peuvent être employées pour les liquides; des formules à deux termes suffisent pour les solides.

C'est ainsi que M. Violle a calculé, pour le platine, les coefficients

d'une formule à deux termes

$$Q = 0{,}0317\,t + 0{,}000006\,t^2.$$

L'intérêt de cette formule tient à ce que l'on peut employer une expérience calorimétrique faite avec un cylindre de platine au calcul d'une température; cette formule, étant établie entre zéro et 1400°, permettra de calculer approximativement les températures dans le même intervalle. Cette méthode thermométrique a été particulièrement employée par Weber et plus récemment par M. Pionchon.

Les chaleurs spécifiques du carbone, du bore et du silicium, déterminées par Weber, présentent, sous l'influence d'une élévation de la température, un accroissement des plus rapides; entre 0° et 200°, la chaleur spécifique du carbone serait représentée par la formule

$$\frac{dQ}{dt} = 0{,}0947 + 0{,}000984\,t + 0{,}00000036\,t^2.$$

Le Tableau suivant montre les variations de la chaleur spécifique vraie avec la température :

Température $t°$.	Chaleur spécifique vraie à $t°$.
— 50°	0,0635
0	0,0947
50	0,1435
100	0,1905
200	0,2791
600	0,45
985	0,4589

On voit que, dans un intervalle d'un millier de degrés, elle est devenue environ sept fois plus grande.

2° **Influence de l'état physique.** — La chaleur spécifique d'une même substance est toujours plus grande à l'état liquide qu'à l'état solide; c'est ce que montrent les quelques résultats suivants :

Substances.	Chaleur spécifique sous l'état solide.	liquide.
Eau	0,5	1,00
Brome	0,087	0,107
Phosphore	0,189	0,240
Plomb	0,031	0,040

L'état moléculaire de la substance, pour les solides, peut modifier

otablement la valeur de la chaleur spécifique; ainsi un même échantillon d'un métal écroui, recuit, frappé au balancier, etc., change en énéral de chaleur spécifique; tout accroissement de densité a pour fet de diminuer en général la chaleur spécifique.

Enfin les substances qui se présentent, comme le carbonate de chaux ar exemple, sous plusieurs états, ne possèdent pas sous ces formes ifférentes la même chaleur spécifique.

218. — LOI DE DULONG ET PETIT.

Dulong et Petit énoncèrent en 1819 la loi suivante :

Les atomes de tous les corps simples ont exactement la même capacité pour la chaleur.

Cette loi résultait de l'observation suivante : ayant réuni dans un même Tableau les équivalents chimiques A, les chaleurs spécifiques C d'une douzaine de métaux et deux métalloïdes, le soufre et le tellure, et les produits K de ces deux nombres, ils constatèrent que ces produits étaient constants; la chaleur spécifique de l'eau étant prise pour unité, l'équivalent chimique de l'oxygène étant supposé égal à un, le produit AC varie en effet entre 0,3675 et 0,383, alors que les chaleurs spécifiques varient entre 0,0288 et 0,1180, et les équivalents entre 13,30 et 2,011.

On peut donc dire que *le produit de la chaleur spécifique par l'équivalent en poids est le même pour les corps simples.*

Une hypothèse très simple permet de remonter de cet énoncé au premier; si l'on admet que l'équivalent en poids de chaque corps simple renferme le même nombre d'atomes, le produit AC représente la quantité de chaleur nécessaire pour élever de 1° la température d'un même nombre d'atomes de tous les corps simples, c'est-à-dire ce qu'on peut appeler la *chaleur spécifique atomique*, et cette quantité est constante.

Regnault étendit le nombre des corps simples sur lesquels on pouvait vérifier cette loi; on constate facilement, en se reportant aux Tableaux numériques qu'il donna, qu'il faut prendre, pour que la loi oit satisfaite, les poids atomiques et non pas les équivalents; on voit insi que *le produit de la chaleur spécifique d'un corps à l'état olide par son poids atomique est un nombre constant voisin* e 6,4.

Quelle est l'exactitude que l'on est en droit d'attendre d'une pareille

vérification? Il ne faut pas oublier que la chaleur spécifique des corps varie considérablement avec la température; on ne doit donc pas considérer la loi de Dulong et Petit comme une loi absolue.

219. — LOI DE NEUMANN.

Neumann énonça une loi analogue à la précédente, mais relative aux composés :

Pour tous les composés de même genre et de même formule qui ne diffèrent que par le métal, le produit de la chaleur spécifique par le poids moléculaire reste constant.

Regnault généralisa cette loi, en montrant qu'elle pouvait s'appliquer à un nombre considérable de sels que Neumann n'avait pas étudiés. Ses recherches peuvent se résumer par le Tableau suivant :

Substances.	Formules.	AC.	Formules.	AC.
Oxydes	M'^2O	144	$M''O^2$	86
Sulfures.......	M'^2S	148	$M''S^2$	118
Chlorures	$(MCl)^2$	140	$M''Cl^2$	117
Bromures	$(MBr)^2$	170	$M''Br^2$	121
Iodures.	$(MI)^2$	166	$M''I^2$	121

Sulfates ($SO^4M'^2$)........... 330
Carbonates ($CO^3M'^2$)......... 266

On peut donc, en remarquant que le produit AC prend des valeurs assez voisines pour les composés de formules analogues tels que MO, MS, MCl, ..., généraliser l'énoncé de la loi de Neumann en lui faisant perdre une partie de son exactitude et dire avec Regnault :

Pour les composés de constitution chimique semblable, le produit du poids moléculaire par la chaleur spécifique est le même.

220. — LOI DE WOESTYN.

La quantité de chaleur nécessaire pour élever de 1° la température du poids moléculaire d'un corps composé est égale à la somme des quantités de chaleur nécessaires pour élever de 1° la température des atomes et fractions d'atome composant la molécule.

On sait que pour élever de 1° la température de l'ensemble de plu-

eurs corps il faut une quantité de chaleur égale à la somme de celles
ı'il faudrait pour élever de 1° séparément la température de chacun
eux. La loi de Wœstyn consiste à faire l'hypothèse que ces mêmes
ıbstances réunies en combinaison se comporteront de la même façon;
le se réduit donc à l'énoncé de cette idée que *les corps simples ourraient bien conserver dans les combinaisons la chaleur spéifique qu'ils possèdent à l'état libre.*

De sorte que, si l'on désigne par A, a_1, a_2, a_3, ... et par C, c_1, c_2, c_3, ... les poids atomiques et les chaleurs spécifiques du composé t de ses éléments, par n_1, n_2, n_3, ... les nombres qui expriment les ractions d'atome des éléments qui entrent dans la molécule, de façon que l'on ait

$$A = n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3 + \ldots,$$

la loi que nous venons d'énoncer pourra se formuler

$$(1) \qquad AC = n_1 a_1 c_1 + n_2 a_2 c_2 + n_3 a_3 c_3 + \ldots.$$

La vérification en est frappante pour les alliages; Regnault avait l'ailleurs remarqué que la chaleur spécifique d'un alliage était la noyenne des chaleurs spécifiques des métaux qui entrent dans cet illiage.

Wœstyn vérifia l'exactitude de son hypothèse, et par conséquent ustifia l'énoncé qu'il avait donné en calculant les produits AC par la ormule (1), pour les oxydes, les sulfures, les bromures, les iodures, es sulfates, les carbonates, les nitrates, etc.

L'intérêt qui s'attache à cette forme de loi vient de ce qu'on peut, n admettant la formule (1), l'employer au calcul de la chaleur spécique d'un élément d'un composé si l'on suppose connues les chaleurs pécifiques et les poids atomiques de tous les autres éléments et du omposé. C'est ainsi que Garnier a pu calculer la chaleur spécifique le l'eau des sels hydratés et montrer que l'on devait trouver la chaleur spécifique de l'eau à l'état solide, c'est-à-dire 0,5.



CHAPITRE II.

CHALEUR SPÉCIFIQUE DES GAZ.

221. — DÉFINITIONS.

La chaleur spécifique des gaz peut être définie comme celle des solides et des liquides : c'est le nombre de calories C qu'il faut communiquer à l'unité de poids du gaz pour élever la température de 0° à 1°, en le laissant se dilater librement, c'est-à-dire *à pression constante*. La mesure de cette chaleur spécifique s'est seule jusqu'ici prêtée à des déterminations expérimentales directes.

Mais on peut définir aussi une seconde chaleur spécifique des gaz qu'on a nommée la chaleur spécifique *à volume constant :* c'est la quantité de chaleur c qu'il faut communiquer à l'unité de poids du gaz pour élever sa température de 0° à 1°, en le forçant à conserver le même volume, sa force élastique augmentant.

On a pu d'ailleurs déterminer des relations théoriques qui lient ces deux espèces de chaleurs spécifiques et imaginer des expériences plus ou moins détournées pour les vérifier.

1° Ces chaleurs spécifiques ainsi définies sont dites *rapportées aux poids et à l'eau*. Ce sont les chaleurs spécifiques vraies. Il est utile de connaître diverses autres définitions.

2° On appelle chaleur spécifique d'un gaz *rapportée au poids et à l'air* le rapport $\frac{C}{A}$ de la chaleur spécifique C de ce gaz à la chaleur spécifique A de l'air.

3° On peut définir aussi la chaleur spécifique d'un gaz la quantité de chaleur nécessaire pour élever de 0° à 1° la température de l'unité de volume du gaz. Si d est le poids de l'unité de volume du gaz, a le poids de l'unité de volume de l'air, les chaleurs spécifiques ainsi définies ont pour valeur Cd pour le gaz, Aa pour l'air; elles sont *rapportées au volume et à l'eau*.

4° On peut enfin rapporter les chaleurs spécifiques des gaz *au vo-*

lume et à l'air; c'est-à-dire définir la chaleur spécifique d'un gaz par le rapport $\frac{Cd}{Aa}$. Mais $\frac{d}{a}$, rapport des poids de l'unité de volume du gaz et de l'air, est la densité δ du gaz par rapport à l'air; la chaleur spécifique est donc $\frac{C}{A}\delta$.

On peut déduire toutes ces chaleurs spécifiques les unes des autres; il suffit donc de connaître celles que nous avons définies en premier lieu.

222. — EXPÉRIENCES DE DELAROCHE ET BÉRARD.

Les premières expériences ayant donné des résultats assez exacts furent celles exécutées en 1813 par Delaroche et Bérard en vue de déterminer la chaleur spécifique *sous pression constante*.

Ils employèrent avec le même appareil plusieurs méthodes assez différentes, dont le principe cependant se trouve toujours dans la méthode des mélanges, et dont la plus connue est désignée sous le nom de *méthode des températures stationnaires*.

Méthode des températures stationnaires. — Elle repose sur le principe suivant : « Si un corps suspendu dans l'air reçoit de la chaleur d'une source constante, il s'échauffera jusqu'à ce que, en raison de l'élévation de sa température sur celle de l'air ambiant, il perdra autant de chaleur qu'il en recevra; à ce point, sa température deviendra stationnaire si celle de l'air ne varie pas. »

L'appareil destiné à réaliser ces conditions théoriques (*fig.* 209) se compose de réservoirs d'où les gaz s'écoulent avec une vitesse constante; le courant gazeux traverse une étuve destinée à en élever à 100° la température. C'est un long tube métallique de 1^m, enveloppé d'un courant de vapeur circulant dans une enceinte annulaire. Le gaz passe enfin dans un serpentin métallique de $1^m,50$, maintenu dans un calorimètre plein d'eau à laquelle il abandonne de la chaleur.

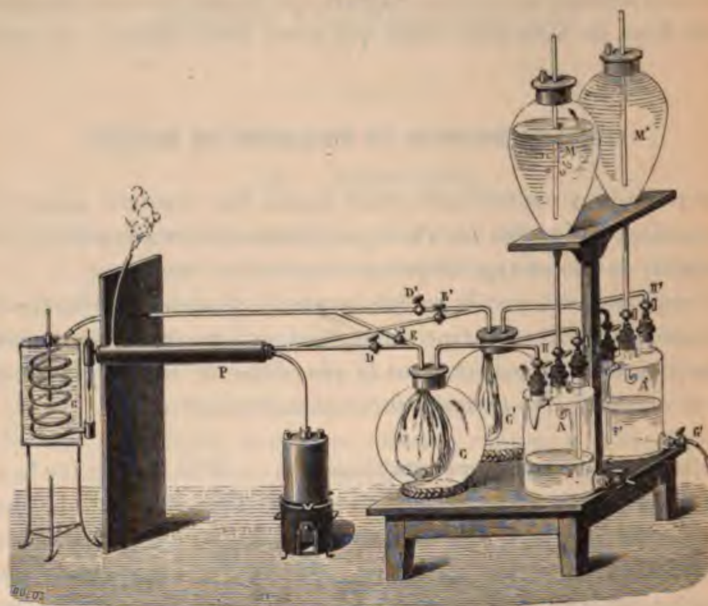
Soient T la température constante du gaz au moment où il pénètre dans le calorimètre, V le volume de gaz de poids spécifique d qui traverse le calorimètre pendant l'unité de temps, θ la température stationnaire de cette partie de l'appareil. La quantité de chaleur abandonnée par le gaz au calorimètre pendant l'unité de temps est $VCd(T-\theta)$.

D'autre part, le tube de jonction amène au calorimètre une certaine quantité de chaleur, et, comme on peut admettre qu'elle est proportionnelle à l'excès constant $100-\theta$ de la température de

l'étuve sur celle du calorimètre, on peut la représenter pour l'unité de temps par une constante K.

D'un autre côté, le calorimètre perd par rayonnement une quantité de chaleur qui est, pour l'unité de temps, d'après la loi de

Fig. 209.



Newton, proportionnelle à l'excès $(\theta - \tau)$ de la température du calorimètre sur celle de l'air ambiant et que l'on peut représenter par $m(\theta - \tau)$.

Écrivons que la quantité de chaleur gagnée est égale à la quantité de chaleur perdue pendant le même temps. Nous exprimerons ainsi que la température du calorimètre est devenue stationnaire; on a donc

$$(1) \qquad VC\,d(T-\theta) + K = m(\theta - \tau).$$

La détermination de tous les éléments qui entrent dans cette formule va nous permettre de faire connaître les détails du dispositif expérimental adopté par Delaroche et Bérard.

1° **Détermination de** V. — L'appareil destiné à la production du courant gazeux sous pression constante permettait en même temps la mesure de V.

Il se composait essentiellement de deux vessies réunies par un tube ...é à leur col; chacune d'elles était contenue dans un grand ballon verre fermé, communiquant avec un grand vase cylindrique por... ...t un robinet à sa base et pouvant recevoir par le haut un courant ...iforme d'eau provenant d'un appareil de Mariotte à écoulement ...nstant. Les choses sont disposées de façon que si, par un jeu con... ...nable de robinets, on fait écouler l'eau de M en A, l'air étant ...assé de A en C viendra y comprimer la vessie pleine de gaz et ...rcer ce gaz à passer dans la seconde vessie qui est vide; le tube de ...nction de ces deux vessies comprend dans son parcours l'étuve ...100° et le calorimètre. La seconde vessie en se gonflant fera passer ...ir du ballon C′ en A′, et chassera de ce réservoir cylindrique de ...au par le robinet inférieur G′; l'arrivée de l'air se faisant en F′ sera ...glée de façon que ce réservoir d'eau fonctionne comme un flacon Mariotte et l'écoulement du gaz sous une pression constante se ...uvera ainsi réglé dans tout l'appareil.

Quand la vessie C′ sera pleine et la vessie C vide, on pourra faire ...courir au gaz le chemin inverse; il suffira de fermer tous les ...binets ouverts et d'ouvrir tous les robinets fermés.

Un dispositif très simple représenté par les deux tubes en croix, ...nis de robinets DE, D′E′, permettra de faire parcourir au gaz le ...be de jonction des deux vessies toujours dans le même sens, en ...versant l'étuve d'abord, le calorimètre ensuite.

Le volume de l'eau écoulé mesurera exactement le volume de gaz (à la pression atmosphérique et à la température de l'eau) qui aura ...versé les appareils en un temps connu; on pourra donc calculer V.

2° **Mesure des températures.** — La température T du gaz au mo... ...ent où il arrivait dans le calorimètre était assez difficile à connaître, ...rce que, d'une part, le gaz ne s'élevait pas toujours jusqu'à la tem... ...rature T_1 de la vapeur en traversant l'étuve, et que, d'autre part, ... traversant le tube de jonction de l'étuve et du calorimètre, qui ...était pas enveloppé de vapeur, il se refroidit certainement. Dela... ...che et Bérard ont placé un thermomètre dans ce tube de jonction; ...ais ils supposaient que ce thermomètre devait indiquer une tempé... ...ture T_2 plus basse que celle du gaz, à cause des parois qui sont ...écessairement à température plus basse, et ils adoptaient comme ...leur de T la moyenne $T = \frac{T_1 + T_2}{2}$.

Un thermomètre placé à la sortie du gaz leur permettait de s'as-

surer que la température du gaz était en ce moment égale à celle du calorimètre θ.

La température ambiante τ était mesurée directement à l'aide d'un thermomètre sensible placé dans le voisinage du calorimètre.

Pour déterminer la température stationnaire θ, on conçoit qu'il eût été trop long d'attendre l'élévation de la température à cette valeur du seul effet du passage du courant de gaz chaud; on l'élevait donc artificiellement à l'aide d'une lampe à alcool jusqu'à une température voisine, mais un peu inférieure; on cessait alors de chauffer, on faisait passer le courant de gaz, et l'on observait la température de 10 minutes en 10 minutes jusqu'à ce que la variation du thermomètre ne fût plus que de $0^\circ,01$ en 10 minutes.

On notait alors cette température θ_1 et l'on chauffait le calorimètre de quelques dixièmes de degré; on suivait ensuite l'abaissement de température de 10 minutes en 10 minutes jusqu'à ce que la température θ_2 ne variât plus que de $0^\circ,01$ en 10 minutes.

La moyenne $\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$ fut prise pour valeur de θ.

Mesure de K. — Pour mesurer K, on fait une expérience à blanc, c'est-à-dire en cessant de faire passer le courant gazeux; la température du calorimètre s'élève alors uniquement par la conductibilité du tube de communication; l'équation se réduit à

$$K = m(\theta - \tau);$$

l'excès $\theta - \tau$ de la température du calorimètre sur celle de l'air ambiant fut trouvé égal à $3^\circ,1$.

Mais Delaroche et Bérard font observer que la valeur de K ainsi calculée serait trop grande; la quantité de chaleur qui passe de l'étuve au calorimètre varie, en effet, dans le même sens que l'excès $(T_1 - \theta)$ de la température de l'étuve sur celle du calorimètre; or, dans les expériences à blanc, θ est notablement plus petit que dans les expériences sur les gaz; l'excès $T_1 - \theta$ s'élève, dans le premier cas, à 90°, et à 72° seulement dans le second; si l'on admet que K varie proportionnellement à cet excès, il faudra, dans l'expérience définitive, adopter pour K l'expression

$$K = 2^\circ,5\, m.$$

L'équation (1) s'écrira donc

$$\text{(2)} \qquad VC\, d(T - \theta) = m(\theta - 2^\circ,5 - \tau).$$

Mesure du rapport des chaleurs spécifiques de deux gaz. — On peut alors se dispenser de calculer m, et la méthode permet de connaître le rapport des chaleurs spécifiques de deux gaz; supposons, en effet, qu'on recommence la même série d'expériences avec l'air, on sera conduit à une équation analogue

$$V'Aa(T'-\theta') = m(\theta'-2^{\circ},5-\tau'),$$

et le rapport donnera

$$\frac{Cd}{Aa} = \frac{\theta-2^{\circ},5-\tau}{\theta'-2^{\circ},5-\tau'}\,\frac{V'}{V}\,\frac{T'-\theta'}{T-\theta}:$$

c'est la chaleur spécifique rapportée au volume et à l'air.

Mesure de la chaleur spécifique d'un gaz. — Si l'on se propose de mesurer non plus un rapport, mais la chaleur spécifique vraie, il faut connaître m.

Deux méthodes permettent d'y arriver.

L'expérience une fois terminée, on arrête le courant gazeux; laissant toutes les choses en l'état, on abandonne le calorimètre à lui-même; soit M la valeur du calorimètre réduit en eau, et supposons qu'en 1 minute sa température ait baissé de θ à θ_1, τ étant la température moyenne ambiante; écrivons que la quantité de chaleur perdue $M(\theta-\theta_1)$ est due au rayonnement : ce rayonnement est proportionnel au temps et à l'excès moyen de température $\frac{\theta+\theta_1}{2}-\tau$. Le coefficient de proportionnalité est le même coefficient m des expériences précédentes; on a donc

$$M(\theta-\theta_1) = m\left(\frac{\theta+\theta_1}{2}-\tau\right).$$

Cette expérience fait connaître la valeur numérique de m, et l'équation (2) permettra de calculer C.

On peut aussi faire passer dans le calorimètre un lent courant d'eau à température constante qui produise le même effet que le courant de gaz; l'expérience se conduira comme une expérience faite avec le gaz et donnera une équation

$$P(T''-\theta'') = m(\theta''-2^{\circ},5-\tau''),$$

dans laquelle P représente le poids d'eau qui passe dans l'unité de temps; cette équation fera connaître m.

Enfin ces mêmes savants ont employé encore une autre méthode

qui consistait à faire passer un poids déterminé de gaz à température initiale connue dans un calorimètre, et à noter l'élévation de température de cet appareil : c'est la méthode des mélanges proprement dite; mais, comme c'est précisément cette méthode qu'a reprise Regnault, nous n'y insisterons pas.

Résultats. — La conclusion de ces recherches fut que les chaleurs spécifiques des gaz comparées à celle de l'air prise comme unité étaient très différentes si on les rapportait au poids et ne s'écartaient que de quantités assez faibles si on les rapportait au volume.

C'est ce que montre le Tableau suivant :

	En volume.	En poids.
Air	1,000	1,000
H	0,9033	12,3401
CO^2	1,2583	0,8280
O	0,9765	0,8848
Az	1,0000	1,0318
Az^2O	1,3503	0,8878
CO	1,0340	1,0805

223. — EXPÉRIENCES DE REGNAULT.

Regnault critiqua ces expériences en faisant remarquer :

1° Que les gaz sur lesquels on opère ne sont pas secs, mais, au contraire, saturés de vapeur d'eau : il y aurait lieu de faire, à ce sujet, une petite correction ;

2° Que les gaz de la vessie et du ballon qui la contient se mélangent promptement par endosmose, et que, par conséquent, la pureté des gaz sur lesquels on opère est rapidement altérée et dans des proportions qui dépendent de la nature du gaz et de la vitesse propre avec laquelle il traverse les membranes humides ;

3° Que la température T du gaz est mal connue et résulte d'une évaluation très arbitraire ;

4° Enfin que, l'eau du calorimètre n'étant pas agitée dans les expériences de Delaroche et Bérard, le thermomètre pouvait indiquer une température notablement différente de la température moyenne de l'eau.

Regnault adopta alors une méthode analogue à celle employée par Delaroche et Bérard, en cherchant à éviter ou à corriger les causes d'erreur qu'il y avait signalées.

Appareil. — L'appareil de Regnault comprend trois parties principales :

1° Celle par laquelle on obtient un courant gazeux d'une vitesse constante et pouvant être réglé à volonté;

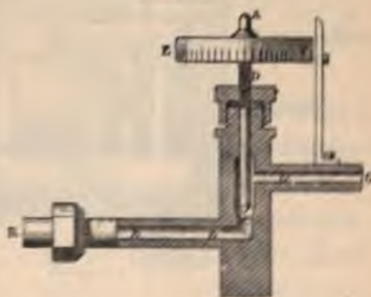
2° Le bain qui donne au gaz une température initiale bien connue;

3° Le calorimètre.

1° Courant gazeux. — Dans un vaste cylindre en cuivre de 35^{lit}, maintenu dans un bain d'eau à température constante, on comprime le gaz par l'intermédiaire d'un ajutage placé à la partie supérieure. La pompe de compression est mue par une machine à vapeur; le réservoir communique avec un manomètre à air libre qui permet d'apprécier très exactement la pression. Une tubulure latérale munie d'un robinet R met le vase en communication avec les serpentins de l'appareil des chaleurs spécifiques.

Pour donner une vitesse parfaitement constante au dégagement gazeux, on emploie un robinet à vis régulatrice. Ce petit appareil (*fig.* 210) a été fréquemment employé depuis sous le nom de *robinet à pointeau*.

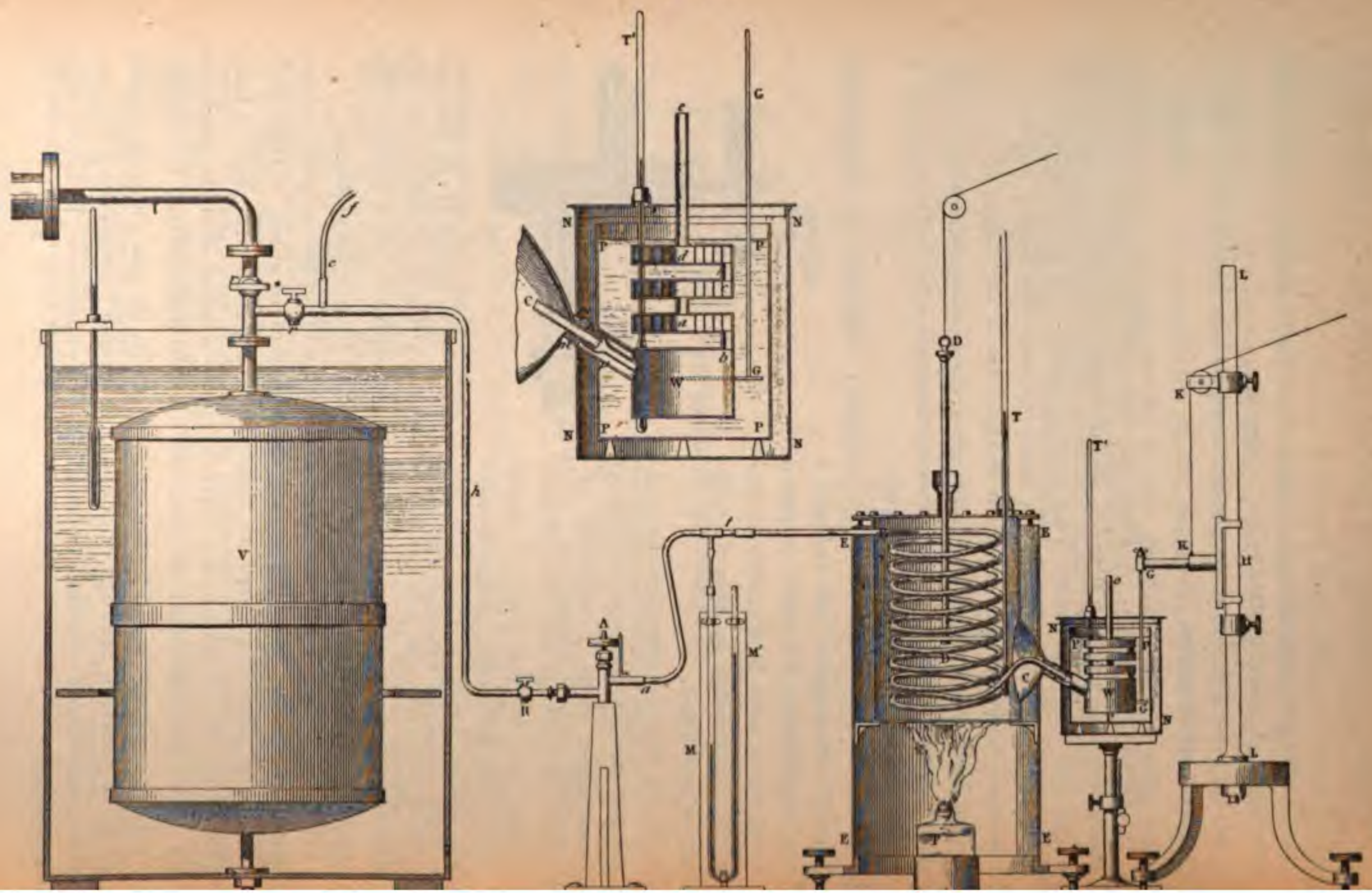
Fig. 210.



La vis micrométrique est terminée par un cône qui peut s'emboiter exactement dans l'ouverture conique du tube qu'elle doit fermer. Quand on remonte plus ou moins la vis, on débouche graduellement l'ouverture; le gaz s'échappe alors par le tube latéral G, et non pas le long de la vis, car elle est assez bien travaillée pour retenir le gaz même sous une pression de plusieurs atmosphères, et d'ailleurs elle traverse à sa partie supérieure une boîte à étoupes hermétique.

Au delà est placé sur une tubulure à trois branches un petit manomètre à air libre MM' (*fig.* 211); immédiatement après, le tube présente une partie en verre de diamètre plus étroit, puis vient le tube plus large du serpentin. Le rétrécissement a pour effet de produire un léger accroissement de pression vers le manomètre, et, comme c'est précisément la différence de la pression du gaz en cette région et de la pression atmosphérique qui provoque l'écoulement du gaz, si cet excès reste constant pendant toute l'expérience, la vitesse sera uniforme.

Fig. 211.



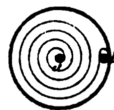
Il suffira donc, pour obtenir ce résultat, de tourner à la main la vis micrométrique, de façon que la différence de niveau au petit manomètre soit constante.

2° Bain. — Dans un vase cylindrique E plein d'huile (*fig.* 211) est plongé un serpentin B en laiton de 10^m de longueur et de 8^{mm} de diamètre dont l'extrémité communique au calorimètre; ce tube est enfermé dans une tubulure conique C qui le protège contre les pertes de chaleur et évite de rendre les deux appareils trop voisins.

Cette chaudière est chauffée directement; un agitateur et un thermomètre servent à régler et à mesurer la température.

3° Calorimètre. — Le gaz est amené dans une caisse cylindrique en laiton mince dans l'intérieur de laquelle est une lame de laiton enroulée en spirale (*fig.* 212); le gaz y arrive par la circonférence en *b* et en sort par le centre *a* pour se rendre dans une caisse identique surmontant la première, mais dans laquelle il entre par le centre et sort par la circonférence. On voit en P, sur la figure 74, quatre de ces boîtes convenablement reliées par des tubulures, de sorte que le gaz circule au contact de leurs parois froides dans des conduits d'assez grande section pour qu'il n'y ait que de faibles résistances. Au sortir de la dernière, le gaz se déverse dans l'atmosphère par une tubulure. Ces boîtes sont soutenues dans le calorimètre, qui contient un poids d'eau connu, à température déterminée. Un agitateur dont le mouvement est réglé par une machine et un thermomètre donnant les $\frac{1}{200}$ de degré complètent cette installation.

Fig. 212.



Ce calorimètre repose sur trois cônes de liège dans un vase en laiton servant de protecteur, et enfin le tout est dans une caisse en sapin; entre ces deux dernières enveloppes est le thermomètre qui donne la température ambiante.

Calcul d'une expérience. — On calcule la chaleur spécifique du gaz par une formule qui n'est autre chose que l'équation générale de la méthode des mélanges; cependant il faut bien remarquer quelle différence existe entre l'application de cette méthode aux solides et aux liquides et l'application qu'on en peut faire aux gaz; les premiers restent dans le calorimètre et participent à ses variations de température; ils sont, à la fin de l'expérience, à la température finale du calorimètre; rien de pareil ne se produit dans le cas des gaz qui, pendant toute l'expérience, traversent le calorimètre sans s'y accu-

muler; s'ils le quittent au début, à la température θ_0 initiale, ils en sortent à la fin à la température θ_n; ils y produisent le même effet que s'ils sortaient à une certaine température moyenne θ.

Soient :

P le poids du gaz qui a traversé l'appareil;
$(T - \theta)$ l'excès moyen de la température du gaz sur celle du calorimètre;
θ_0 et θ_n les températures initiale et finale du calorimètre;
M la valeur du calorimètre en eau;

nous aurons, en désignant par x la chaleur spécifique du gaz rapportée à l'eau,

$$Px(T - \theta) = M(\theta_n - \theta_0), \tag{1}$$

en supposant d'abord qu'il n'y ait pas de correction à faire provenant de la conductibilité ou du rayonnement.

Quelle valeur convient-il de donner à θ?

Supposons que l'expérience dure n minutes, il faut avoir soin de noter de minute en minute la température du calorimètre; soient θ, θ_1, θ_2, ..., θ_n ces différentes valeurs.

Pendant la première minute, le poids du gaz qui a passé est $\frac{P}{n}$, le calorimètre a varié de θ_0 à θ_1, et l'abaissement de température du gaz a été en moyenne $\left(T - \frac{\theta_0 + \theta_1}{2}\right)$. Pour chaque période d'une minute, nous pouvons calculer une quantité analogue à $\frac{\theta_0 + \theta_1}{2} = \theta'_1$ et former ainsi la série des valeurs des moyennes des températures au commencement et à la fin de chaque minute, θ'_1, θ'_2, ..., θ'_n, à l'aide desquelles nous pourrons écrire les équations suivantes :

$$\frac{P}{n}x(T - \theta'_1) = M(\theta_1 - \theta_0),$$
$$\frac{P}{n}x(T - \theta'_2) = M(\theta_2 - \theta_1),$$
....

et enfin

$$\frac{P}{n}x(T - \theta'_n) = M(\theta_n - \theta_{n-1}).$$

Ajoutons: il vient

$$Px\left(T - \frac{\Sigma\theta'_1}{n}\right) = M(\theta_n - \theta_0).$$

Nous voyons, d'après cela, que la valeur de θ de la formule (1) est

$$\theta = \frac{\Sigma \theta'_1}{n}.$$

Corrections aux températures. — Pour calculer les corrections à faire subir aux températures observées, il faut tenir compte, d'une part, de la chaleur perdue par rayonnement, qui est proportionnelle à l'excès de température du calorimètre sur l'air ambiant et au temps, et, d'autre part, de la chaleur amenée au calorimètre par conductibilité et par le mouvement de l'agitateur. L'effet produit par ces deux dernières causes peut être représenté par une constante, parce que l'excès de température du bain sur le calorimètre d'où dépend la première de ces causes perturbatrices est sensiblement constant, et parce que le mouvement de l'agitateur est régulier.

On observe alors la variation de température pendant dix minutes avant l'ouverture du robinet R et, en représentant par $\Delta\theta_0$ le dixième de cette variation, le refroidissement en une minute peut se représenter par

$$\Delta\theta_0 = K + m(\theta'_0 - \tau'_0),$$

θ'_0 et τ'_0 représentant la température moyenne du calorimètre et de l'air pendant ces dix minutes.

Lorsque l'expérience est terminée, après la fermeture de R, on observe de nouveau pendant dix minutes la variation de température du calorimètre dans ces nouvelles conditions; la variation de température en une minute se représentera par

$$\Delta\theta_{n+1} = K + m(\theta'_{n+1} - \tau'_{n+1}).$$

Les valeurs numériques des constantes K et m seront données par ces équations.

On peut alors calculer de minute en minute la variation de température que le calorimètre a dû subir par l'effet des causes perturbatrices; en représentant, comme nous l'avons fait pour les températures moyennes du calorimètre pour chaque minute, les températures moyennes de l'air ambiant par

$$\tau'_1 = \frac{\tau_0 + \tau_1}{2}, \qquad \ldots, \qquad \tau'_n = \frac{\tau_{n-1} + \tau_n}{2},$$

on peut écrire n relations de la forme

$$\Delta\theta_1 = K + m(\theta'_1 - \tau'_1)$$

jusqu'à

$$\Delta\theta_n = \mathrm{K} + m(\theta'_n - \tau'_n);$$

en ajoutant ces variations partielles, on obtient la somme $\Sigma\Delta\theta$, qu
faut retrancher de l'élévation totale de température observée sur le
calorimètre pour obtenir l'effet produit par le courant gazeux seul.

L'équation (1) s'écrit donc

$$\mathrm{P}x\left(\mathrm{T} - \frac{\Sigma\theta'_1}{n}\right) = \mathrm{M}(\theta_n - \theta_0 - \Sigma\Delta\theta).$$

Détermination de P. — Le poids ϖ de l'air qui remplit le réservoir à zéro sous une pression H peut être exprimé par la fonction

$$(1) \qquad \varpi = \mathrm{AH} + \mathrm{BH}^2 + \mathrm{CH}^3.$$

On tiendra compte ainsi des anomalies que la compressibilité du gaz présente par rapport à la loi de Mariotte et des changements de capacité que subit le réservoir par les variations de pression intérieure. On déduit de là

$$(2) \qquad \frac{d\varpi}{d\mathrm{H}} = \mathrm{A} + 2\mathrm{BH} + 3\mathrm{CH}^2,$$

et l'on voit qu'il sera facile de calculer les valeurs numériques des coefficients A, B et C à l'aide de trois expériences.

Supposons le réservoir plein à zéro sous une pression H; adaptons-lui un grand ballon à robinet (celui qui a servi à la détermination de la densité des gaz), dans lequel le vide a été fait préalablement et qui a été pesé dans cet état; remplissons-le à la pression atmosphérique, à peu près, et déterminons de nouveau son poids; l'accroissement de poids représente le poids du gaz sorti du réservoir, on détermine alors la nouvelle pression H', et l'on peut déduire de là le poids $d\varpi$ de gaz qui serait sorti pour une variation de 1^{mm} de pression, que l'on peut représenter par dH.

Les deux autres expériences seront faites pour des valeurs très différentes de H : on obtiendra ainsi trois équations de la forme (2) que l'on pourra résoudre par rapport à A, B, C; on substituera les valeurs de ces coefficients dans l'équation (1).

Si le réservoir, au lieu d'être à 0°, est à la température θ, le poids du gaz qui le remplit sera

$$\frac{\varpi}{1 + \alpha\theta},$$

α étant le coefficient de dilatation de l'air sous la pression H.

Il suffira donc de lire les pressions et températures initiales et finales pour pouvoir calculer le poids P du gaz sorti du réservoir.

224. — RÉSULTATS.

Influence de la température. — Des expériences faites avec l'air à des températures très variées ont conduit Regnault à admettre que *la capacité calorifique de l'air, contrairement à ce qui arrive pour les corps solides et liquides, n'augmente pas avec la température, lorsque celle-ci est mesurée au thermomètre à air.*

On trouve en effet :

Entre	-3° et $+10^{\circ}$	0,23771
»	0 » 100	0,23741
»	0 » 200	0,23751

Ce résultat est important, à cause de la conclusion qu'on en peut tirer, que *le thermomètre à air indique des températures qui sont sensiblement proportionnelles aux quantités de chaleur qu'il absorbe;* mais non pas absolument.

Ce résultat se reproduit avec les gaz dits *permanents*, mais on cesse déjà de le retrouver avec l'acide carbonique; c'est ainsi que Regnault donne comme valeur de la chaleur spécifique moyenne de ce gaz :

Entre	-3° et $+10^{\circ}$	0,18427
»	10 » 100	0,20246
»	10 » 210	0,31692

elle est donc d'autant plus grande qu'on la prend entre les températures plus élevées.

Influence de la pression. — Delaroche et Bérard avaient annoncé que la chaleur spécifique rapportée à l'unité de poids d'un gaz maintenu sous une pression constante, croît avec cette pression. Regnault avait trouvé au contraire que cette chaleur spécifique est indépendante de la pression.

Les mesures de Lussana ont mis en évidence un accroissement notable de la chaleur spécifique avec la pression, entre 4^{atm} et 5^{atm},

$$c_p = a + b(p - 1),$$

le coefficient b est de l'ordre du millième pour la plupart des gaz, de l'ordre du centième pour l'hydrogène.

La chaleur spécifique du gaz carbonique atteint un maximum vers 110^{atm} et décroît ensuite.

225. — APPLICATION DE LA LOI DE DULONG ET PETIT AUX GAZ.

1° **Gaz simples.** — Le Tableau suivant résume les recherches de Regnault sur la chaleur spécifique des gaz simples :

Nom des substances.	Chaleur spécifique en poids.	Chaleur spécifique en volume.
Air	0,23741	0,23741
Oxygène	0,21751	0,24049
Azote	0,24380	0,23680
Hydrogène	3,40900	0,23590
Chlore	0,12099	0,29645
Brome	0,05522	0,30400

Les gaz permanents ont sensiblement la même chaleur spécifique sous des volumes égaux : elle semble cependant augmenter légèrement avec la densité. La chaleur spécifique, rapportée au volume, du chlore et du brome est nettement différente de celle des gaz permanents; il est donc impossible d'admettre que la capacité calorifique de tous les gaz simples soit la même pour des volumes égaux et sous la même pression; cette loi doit s'appliquer aux gaz permanents seulement.

Or ceci revient à dire que les chaleurs spécifiques rapportées à un même poids sont en raison inverse des densités ou, par suite, des poids atomiques; cette loi limite, qui ne s'applique plus dès que le gaz s'écarte sensiblement de la loi de Mariotte, n'est donc autre chose que la loi de Dulong et Petit appliquée aux gaz; et nous pourrons conclure des expériences de Regnault que le produit AC n'est pas constant, sauf pour les gaz permanents.

2° **Gaz composés.** — L'étude des gaz composés conduit à des lois analogues et qui ne sont qu'approchées.

Si les gaz sont composés à volumes égaux sans condensation, ils ont la même chaleur spécifique à volumes égaux, quand ils satisfont à peu près à la loi de Mariotte. De plus, *la chaleur spécifique du composé est la même que celle des gaz simples.*

C'est ce qui résulte du Tableau suivant, extrait des travaux de Regnault :

Substances.	Chaleur spécifique en poids.	Chaleur spécifique en volume.
AzO	0,2317	0,2406
CO	0,2450	0,2370
HCl	0,1852	0,2333

Ainsi, d'après cela, la loi de Dulong et Petit est applicable à ce genre de composés.

Si les gaz composés résultent de la combinaison d'un volume d'un gaz et de deux volumes de l'autre gaz, les trois volumes s'étant condensés en deux, *la chaleur spécifique de ces corps est, sous le même volume, à peu près constante.*

Les nombres suivants, donnés par Regnault, montrent que cette loi est encore moins exacte que les précédentes :

Substances.	Chaleur spécifique en poids.	Chaleur spécifique en volume.
CO^2	0,2169	0,3307
Az^2O	0,2262	0,3447
H^2O	0,4305	0,2989
SO^2	0,1544	0,3414
H^2S	0,2432	0,2857
CS^2	0,1560	0,4122

De plus, la chaleur spécifique a changé de valeur.



THERMODYNAMIQUE.

CHAPITRE I.

PRÉLIMINAIRES.

226. — CHOIX DES VARIABLES. — TRANSFORMATIONS ISOTHERMES. TRANSFORMATIONS ADIABATIQUES.

ous avons jusqu'à présent cherché à étudier la forme d'une tion

$$f(v,p,t) = 0$$

pour un corps donné, relie le volume et la pression à la tempére; nous avons fait ainsi l'étude de la chaleur au point de vue *mométrique*. Nous avons vu ensuite qu'il était nécessaire de comer cette étude par des mesures *calorimétriques*, et nous avons is à mesurer la chaleur spécifique C en supposant la pression tante.

enons, par exemple, comme variables la pression et la tempére. Échauffons le corps d'abord en maintenant sa pression conte : pour augmenter de 1° la température de l'unité de poids de orps, il faudra lui fournir une quantité de chaleur C, C étant *la eur spécifique sous pression constante* du corps considéré. st une fonction de la température, et ne peut être considéré me constante que dans un intervalle très restreint. Probablement e, C est-elle aussi fonction de la pression.

ur élever de dt la température de l'unité de poids de ce corps aintenant sa pression constante, il faudra donc lui fournir une tité de chaleur $C\,dt$.

Si maintenant nous faisons varier à la fois la température et la pression, il faudra ajouter à la quantité de chaleur $C dt$ une quantité de chaleur proportionnelle à l'accroissement de pression dp; soit $h dp$ cette nouvelle quantité de chaleur : la quantité de chaleur dQ qu'il faudra fournir au corps pour lui communiquer à la fois un accroissement de température dt et un accroissement de pression dp sera la somme de ces deux termes, et s'exprimera, par conséquent, par la relation

$$dQ = C dt + h dp. \tag{1}$$

Le coefficient h n'est pas nul : les expériences sur la compressibilité des liquides montrent que, quand on comprime un liquide sans lui fournir ni lui retirer de chaleur, la compression est toujours accompagnée d'une variation de la température; h est donc positif ou négatif, mais essentiellement différent de zéro. Nous appellerons ce coefficient la *chaleur de compression*, car, si nous supposons que la compression se fasse à *température constante*, il suffit de faire dans l'équation (1) $dt = 0$; il reste alors

$$h = \frac{dQ}{dp}.$$

h sera donc la quantité de chaleur manifestée par la compression de l'unité de poids du corps considéré, lorsque la variation de pression sera égale à l'unité.

Si nous faisons la compression *à chaleur constante*, c'est-à-dire sans fournir ni emprunter de la chaleur au corps, nous n'aurons qu'à faire dans l'équation (1) $dQ = 0$; il vient alors

$$h = -C \frac{dt}{dp};$$

h dépend donc de la température et de la pression, de même que C.

En général, pour faire passer un corps d'un état où sa température est t_1 et sa pression p_1 à un état où sa température est t_2 et sa pression p_2, il faut lui fournir une quantité de chaleur $Q_2 - Q_1$, que l'on connaîtra par une intégration. Il faudra pour cela connaître la forme des fonctions C et h, ou du moins avoir, pour exprimer C et h en fonction de p et de t, des relations empiriques dont les coefficients auront été déterminés par l'expérience.

Nous pourrions aussi bien prendre comme variables la température

et le volume. On aurait alors, pour expression de dQ,

(2) $$dQ = c\,dt + l\,dv,$$

c désignant la *chaleur spécifique à volume constant* et l étant un coefficient numérique, qui est la *chaleur de dilatation*. Pour avoir sa signification exacte, il suffit de faire dans l'équation (2) $dt = 0$: il reste

$$l = \frac{dQ}{dv}.$$

l sera donc la quantité de chaleur qu'il faut fournir à l'unité de poids du corps pour faire varier son volume d'une unité.

Nous pourrions, enfin, prendre comme variables le volume et la pression : nous aurions alors pour expression de la quantité de chaleur dQ

(3) $$dQ = K\,dp + \lambda\,dv.$$

Il importe essentiellement, au début de cette étude, de faire une distinction capitale.

Nous venons de voir que l'on peut de deux façons différentes faire varier l'état d'un corps, lorsque celui-ci dépend, par exemple, de la température et de la pression.

On peut d'abord maintenir par un moyen quelconque la température du corps constante pendant la durée de l'expérience; on dit alors que la transformation est *isotherme*.

Mais on peut faire subir au corps considéré une transformation non plus à température constante, mais *à chaleur constante*. Il suffit pour cela de maintenir le corps soumis à l'expérience dans une enceinte imperméable à la chaleur; le corps dans ce cas ne s'échauffe que sous l'influence des modifications qu'on lui fait subir, sous l'influence de la pression par exemple. Une semblable transformation a reçu le nom de *transformation adiabatique*.

227. — RELATIONS ENTRE LES COEFFICIENTS C, c, h et l.

Les équations (1) et (2) nous fournissent des relations utiles entre les quantités C, c, h et l.

Nous avons, en effet, obtenu également ces deux expressions de dQ

(4) $$C\,dt + h\,dp = c\,dt + l\,dv.$$

Pour ne garder que les deux variables v et t, nous allons faire, dans le premier membre, un changement de variables. Posons donc

$$dp = \frac{dp}{dt}\,dt + \frac{dp}{dv}\,dv\,;$$

en remplaçant dans l'équation (4) dp par cette valeur, nous aurons

$$C\,dt + h\left(\frac{dp}{dt}\,dt + \frac{dp}{dv}\,dv\right) = c\,dt + l\,dv,$$

$$\left(C + h\,\frac{dp}{dt}\right)dt + \left(h\,\frac{dp}{dv}\right)dv = c\,dt + l\,dv.$$

Identifions les coefficients des mêmes variables dans les deux membres, il vient

$$(5)\qquad \begin{cases} c = C + h\,\dfrac{dp}{dt}, \\ h = l\,\dfrac{dv}{dp}. \end{cases}$$

$\frac{dp}{dt}$ est la variation de pression qui accompagne une variation de température à volume constant : $\frac{1}{p}\frac{dp}{dt}$ est le coefficient de dilatation du corps à volume constant. Quant à $\frac{dv}{dp}$, c'est la variation de volume qui accompagne une variation de pression à température constante : $\frac{1}{v}\frac{dv}{dt}$ est le *coefficient de compressibilité* du corps.

On trouverait de même des relations analogues entre les divers autres coefficients.

228. — THÉORÈME DE REECH.

Cherchons à calculer la chaleur spécifique c à volume constant. Nous tirons de la première équation (5)

$$(6)\qquad c = C + h\left(\frac{dp}{dt}\right)_{\text{à volume constant}}.$$

Nous avons, d'autre part, en prenant comme variables t et p,

$$dQ = C\,dt + h\,dp.$$

Supposons que la compression se fasse à chaleur constante, c'est-à-dire adiabatiquement, nous avons alors

$$dQ = 0,$$

d'où il résulte

(7) $$h = - \mathrm{C} \left(\frac{dt}{dp}\right)_{\text{à chaleur constante}}.$$

Remplaçons, dans l'équation (6), h par cette valeur, il vient

$$\mathrm{C} - c = \mathrm{C} \frac{\left(\frac{dp}{dt}\right)_{\text{à volume constant}}}{\left(\frac{dp}{dt}\right)_{\text{à chaleur constante}}}.$$

Les symboles dp, dv, dt représentent des accroissements infiniment petits; dans la pratique, il est impossible de donner à des grandeurs physiques des accroissements infinitésimaux : pour que ces accroissements soient accessibles à l'expérience, il faut nécessairement qu'ils soient finis; désignons-les dans ce cas par les symboles Δp, Δv, Δt. Imaginons de plus que pour les deux expériences de compression on s'arrange de façon que les accroissements Δt de température soient égaux. Nous pourrons alors supprimer haut et bas le facteur $\frac{1}{\Delta t}$ qui est fini, et il reste la relation

(8) $$\frac{\mathrm{C} - c}{\mathrm{C}} = \frac{(\Delta_1 p)_{\text{à volume constant}}}{(\Delta_2 p)_{\text{à chaleur constante}}}.$$

Tel est le théorème de Reech. Il a ceci de remarquable, que sa démonstration ne suppose rien de particulier sur la nature du corps soumis à la transformation. Le théorème est donc démontré aussi bien dans le cas des solides et des liquides que dans le cas des gaz.

229. — APPLICATION. — MESURE DE $\frac{\mathrm{C}}{c}$. — EXPÉRIENCE DE CLÉMENT ET DESORMES.

Il résulte de là que, pour connaître le rapport $\frac{\mathrm{C} - c}{\mathrm{C}}$ ou $1 - \frac{c}{\mathrm{C}}$, d'où nous déduirons le rapport des deux chaleurs spécifiques c et C, il suffira de faire deux expériences de compression, l'une adiabatiquement, l'autre à volume constant, de façon que les accroissements de température soient égaux dans les deux cas, et de mesurer chaque fois l'accroissement de pression correspondant. Le rapport de ces deux accroissements de pression donnera la valeur

du quotient $\frac{C-c}{C}$. Les gaz se prêtent seuls à ce genre d'ex
riences.

Cette double mesure est réalisée dans l'expérience class
faite au commencement du siècle par Clément et son beau-p
Desormes, sur les conseils de Laplace, pour déterminer le rapp
des deux chaleurs spécifiques dans le cas de l'air.

Leur appareil, représenté par la figure 213, se compose d

Fig. 213.



grand ballon A surmonté d'un tube de cuivre fermé par un r
net B à large poignée de bois; à une tubulure latérale de la m
ture de cuivre est fixé un tube manométrique droit aa' dont l'ex
mité inférieure ouverte plonge dans une cuvette pleine d'a
sulfurique. Au bout du tube latéral est un robinet C : qu
on ouvre ce robinet, on peut, par aspiration, raréfier un peu
dans le ballon; la diminution de pression est mesurée par l'as
sion du liquide dans le tube vertical.

Pour faire une expérience, on ferme le robinet B, on ouvre
l'on aspire un peu d'air, de façon à diminuer la force élastique à
térieur du ballon A : l'acide sulfurique monte jusqu'à un ce
niveau a'. On referme le robinet C et l'on note ce niveau a', qu
dique une différence de pression égale à $\Delta_2 p$. Cela fait, on o

brusquement pendant un temps très court, et l'on referme aussitôt le robinet B. L'air rentre dans le ballon de façon à rétablir dans son intérieur la pression atmosphérique : mais il y rentre brusquement et produit une compression analogue à celle que produirait un piston vivement abaissé. De cette façon, l'air comprimé s'échauffe, et, cet échauffement étant instantané, la compression est adiabatique; aucune quantité de chaleur n'est empruntée ou cédée au milieu extérieur. L'abaissement de l'acide sulfurique de a' au niveau de la cuvette indique donc la différence de pression que l'on doit prendre pour $\Delta_2 p$.

L'air, avons-nous dit, s'est échauffé par compression brusque et le niveau est tombé au zéro; mais, si nous abandonnons l'appareil à lui-même, il se remettra en équilibre avec la température ambiante. La variation Δt sera donc la même dans les deux expériences. La force élastique va diminuer et le liquide va remonter dans le tube manométrique, non jusqu'en a', puisqu'il est rentré un peu d'air, mais jusqu'à un niveau inférieur a. Vis-à-vis du volume considérable du ballon (environ 20^1) on peut négliger les quelques centimètres cubes qui représentent le volume de la colonne de liquide a et admettre que la variation de pression se fasse à volume constant : la hauteur du liquide soulevé jusqu'en a mesure donc bien la quantité $\Delta_1 p$ définie au paragraphe précédent. En prenant le rapport de $\Delta_2 p$ à $\Delta_1 p$, on aura la valeur du quotient $\frac{C-c}{C}$, d'où l'on déduira la valeur numérique de $\frac{c}{C}=\gamma$.

La valeur moyenne de ce rapport est $\gamma = 1,40$.

Le rapport $\frac{C}{c}$ une fois connu, on peut en déduire la valeur de c pour les gaz étudiés, puisque C a été déterminé par les expériences de Regnault.

Dans toutes les méthodes employées pour mesurer $\frac{C}{c}$ et dérivées de celle de Clément et Desormes, il faut faire une remarque qui s'applique à celle-là même : la valeur de $\frac{C}{c}$ n'est pas absolument indépendante de H, valeur absolue de la pression. En effet, si dans la formule de Laplace (231, 2°) on remplace le volume V' du gaz comprimé par sa valeur $\frac{VH}{H+h'}$, on a

$$\frac{H}{H+h}=\left(\frac{H}{H+h'}\right)^{\frac{C}{c}},$$

$$\frac{\cdot}{\cdot} = \frac{\log H - \log(H+h)}{\log H - \log(H+h')};$$

...reusement indépendant de H.

... ...rimental de Clément et Desormes n'est pas sus-
... ...nde précision, à cause d'un vice qui tient à sa nature
... ...uvre le robinet B, l'air rentre bien, mais l'équi-
... ...tablit pas instantanément entre l'air intérieur
... ...force élastique éprouve des oscillations, et l'on
... ...quand ...u referme le robinet, si l'on se trouve dans le
... ...un défaut de pression intérieure.
... ...herche à mesurer γ par d'autres méthodes, surtout
... ...basée sur la mesure de la vitesse du son, et dont
... ...l'Acoustique.

... — ÉTUDE THERMIQUE DES GAZ PARFAITS.

... ...corps susceptibles d'être étudiés au point de vue ther-
... ...intéressants sont les gaz, à cause de la facilité que
... ...sur eux les variations de volume déterminées par les
... ...constantes de température et de pression.
... ...appliquer les principes généraux que nous venons
... ...gaz parfaits, c'est-à-dire aux gaz qui suivraient
... ...lois de Mariotte et de Gay-Lussac.
... ...sont exprimées par la relation

$$\frac{pv}{1+\alpha t} = p_0 v_0.$$

... ...ement égal à $\frac{1}{273}$, et l'on peut écrire

$$pv = p_0 v_0 \alpha\left(\frac{1}{\alpha} + t\right),$$

$$\frac{1}{\alpha} + t = 273 + t = \text{T}.$$

... ...à compter les températures à partir de — 273°.
... ...températures T les *températures absolues*. On a
...

$$\text{R} = p_0 v_0 \alpha.$$

l'équation suivante, qui exprime les lois de Mariotte et de Gay-Lussac,

$$pv = \mathrm{R}T. \tag{A}$$

Pour calculer la chaleur absorbée par une transformation élémentaire quelconque, différentions ; il vient

$$\mathrm{R}\,dt = p\,dv + v\,dp. \tag{B}$$

La variation dt de température est donc formée de deux termes : l'un, $\frac{v\,dp}{\mathrm{R}}$, représente la variation de température qui accompagne une variation de volume dv à pression constante p, et, puisque C est la chaleur spécifique à pression constante, la quantité de chaleur nécessaire à produire cette variation sera $\frac{\mathrm{C}p\,dv}{\mathrm{R}}$; l'autre, $\frac{v\,dp}{\mathrm{R}}$, représente la variation de température qui accompagne une variation de pression dp à volume constant et, puisque c est la chaleur spécifique des gaz à volume constant, la quantité de chaleur nécessaire à la production de cette variation sera $\frac{cv\,dp}{\mathrm{R}}$. La quantité $d\mathrm{Q}$ de chaleur qui produira en somme la variation dt de température se composera donc en définitive de la somme des deux quantités que nous venons de définir ; on aura donc

$$d\mathrm{Q} = \mathrm{C}\frac{p\,dv}{\mathrm{R}} + c\frac{v\,dp}{\mathrm{R}}. \tag{α}$$

Cette équation peut se mettre sous deux autres formes, que l'on obtient en remplaçant successivement $p\,dv$ et $v\,dp$ par leurs valeurs tirées de l'équation (B) et qui sont

$$d\mathrm{Q} = \mathrm{C}\,dt - \frac{\mathrm{C}-c}{\mathrm{R}}\,v\,dp \tag{β}$$

et

$$d\mathrm{Q} = c\,dt + \frac{\mathrm{C}-c}{\mathrm{R}}\,p\,dv. \tag{γ}$$

La comparaison des équations (1) et (β), (2) et (γ), (3) et (α) montre que l'on a

$$h = -\frac{\mathrm{C}-c}{p_0v_0\alpha}v = \frac{\mathrm{C}-c}{\mathrm{R}}v,$$

$$l = \frac{\mathrm{C}-c}{p_0v_0\alpha}p = \frac{\mathrm{C}-c}{\mathrm{R}}p,$$

$$\lambda = \frac{\mathrm{C}p}{p_0v_0\alpha} = \frac{\mathrm{C}p}{\mathrm{R}},$$

$$\mathrm{K} = \frac{cv}{p_0v_0\alpha} = \frac{cv}{\mathrm{R}}.$$

231. — ÉQUATIONS DES LIGNES ISOTHERMES ET DES LIGNES ADIABATIQUES.

Nous avons vu que, parmi la série illimitée des transformations que l'on peut faire subir à un corps quelconque, il y en a deux qui sont particulièrement intéressantes : ce sont les transformations à température constante ou *transformations isothermes,* et les transformations à chaleur constante ou transformations *adiabatiques;* à chacune de ces transformations correspondent des trajectoires particulières du point figuratif dans le plan. Nous allons chercher les équations de ces deux sortes de lignes dans le cas des gaz parfaits.

1° **Lignes isothermes**. — Les lois de Mariotte et de Gay-Lussac fournissent la relation

$$pv = RT.$$

Pour chaque valeur de T, le second membre étant constant, cette équation définit des hyperboles équilatères rapportées à leurs asymptotes (*fig.* 214). Ce sont les lignes isothermes.

Fig. 214.

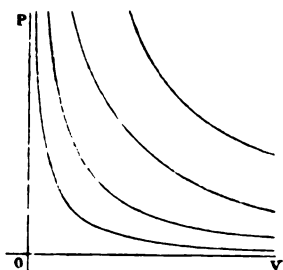
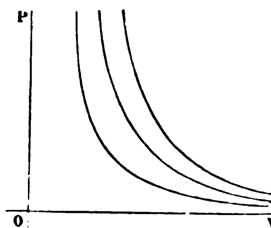


Fig. 215.



2° **Lignes adiabatiques**. — La seconde transformation que l'on peut faire subir à une masse gazeuse consiste à l'échauffer à *chaleur constante* sans lui fournir ni lui enlever de chaleur. Nous allons chercher l'équation de la trajectoire du point figuratif qui correspond à une telle transformation; les variables étant p et v, il suffit d'écrire que dans l'équation (α) dQ est nul : on a donc

$$Cp\,dv + cv\,dp = 0.$$

Telle est l'équation différentielle des lignes adiabatiques; elle peut s'écrire

$$\frac{dp}{p} + \frac{C}{c}\frac{dv}{v} = 0,$$

ntégrant

$$\log p + \frac{C}{c} \log v = \text{const.}:$$

définitive, puisque $\frac{C}{c} = \gamma$,

$$pv^{\gamma} = \text{const.}$$

a formule de Laplace.

e relation, analogue à la loi de Mariotte, définit les lignes adia-
es qui sont des courbes asymptotes aux axes (*fig.* 215); leur
générale rappelle celle des hyperboles équilatères; mais elles
prochent plus vite de l'axe des volumes que de celui des
ns.

232. — DÉTENTE ADIABATIQUE DES GAZ.

tilise, pour abaisser considérablement la température d'un gaz,
omène de la détente brusque du gaz préalablement comprimé.
acile de montrer qu'on peut obtenir ainsi des abaissements
pérature énormes.

en effet un gaz à la température absolue initiale T_0, et soit V_0
lume sous la pression P_0; soient P, V et T sa pression, son
: et sa température après détente. Puisque la transformation
abatique on a

$$P_0 V_0^{\gamma} = P V^{\gamma}.$$

n sait que, d'autre part, le gaz étant soumis toujours aux lois
iotte et de Gay-Lussac,

$$\frac{P_0 V_0}{T_0} = \frac{PV}{T} = R.$$

es deux équations on déduit, en éliminant $\frac{P_0}{P}$,

$$\frac{T_0}{T} = \left(\frac{V}{V_0}\right)^{\gamma-1}.$$

posons que, dans le cas de l'air, on ait $\frac{V}{V_0} = 200$, ce qui sup-
ne chute de pression de 200^{atm}, et supposons la température
: égale à 0, ce qui donne $T_0 = 273$; en remarquant que
$= 0,4$, on voit que

$$T = \frac{T_0}{\left(\frac{V}{V_0}\right)^{\gamma-1}} = \frac{273}{200^{0,4}} = \frac{273}{8.3} = 33.$$

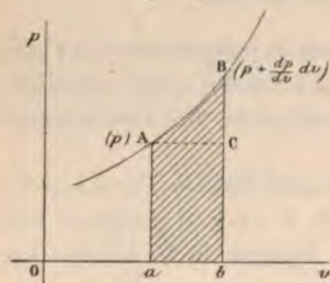
La température absolue finale étant $+33°$, la chute a donc été de $240°$ pour une détente de 200^{atm}.

233. — CYCLES. — REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE DU TRAVAIL.

Parmi les diverses transformations successives que l'on peut faire subir à un corps, il en est qui sont de telle nature que le point figuratif décrive une courbe fermée : ce cas est réalisé quand l'état final du corps est identique à son état initial. Pour abréger le langage, on dit que *le corps* soumis aux transformations correspondantes *a parcouru un cycle fermé*.

Dans ces conditions, il est facile de donner une interprétation géométrique très simple du travail fourni par le corps (*fig.* 216).

Fig. 216.

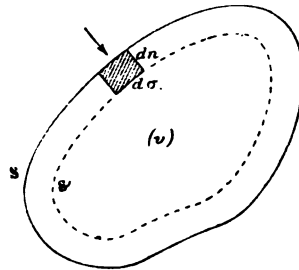


Supposons donc que le corps, comme on le dit en abrégé, décrive la courbe AB (plus correctement, il faudrait dire : supposons que le corps subisse des transformations telles que le point figuratif décrive la courbe AB, ou encore que le corps subisse des transformations définies par la courbe AB). Considérons l'aire élémentaire infiniment petite du trapèze $AabB$; cette aire se compose de deux parties : celle du rectangle $AabC$, dont l'expression est pdv, et celle du triangle ABC, dont la valeur est $\frac{1}{2}\,dv\,\frac{dp}{dv}\,dv$ ou $\frac{1}{2}\frac{dp}{dv}\,dv^2$, c'est-à-dire un infiniment petit du second ordre que nous pouvons négliger. Nous pouvons donc prendre comme expression approchée de l'aire élémentaire $AabB$, l'expression $p\,dv$. Cette expression, d'ailleurs, représente le travail élémentaire correspondant à une variation de volume dv sous la pression p; car, si nous considérons, par exemple, un corps de pompe dont la surface de base soit égale à 1^{cm^2}, et dont le piston soit chargé d'un poids p, le chemin parcouru par le piston pour une variation de volume dv est mesuré précisément par ce même nombre dv, et le travail correspondant est représenté par l'expression $p\,dv$.

Cette expression du travail subsiste d'ailleurs dans le cas d'une surface fermée quelconque. Imaginons en effet une surface fermée S (*fig.* 217) soumise à une pression p par unité de surface : sur un élément de surface $d\sigma$, la pression aura pour valeur $p\,d\sigma$. Si, sous l'in-

fluence de cette pression, le corps diminue de volume et que la surface recule jusqu'en S', l'élément $d\sigma$ a reculé d'une longueur dn suivant la normale, et le travail a pour expression $p\,d\sigma \times dn$ ou $p\,d^2v$, d^2v étant le volume infiniment petit du second ordre ombré sur la figure : nous réserverons la notation dv pour la couche infiniment petite comprise entre les deux surfaces S et S'. On a donc

Fig. 217.



$$p\,d\sigma \times dn = p\,d^2v,$$

d'où, pour le travail total correspondant à la déformation infiniment petite de S en S',

$$d\mathfrak{T} = p\int d\sigma \times dn = p\int d^2v = p\,dv.$$

Il résulte de là que, pour une déformation non plus infiniment petite, mais finie, le travail total $\mathfrak{T}$ aura pour expression

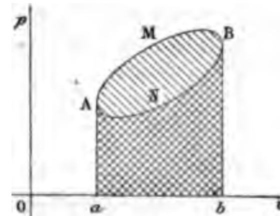
$$\mathfrak{T} = \int p\,dv;$$

le travail a donc pour valeur l'aire curviligne comprise entre la courbe, l'axe des volumes et les deux ordonnées extrêmes.

Nous conviendrons de prendre comme *positif* le travail effectué par le corps quand le point figuratif décrit la courbe en allant de A vers B, et comme *négatif* si le point parcourt la courbe de B en A.

Si le corps parcourt un cycle fermé, *le travail a pour représentation géométrique l'aire de la courbe qui représente le cycle fermé.*

Fig. 218



En effet, menons deux tangentes parallèles à l'axe Op (*fig.* 218). Imaginons que le corps subisse la transformation d'une façon telle que le point figuratif décrive la courbe représentative dans le sens des aiguilles d'une montre.

Pendant qu'il décrit l'arc AMB, le travail est positif et est représenté par l'aire AMBba; quand il revient de B en A, le travail est négatif et représenté par ANBba, qu'il faut prendre en signe contraire, c'est-à-dire retrancher de l'aire AMBba. Le travail total est donc mesuré par l'aire de la courbe fermée, représentée sur la figure avec des hachures simples.

Le corps peut décrire un cycle fermé de façon que la trajec du point figuratif soit parcourue dans le sens des aiguilles d'une mc ou en sens contraire. Dans le premier cas, le travail sera pris p vement, dans le second cas négativement.

Nous pouvons tout de suite en donner un exemple : les mach à liquéfier l'acide sulfureux, pour la production du froid, peu absorber de la chaleur et fournir un travail positif, si on les fait fo tionner comme moteurs, à l'instar des machines à vapeur. Qua au contraire, elles fonctionnent comme pompes de compressi elles absorbent du travail et dégagent de la chaleur; le travail est nég dans ce dernier cas.

On voit ainsi qu'il y a une relation probable entre le travail prod ou dépensé et les phénomènes thermiques manifestés par un co qui subit une série de transformations.

Nous allons voir de quelle nature est cette relation, ce qui n conduira à l'*équivalence* du travail mécanique et de la chaleur.

CHAPITRE II.

PRINCIPE DE MAYER OU DE L'ÉQUIVALENCE.

234. — FAITS D'EXPÉRIENCE.

L'expérience journalière nous montre que, chaque fois que du travail mécanique est dépensé, il y a de la chaleur mise en jeu : le frottement est le moyen le plus simple de manifester ce dégagement de chaleur, et tout le monde sait que, en frottant un bouton de métal sur un morceau de bois, on peut arriver très vite à le rendre brûlant au point de n'en plus pouvoir endurer le contact.

D'autre part, il est aussi facile de montrer qu'une dépense de chaleur peut fournir de l'énergie : prenons un corps de pompe fermé par un piston et contenant de l'air. Si nous échauffons cet air par un moyen quelconque, nous augmentons sa force élastique et, par conséquent, nous le rendons susceptible d'effectuer un travail moteur.

Dans tous les cas, on peut énoncer le principe suivant formulé d'une façon intuitive en 1842 par Mayer et confirmé plus tard par Joule :

A un travail déterminé correspond toujours la même quantité de chaleur dégagée, quel que soit le procédé mis en œuvre pour transformer ce travail en chaleur à condition que l'état final du corps soit identique à son état initial.

C'est le principe de l'équivalence.

Il résulte de là qu'il doit y avoir un rapport constant entre le travail dépensé exprimé en unité de travail (kilogrammètres ou ergs) et la quantité de chaleur produite exprimée en calories; sa valeur numérique dépendra évidemment des unités choisies.

C'est ce rapport constant que l'on appelle l'*équivalent mécanique de la calorie,* ou, comme on le dit souvent d'une façon moins correcte, l'équivalent mécanique de la chaleur. Nous le représenterons toujours par la lettre J.

a chaleur peut inversement être transformée en travail, ce qui conduit à la définition de l'équivalent calorifique du travail, $\frac{1}{J} = A$.

Nous allons décrire les expériences classiques qui ont servi à la fois à établir, d'une façon indiscutable, le principe de l'équivalence et à trouver la valeur du nombre J.

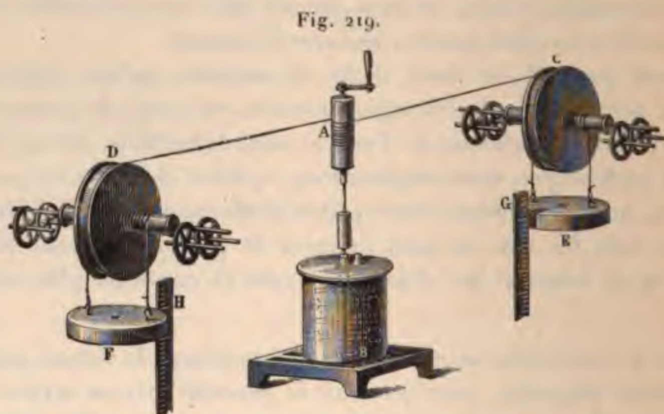
235. — EXPÉRIENCE DE JOULE PAR LE FROTTEMENT.

La condition essentielle que doit remplir l'expérience destinée à mesurer l'équivalence est que le cycle des transformations subies par le corps soit un cycle fermé, autrement dit, le corps qui s'échauffe devra être à la fin, au double point de vue mécanique et thermique, dans le même état qu'au début.

Voici comment a opéré Joule, en 1847 :

Il prenait un vase cylindrique B (*fig.* 219) pouvant contenir de

Fig. 219.



l'eau ou du mercure. Ce vase était fermé par un couvercle au centre duquel était un petit trou qui laissait passer librement un axe de rotation A, muni de palettes marquées en pointillé sur la figure. Ces palettes constituaient un agitateur dont le frottement continu contre le liquide échauffait celui-ci; pour que la chaleur développée dans le liquide ne se perdît pas par conductibilité, l'axe de rotation était coupé en deux parties réunies par un manchon de buis, mauvais conducteur : on voit ce manchon cylindrique au-dessus du couvercle du calorimètre.

Soit M l'équivalent en eau du calorimètre, la température passant

t_0 à t_1 la chaleur dégagée par le frottement était

$$Q = M(t_1 - t_0).$$

tte quantité devait être corrigée des pertes par rayonnement.

L'axe de rotation portait à sa partie supérieure un cylindre A sur uel s'enroulaient deux cordons C et D. Chacun de ces cordons it enroulé à son autre extrémité sur une large poulie mise en mouent par la chute d'un poids mobile le long d'une règle verticale sée : c'était l'ensemble de ces deux poids E et F qui constituait ystème moteur. Pour diminuer autant que possible le frottement 'axe de chaque poulie, on le supportait par les jantes croisées de x roues légères, comme on le fait dans les machines d'Atwood. es poids étant remontés au haut de leur course, on les laissait ber jusqu'au sol et l'on répétait vingt fois l'opération : tout le ail était absorbé par les résistances et l'eau du calorimètre s'échauf- ; on mesurait cet échauffement par les méthodes ordinaires de la rimétrie, en tenant compte de la perte de chaleur par rayonent. On avait ainsi la quantité de chaleur dégagée. Quant au ail, il était théoriquement représenté par le produit de la somme poids E, F par la hauteur commune de chute, lue sur les les G et H ; mais, en pratique, ce travail devait subir des corions.

n effet, le travail moteur, produit par la chute des poids, est ensé de plusieurs manières. Il est d'abord employé à échauffer u du calorimètre : c'est la partie utile ; une autre portion de ce ail moteur se retrouve dans l'accroissement de force vive des x poids qui arrivent au sol, avec une certaine vitesse v que l'on t mesurer expérimentalement ; enfin, une dernière portion du ail des poids qui tombent sert à échauffer, par frottement, les es de l'appareil extérieures au calorimètre, à vaincre la rigidité cordons C et D, et à produire un bruit perceptible à l'oreille.

a correction relative à la perte de force vive se calcule aisément. v la vitesse d'arrivée de l'un des poids. Sa force vive est $\frac{1}{2}\frac{P}{g}v^2$: era le terme à retrancher de l'expression du travail effectué par oids.

uant aux corrections provenant des frottements et de la rigidité cordons, elles ne peuvent être déterminées que par l'expérience. i comment :

près avoir enlevé le liquide et le vase B, on attachait les deux

cordons l'un à l'autre et on les enroulait en A, de telle façon que l'un, en descendant, tendît à faire monter l'autre. Dans ces conditions, l'appareil était parfaitement immobile, et pour le mettre en mouvement il fallait ajouter d'un côté un poids additionnel. S'il n'y avait aucun frottement nuisible, l'addition d'un poids très petit aurait suffi à entraîner le système du côté de la surcharge; mais, à cause des frottements nuisibles, il fallait un certain poids p pour les vaincre et communiquer au système la même vitesse moyenne que dans l'expérience principale. On évalue facilement le travail du poids p, et c'est ce travail que l'on prend comme valeur du terme correctif.

Enfin, pour connaître la perte de travail correspondant au bruit continu produit par la rotation de l'appareil, on disposait horizontalement un violoncelle et l'on cherchait le poids qu'il fallait accrocher à un archet suspendu à un fil vertical, passant sur une poulie, et équilibré par un contrepoids, pour produire un son de même hauteur et de même intensité approximative que le ronflement engendré par la rotation assez vive du système. Nous indiquons cette dernière correction pour montrer avec quels soins ont été faites ces expériences si remarquables, et pour bien faire voir qu'en Physique c'est l'expérience *seule* qui doit intervenir dans les corrections à faire subir à une quantité mesurée.

Joule mesurait le travail en *livres-pieds* et la chaleur en unités correspondant au degré Fahrenheit. En traduisant les nombres qu'il a trouvés en calories rapportées au kilogramme-degré centigrade et en kilogrammètres, nous dirons que le résultat moyen des expériences faites de la manière précédente par l'illustre physicien anglais est

$$J = 425^{\text{kgm}},65,$$

avec le mercure et $J = 424^{\text{kgm}},9$ avec l'eau.

Cette expérience réalise bien un cycle fermé, car l'eau du calorimètre, quand on l'a laissée refroidir, est dans les mêmes conditions qu'avant son échauffement.

236. — EXPÉRIENCES DE M. MICULESCU.

La méthode employée en 1892 par M. Miculescu est, en principe, celle de Joule, mais le dispositif expérimental supprime la plus grande partie des corrections plus ou moins incertaines qui affectent les expériences de Joule.

Le calorimètre est maintenu à *température constante* par un cou-

rant d'eau circulant dans une enveloppe annulaire qui l'entoure. On mesure la masse d'eau écoulée, sa température à l'entrée, sa température à la sortie, ce qui permet de calculer aisément la quantité de chaleur reçue par le calorimètre.

Le travail est fourni par un moteur électrique, qui fait mouvoir des palettes à l'intérieur du calorimètre. Pour évaluer ce travail, on a placé le moteur sur un bâti pouvant osciller autour d'un axe horizontal, qui coïncide avec celui du moteur. Quand ce dernier tourne en fournissant un travail extérieur, le bâti s'incline en sens inverse de la rotation : on le ramène à sa position première, en suspendant un poids convenable à un levier solidaire de ce bâti. Si P est ce poids, l le bras de levier à l'extrémité duquel il est appliqué, le travail par tour est

$$2\pi l P,$$

et pour n tours

$$2\pi n l P.$$

On détermine n en faisant inscrire à chaque tour un signal sur un cylindre enregistreur par un dispositif électromagnétique.

L'arbre pénètre dans le calorimètre par une boîte à étoupes qui se trouve dans l'intérieur de celui-ci, de même que le point d'appui de l'autre extrémité : les frottements qui se produisent en ces points ne donnent donc lieu à aucune correction, puisque la chaleur qu'ils dégagent est recueillie aussi dans le calorimètre.

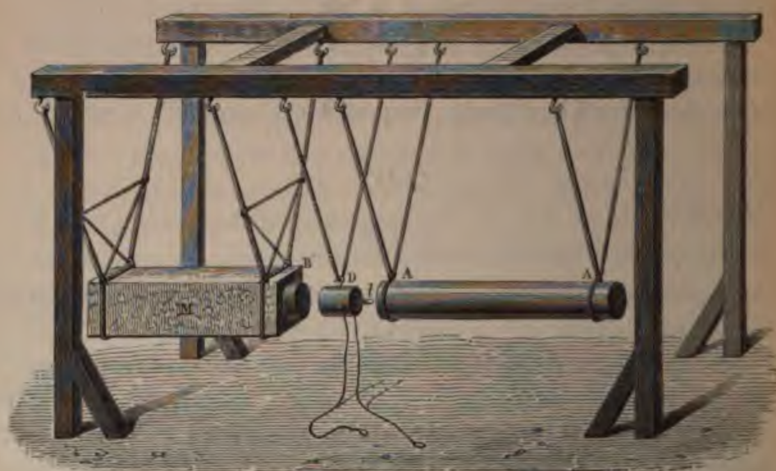
237. — EXPÉRIENCES DE HIRN PAR LE CHOC.

Le frottement n'est pas le seul moyen qui permette de transformer rapidement le travail mécanique en chaleur : le choc brusque de deux corps en est un autre; c'est justement cette chaleur dégagée par le choc que l'on utilise dans les armes à feu pour l'inflammation des capsules fulminantes.

Hirn a voulu déterminer l'équivalent J à l'aide du choc; il y est parvenu en employant la percussion de deux masses considérables écrasant entre elles un bloc de plomb qui s'échauffe sous ce choc. Comme d'ailleurs l'expérience permet de constater que, ni la densité, ni la chaleur spécifique, ni la dilatation cubique du plomb ne sont modifiées sensiblement par cette altération de forme, on peut se servir de ce moyen pour déterminer J : on réalise à peu près un cycle fermé, bien qu'il y ait une déformation et un léger écrouissage.

L'appareil était formé d'un bloc de pierre M (*fig.* 220), pesant 1000^{kg}, et d'un bloc de fer cylindrique AA', du poids de 350^{kg}, suspendus tous deux à des cordes, de façon à se mouvoir en restant horizontaux. Un petit cylindre de plomb D est suspendu entre eux et une robuste charpente en bois supporte le tout. Le plomb est percé d'une cavité, et deux cordons que l'on voit à sa partie inférieure permettent de le saisir sans lui enlever de chaleur par conductibilité.

Fig. 220.



On soulève le bloc de fer d'une hauteur h : en retombant, il développe un travail ph, p étant son poids; mais il se relève ensuite à une hauteur h' inférieure à h. Le travail total cédé par le bloc de fer est donc $p(h-h')$. Sous l'influence du choc, le bloc de pierre M s'est soulevé à une hauteur h''; soit π son poids : le travail absorbé de ce chef est $\pi h''$. L'expression totale du travail utile employé à échauffer le plomb est donc

$$\mathfrak{T} = p(h-h') - \pi h''.$$

Le plomb est, après le choc, porté rapidement dans un calorimètre qui fait connaître la quantité Q de chaleur qu'il a emmagasinée. En opérant ainsi, Hirn a trouvé le nombre 425^{kgm} par grande calorie.

D'une façon générale, toute expérience dans laquelle du travail peut être converti en chaleur est susceptible de fournir une mesure du nombre J.

238. — CALCUL DE L'ÉQUIVALENT A L'AIDE DES GAZ PARFAITS.

Nous allons montrer maintenant que l'on peut déduire des propriétés des gaz parfaits la valeur du nombre J.

Considérons un gaz parfait et faisons-lui subir une transformation déterminée. Prenons comme variables le volume et la température. Nous avons vu que, dans ce cas, on a (230, γ)

$$dQ = c\,dt + \frac{C - c}{R} p\,dv.$$

Si le gaz parcourt un cycle fermé, son volume et sa pression reviennent à leurs valeurs initiales. Le travail $\int p\,dv$ est mesuré par l'aire de la courbe fermée qui représente le cycle; la quantité de chaleur absorbée est $\int dQ$. On a donc

$$\int dQ = c \int dt + \frac{C - c}{R} \int p\,dv.$$

Le cycle étant fermé, $\int dt$ est nulle, c'est-à-dire que l'expansion a lieu à température constante et que la totalité de la chaleur est employée à accroître le volume et à vaincre la pression. Nous aurons donc simplement

$$\int dQ = \frac{C - c}{R} \int p\,dv$$

ou, effectuant l'intégration du premier membre et remarquant que $\int p\,dv$ représente le travail $\mathfrak{T}$, il vient

$$Q = \left(\frac{C - c}{R}\right) \mathfrak{T}$$

ou

$$J = \frac{\mathfrak{T}}{Q} = \frac{R}{C - c} = \frac{p_0 v_0 \alpha}{C - c};$$

la quantité dans le second membre est constante, puisque tous les éléments du numérateur et du dénominateur sont constants; donc, il y a un rapport constant entre la quantité de chaleur mise en jeu dans une transformation et le travail correspondant. Ce rapport est, par définition, l'équivalent mécanique J, à la notion duquel nous sommes

arrivés, comme on le voit, par la considération des gaz parfaits : c'est la méthode de Mayer.

Nous venons d'obtenir, dans le cas des gaz parfaits, l'expression

$$J = \frac{p_0 v_0 \alpha}{C - c}.$$

Calculons numériquement la valeur de J dans le cas de l'air : $p_0 = 1033^g$ par centimètre carré, si le gaz est primitivement à la pression atmosphérique ; par suite, $p_0 = (1033 \times 981)\,\frac{\text{dynes}}{\text{cm}^2}$, dans le système C.G.S. ; $v_0 = \frac{1000}{1,293}$, $\alpha = \frac{1}{273}$. En remplaçant C et c par leurs valeurs déduites des expériences de Regnault et de Clément et Desormes, il vient, pour l'équivalent mécanique de la petite calorie exprimée en ergs,

$$J = 4,1616 \times 10^7 :$$

telle est la valeur de l'équivalent en unités absolues C.G.S.

Dans le système du kilogrammètre, la valeur de J ainsi calculée sera

$$J = 425^{\text{kgm}}.$$

1^{kgm} représente le travail de 1000 *grammes-poids* élevés à 1^{m} de hauteur ; mais 1 gramme-poids vaut 981 dynes. Donc l'équivalent C.G.S., qui doit représenter 425^{kgm}, c'est-à-dire la *grande calorie* ou *calorie-kilogramme*, sera

$$J = 425 \times 1000 \times 981 \times 100 = 4,17925 \times 10^{10}.$$

La *petite calorie* ou *calorie-gramme* correspond donc à

$$4,18 \times 10^7 \text{ ergs}.$$

Ce rapport est sensiblement constant pour tous les gaz permanents. Les expériences de Joule et de Hirn nous ont d'ailleurs montré qu'il l'est aussi pour tous les autres corps, quel que soit le mode de transformation qu'on leur fasse subir, pourvu que le cycle soit fermé. Nous pouvons donc considérer le principe de l'équivalence du travail et de la chaleur comme démontré par l'expérience d'une façon irréfutable.

239. — TRANSFORMATION INVERSE DE LA CHALEUR EN TRAVAIL.

On doit à Hirn des expériences remarquables, faites en vue de déterminer A par la transformation inverse de la chaleur en travail.

Le grand mérite de cette détermination de l'équivalent, c'est qu'elle a été réalisée, non avec des appareils délicats construits en vue des recherches de laboratoire, mais bien avec une machine à vapeur servant de moteur à l'une des vastes usines du Logelbach, près de Colmar.

On peut, dans une machine motrice, connaître avec une exactitude relative la quantité de chaleur dépensée.

L'unité de poids d'eau, prise à 0° et transformée en vapeur saturante à la température T, a absorbé une quantité de chaleur Q, représentée par la formule de Regnault,

$$Q = 606,5 + 0,305\,T.$$

Si cette vapeur arrivait dans le condenseur à t° sous sa tension maxima, à cette température la chaleur qu'elle contiendrait, comptée à partir de 0, serait

$$Q' = 606,5 + 0,305\,t;$$

elle aurait donc perdu, en traversant le corps de pompe,

$$Q - Q' = 0,305\,(T - t).$$

Mais le calcul des quantités de chaleur fait de cette façon n'est pas exact, parce que la vapeur arrive dans le condenseur sous des pressions variées. On peut calculer directement la quantité de chaleur Q' restituée au condenseur en faisant fonctionner celui-ci comme un véritable calorimètre; et, de plus, il faut tenir compte de la chaleur perdue par le rayonnement du cylindre.

Pour déterminer le travail, Hirn employait un appareil appelé *indicateur de Watt,* qui faisait connaître les valeurs successives de la pression dans le cylindre en divers points de la course du piston; on pouvait alors évaluer la pression moyenne et calculer le travail produit de la course du piston par sa section et par cette pression moyenne. Cette expérience, d'ailleurs, se faisait en cycle fermé, puisque l'eau, dans le condenseur, se retrouve dans l'état initial.

En faisant subir aux nombres qui mesuraient la chaleur et le travail les corrections nécessaires, Hirn a trouvé pour J des nombres variant entre 413 et 432, résultat remarquable si l'on se reporte aux conditions dans lesquelles l'expérience a été faite et aux difficultés que présentait sa réalisation.

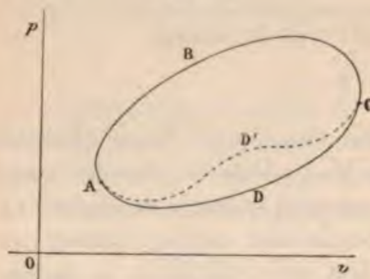
Avant de terminer ce qui a rapport à la détermination du nombre J, nous dirons que beaucoup d'autres méthodes ont été proposées et

employées par MM. Hirn, Rowland, Puluj, Violle, etc., basées sur des phénomènes absolument différents les uns des autres, tels que l'élasticité de traction, l'écoulement des liquides, les courants de Foucault, etc.; toutes ont néanmoins fourni des nombres dont la moyenne est 425. Aussi adopterons-nous cette valeur de l'équivalent mécanique de la chaleur.

240. — EXTENSION DU PRINCIPE DE L'ÉQUIVALENCE AUX CYCLES NON FERMÉS.

Jusqu'à présent, nous n'avons appliqué le principe de l'équivalence qu'aux cycles fermés. Nous allons maintenant l'étendre aux cycles ouverts, grâce à l'introduction de grandeurs nouvelles qui rétabliront l'équivalence quand elle n'aura plus lieu. Ces quantités joueront le rôle des résistances passives en mécanique : les résistances passives, en effet, quand on en tient compte, rétablissent l'égalité entre le travail moteur et le travail résistant.

Fig. 221.



Si nous considérons un cycle fermé ABCDA (*fig.* 221), le principe de l'équivalence, applicable au cycle entier, ne l'est plus à une de ses portions, l'arc ABC par exemple.

Mais, si le corps part de l'état initial défini par les coordonnées du point A pour arriver à un état final défini par les coordonnées du point C, et s'il y a une différence entre le travail $\mathfrak{T}$ et l'expression JQ de la quantité de chaleur Q correspondante multipliée par l'équivalent mécanique J, cette différence doit être la même, quel que soit le chemin suivi par le point figuratif pour aller de A en C.

En effet, pour le cycle entier, on a la relation

$$\mathfrak{T} - JQ = 0;$$

si nous ne considérons que l'arc ABC, nous aurons, pour cet arc,

$$\mathfrak{T} - JQ \gtrless 0.$$

Représentons par le symbole $\mathcal{E}$ la différence entre la valeur numérique du travail $\mathfrak{T}$ et la valeur numérique du produit JQ. Nous aurons pour l'arc ABC

$$\mathfrak{T} - JQ = \mathcal{E}.$$

Cela posé, décrivons complètement le cycle fermé tracé sur la figure, d'abord en allant de A en C en passant par B, puis en revenant de C en A par le chemin CDA. Puisque le cycle est fermé, on a, pour le cycle entier, $\mathfrak{T} - JQ = 0$; mais nous avons vu que l'on avait, pour la portion ABC, $\mathfrak{T} - JQ = \mathcal{E}$. Il faut donc que, quand on revient de C en A par le chemin CDA (ou par un chemin CD'A qui peut être quelconque pourvu qu'il ferme le cycle), l'on ait $\mathfrak{T} - JQ = -\mathcal{E}$, la somme des deux expressions devant donner zéro; comme d'ailleurs l'expression égale à $+\mathcal{E}$ en allant dans un sens devient égale à $-\mathcal{E}$ quand on parcourt l'arc ABC en sens contraire (99), il en résulte que la valeur de $\mathfrak{T} - JQ$ est égale à $-\mathcal{E}$, quand on va de C en A, soit par le chemin CBA, soit par le chemin CDA, soit par le chemin quelconque CD'A.

Nous déduisons de là le théorème suivant :

La quantité $\mathcal{E}$ qui représente l'écart de la loi de l'équivalence, pour un cycle non fermé, est la même quel que soit le chemin parcouru, et ne dépend que des coordonnées du point de départ et du point d'arrivée.

241. — EXPRESSION ANALYTIQUE DU PRINCIPE DE L'ÉQUIVALENCE. ÉNERGIE INTÉRIEURE.

Cette propriété nous conduit immédiatement à une expression analytique du principe de l'équivalence. En effet, on démontre en Analyse que, lorsqu'une intégrale telle que

$$\int_{x_0 y_0}^{x_1 y_1} (A\,dx + B\,dy).$$

dans laquelle A et B sont des fonctions de x et de y, ne dépend que des limites entre lesquelles est effectuée l'intégration, la quantité sous le signe $\int$ est une différentielle exacte d'une certaine fonction $f(x,y)$, et la condition analytique pour que $A\,dx + B\,dy$ soit une différentielle exacte est que

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}.$$

Or, nous venons de démontrer que l'intégrale

$$\mathfrak{T} - JQ = \mathcal{E},$$

prise le long d'un cycle non fermé, conservait la même valeur quel

que soit le chemin parcouru entre les deux points extrêmes; elle ne dépend donc que des coordonnées de ces deux points; il suffira alors pour avoir une expression analytique du principe de l'équivalence d'écrire que l'accroissement infinitésimal de $\mathfrak{T} - JQ$, c'est-à-dire $d\mathfrak{T} - J\,dQ$, est la différentielle exacte $d\mathcal{E}$ d'une certaine fonction $\mathcal{E}$.

Cette condition ne sera peut-être pas toujours *suffisante* pour exprimer le principe de l'équivalence, mais elle sera toujours nécessaire; il faudra donc toujours l'écrire dans les problèmes de Thermodynamique.

Cette fonction $\mathcal{E}$ prend le nom d'*énergie intérieure*. Toute variation de cette quantité correspond à un *travail intérieur*. Et, grâce à la considération de cette quantité nouvelle, le principe de l'équivalence n'est plus en défaut lorsqu'on l'applique à un cycle non fermé; en ajoutant au travail externe le travail interne, nous rétablissons l'équilibre nécessaire entre le travail total et la quantité JQ de chaleur correspondante.

242. — EXPÉRIENCES D'EDLUND.

Pour montrer comment on applique les principes que nous venons d'établir, nous allons donner un exemple classique emprunté au cours de M. Lippmann.

C'est une expérience par laquelle Edlund avait cherché à mesurer l'équivalent J, quoique le cycle des transformations n'y fût pas fermé. Considérons un fil métallique que l'on fait s'allonger sous l'influence d'une traction π. Appelons t la température de ce fil et z sa longueur; supposons que le poids du fil soit égal à l'unité. Quand la longueur varie de dz et la température de dt, le fil absorbe une certaine quantité de chaleur dQ donnée par la relation

$$dQ = \gamma\,dt + \lambda\,dz, \tag{1}$$

γ étant ce qu'on pourrait appeler la *chaleur spécifique du fil à longueur constante*, et λ la *chaleur latente d'allongement à température constante* (quantité qui correspond pour la longueur au coefficient l qui multiplie dv dans l'expression $dQ = c\,dt + l\,dv$).

Le travail dû à la descente du poids π pendant l'allongement dz est

$$d\mathfrak{T} = -\pi\,dz; \tag{2}$$

donc, si nous formons l'expression $J\,dQ - d\mathfrak{T}$, nous aurons, d'a-

près (1) et (2),

$$d\mathcal{E} = J(\gamma\, dt + \lambda\, dz) + \pi\, dz,$$
$$d\mathcal{E} = J\gamma\, dt + (J\lambda - \pi)\, dz;$$

exprimons que $d\mathcal{E}$ est une différentielle exacte, et nous aurons

$$J\left(\frac{d\gamma}{dz} - \frac{d\lambda}{dt}\right) = \frac{d\pi}{dt}.$$

Telle est l'expression analytique du principe de l'équivalence dans le cas actuel.

243. — NOUVELLE UNITÉ DE CHALEUR : THERMIE.

Dans tous les calculs qui précèdent, nous avons supposé les quantités de chaleur exprimées en calories; en particulier, si nous exprimons le travail en kilogrammètres, il faut exprimer la chaleur en grandes calories. Cette unité de chaleur peut être avantageusement remplacée par une unité nouvelle très commode en Thermodynamique, proposée par Rankine et Claudius, et à laquelle M. Lippmann a donné le nom de *thermie : La thermie est la quantité de chaleur qui équivaut à l'unité de travail.*

Donc, si nous prenons comme unité de travail l'erg, la thermie sera la quantité de chaleur qui équivaut à un travail d'un erg. Cette unité, on le voit, est indépendante de la définition du degré centigrade; elle a de plus l'avantage de supprimer, dans les formules, l'écriture de l'équivalent J. Au lieu d'écrire $\mathfrak{T} = JQ$, on écrira simplement, si Q est exprimée en thermies : $\mathfrak{T} = Q$.

Pour transformer en thermies les quantités de chaleur écrites en calories, il suffit de diviser par J leurs valeurs numériques; inversement, pour exprimer en calories des quantités de chaleur écrites en thermies, il faudra multiplier par J l'expression de ces dernières.



CHAPITRE III.

PRINCIPE DE CARNOT.

244. — CONDITIONS DU FONCTIONNEMENT D'UN MOTEUR THERMIQUE.

Nous venons de voir, dans le Chapitre précédent, qu'il y a équivalence entre la quantité de chaleur dépensée et la quantité de travail produit, et réciproquement. Ainsi, quelle que soit l'ingéniosité de la disposition des organes mécaniques que nous ferons servir à la transformation, une calorie ne pourra jamais développer plus de 425^{kgm}.

Le principe de l'équivalence nous a fourni, en un mot, une relation entre le travail produit et la quantité de chaleur dépensée. Mais nous savons que quantité de chaleur et température sont choses essentiellement distinctes : le principe de Carnot va nous fournir une relation entre le travail produit et les températures des corps qui subissent les transformations étudiées.

C'est en 1824 que Sadi Carnot, dans l'immortel Ouvrage qui a pour titre : *Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à développer cette puissance,* a posé pour la première fois en principe que, *dans toute machine thermique, quelle qu'elle soit, il ne peut y avoir travail produit que s'il existe une différence de températures entre deux des organes de l'appareil.*

Cette condition n'est pas suffisante : elle est toujours nécessaire; la phrase qui l'exprime peut être considérée comme énonçant qualitativement le principe de Carnot.

Carnot a été conduit à cet énoncé en assimilant les moteurs thermiques aux moteurs hydrauliques. Si l'on considère de l'eau susceptible de se mouvoir dans des vases communicants, il ne saurait y avoir de travail s'il n'y a pas de différence de niveaux; par analogie, Carnot admet que, dans toute machine thermique, il ne pouvait y avoir de travail que s'il y avait différence de températures entre un corps chaud, source de chaleur, et un corps froid, la chaleur passant

du premier au second. Chute d'eau d'une part, chute de chaleur de l'autre, traduisaient à ses yeux la même condition nécessaire.

Poussant la comparaison plus loin, il remarqua que le travail d'une machine hydraulique sera le même dans toutes les circonstances où la différence des niveaux de l'eau sera la même. Il en conclut que, dans les machines thermiques, le travail ne dépend que de la différence des températures et est constant pour une valeur donnée de cette différence.

Pour prouver son assertion, Carnot calcula, au moyen des données pourtant bien imparfaites qu'il avait à cette époque (1827), les quantités de travail $\mathfrak{T}$ que pouvaient donner différentes machines, et les quantités de chaleur correspondantes Q_1 fournies par la source chaude : il trouva, pour le rapport $\frac{\mathfrak{T}}{Q_1}$, un nombre sensiblement constant, quand les machines fonctionnaient entre les mêmes limites de température. On donne, à ce rapport du travail produit à la quantité de chaleur fournie, le nom de *rendement*.

Aujourd'hui, grâce au principe de l'équivalence, nous savons que $\mathfrak{T}$ est proportionnel à $Q_1 - Q_2$, somme algébrique des quantités de chaleur mises en jeu; Q_2 étant la chaleur abandonnée au corps froid après le travail effectué. Donc, nous prendrons comme expression du rendement le quotient $\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$.

245. — CONDITIONS DE RENDEMENT MAXIMUM.

Tant au point de vue mécanique qu'au point de vue thermique, il est facile de voir que les conditions de rendement maximum d'un moteur thermique sont infiniment voisines des conditions d'équilibre et de réversibilité.

Au point de vue mécanique, il faut que la résistance à vaincre par le moteur soit infiniment près d'être égale à la force motrice développée par ce dernier; car, si elle lui était supérieure, le moteur, trop faible, ne pourrait pas travailler; si, au contraire, elle lui était inférieure, le moteur développerait un travail inutile, mesuré par la différence entre le travail moteur et le travail résistant. Le rendement maximum sera donc atteint quand on sera très voisin de l'équilibre.

Au point de vue thermique, il en sera de même : il suffit, pour s'en convaincre, de considérer le corps soumis à la transformation comme transportant de la chaleur d'un corps chaud à un corps froid.

Si, pendant le transport, le corps qui travaille était en contact avec un corps dont la température fût différente de la sienne, on pourrait intercaler entre eux une machine thermique qui produirait un certain travail, dont la simple existence suffirait à montrer qu'auparavant le rendement maximum n'était pas atteint. Le corps qui travaille ne devra donc jamais être en contact avec des corps à températures différentes de la sienne. On sera donc forcé de procéder, dans une machine thermique parfaite, par transformations infiniment lentes, telles que compression ou décompression. Ainsi seulement on sera dans le cas du rendement maximum, et l'on voit qu'on est en même temps dans le cas de l'équilibre de température.

Mais, quand on est ainsi très près de réaliser l'équilibre, tant au point de vue mécanique qu'au point de vue thermique, la moindre variation dans un sens ou dans l'autre suffira pour changer le sens du fonctionnement du moteur. Tous les phénomènes qui contribueront à la réalisation du maximum de rendement seront donc réversibles, et les conditions de ce maximum seront justement les conditions de réversibilité.

Il résulte de tout cela qu'une machine thermique parfaite, travaillant au rendement maximum, ne produirait qu'un mouvement d'une lenteur infinie.

246. — CYCLE DE CARNOT. — EXPRESSION DU RENDEMENT MAXIMUM.

Nous avons dit, en commençant ce Chapitre, que nous prenions comme valeurs du rendement l'expression $\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$: c'est ce que Carnot appelait la *puissance motrice* de la machine; nous lui donnerons le nom de *coefficient économique* ou de *rendement*. Nous pouvons, d'ailleurs, écrire

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}.$$

$\frac{Q_2}{Q_1}$ sera ce que nous appellerons le *coefficient de perte*.

Ces définitions étant posées, le principe de Carnot s'énonce quantitativement en disant que *le coefficient économique est le même pour toutes les machines thermiques, quelles qu'elles soient, fonctionnant entre les mêmes limites de température.*

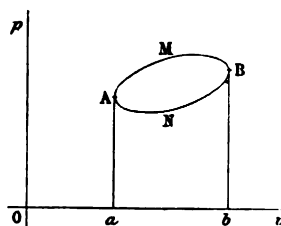
D'après ce que nous avons dit des conditions du maximum de rendement, il faudra que le cycle des transformations qu'aura à effectuer

le corps que nous emploierons à transformer la chaleur en travail soit un cycle réversible. Les phénomènes pour lesquels le point figuratif peut parcourir le cycle dans un sens ou dans l'autre sont des phénomènes réversibles.

Les quantités que nous venons de définir peuvent se représenter géométriquement :

Figurons un cycle fermé quelconque AMBN et supposons que ce cycle représente les transformations successives effectuées dans un moteur thermique à gaz; le travail utile correspond à l'aire de la courbe AMBN (*fig.* 222); pendant le trajet AMB, le gaz exécute un travail positif représenté par aAMBb, et emprunte, par conséquent, de la chaleur; pendant le trajet BNA, le gaz exécute un travail négatif égal à l'aire bBNAa et restitue donc de la chaleur; lorsque à la fin il revient en A aux conditions initiales, il faut que la quantité de chaleur correspondant au travail bBNAa, qui a été empruntée par le gaz à des corps chauds, ait été cédée à des corps froids.

Fig. 222.



Le coefficient économique du moteur à gaz est donc le rapport $\frac{\text{AMBN}}{a\text{AMB}b}$ de la quantité de chaleur transformée en travail utile à la quantité totale de chaleur empruntée pendant le cycle.

Le coefficient de perte est donc aussi représenté par $\frac{a\text{ANB}b}{a\text{AMB}b}$.

Parmi le nombre infini de cycles que nous pouvons faire décrire à un corps, il en est un particulièrement intéressant : c'est celui qui est formé de deux portions d'isothermes infiniment voisines et de deux portions d'adiabatiques également très voisines; si le cycle est parcouru dans un sens, cela correspondra au cas où de la chaleur est transformée en travail; s'il est parcouru en sens contraire, cela correspondra au cas où du travail sert à fournir de la chaleur. Un pareil cycle a reçu le nom de *cycle de Carnot* (*fig.* 223). Il est entièrement réversible et, par conséquent, le rendement y sera maximum.

Supposons que le corps soumis à la transformation soit un gaz.

De $A(pvT_1)$ en $B(p_1v_1T_1)$, en décrivant la portion d'isotherme définie par la température T_1, le gaz se dilate à température constante; on a

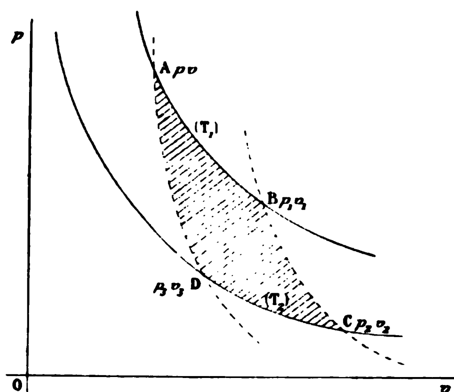
$$dt = 0;$$

il est donc soumis à la loi de Mariotte : on a par conséquent aussi

$$(1) \qquad pv = RT_1.$$

La quantité de chaleur qu'il faut lui fournir sera donnée par l'in-

Fig. 223.



tégration de l'équation différentielle

$$dQ = c\,dt + \frac{C-c}{R}\,p\,dv,$$

dans laquelle on fera

$$dt = 0,$$

ce qui donne

$$Q_1 = \frac{C-c}{R}\int_v^{v_1} p\,dv = \frac{1}{J}\int_v^{v_1} p\,dv$$

et, en remplaçant p par sa valeur tirée de (1),

$$Q_1 = \frac{RT_1}{J}\int_v^{v_1}\frac{dv}{v} = \frac{RT_1}{J}\,L\frac{v_1}{v},$$

le symbole L désignant les logarithmes népériens.

De $B(p_1v_1T_1)$ en $C(p_2v_2T_2)$, on laisse le corps se dilater le long de la ligne adiabatique; il n'y a pas de chaleur fournie ou perdue.

De $C(p_2v_2T_2)$ à $D(p_3v_3T_2)$, le long de l'isotherme définie par la température T_2, nous aurons, comme dans le premier cas,

$$Q_2 = \frac{RT_2}{J}\,L\frac{v_2}{v_3}$$

pris avec le signe $-$.

Enfin, de $D(p_3 v_3 T_2)$ à $A(pv T_1)$, la quantité de chaleur mise en jeu est nulle.

La chaleur transformée en travail utile est donc la somme algébrique de ces quantités de chaleur dont deux sont nulles et se réduit à $Q_1 - Q_2$, et le rendement $\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$ a pour expression

$$\text{(A)} \qquad \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 L \frac{v_1}{v} - T_2 L \frac{v_2}{v_3}}{T_1 L \frac{v_1}{v}}.$$

Mais, d'autre part, les équations des isothermes et des adiabatiques qui forment le cycle sont

$$\text{(AB)} \qquad pv = p_1 v_1,$$
$$\text{(BC)} \qquad p_1 v_1^\gamma = p_2 v_2^\gamma,$$
$$\text{(CD)} \qquad p_2 v_2 = p_3 v_3,$$
$$\text{(DA)} \qquad p_3 v_3^\gamma = p v^\gamma.$$

Multiplions ces quatre équations membre à membre, il vient

$$\frac{v_1}{v} = \frac{v_2}{v_3}.$$

Les logarithmes népériens qui figurent dans la relation (A) sont donc tous égaux; ils constituent, par conséquent, un facteur commun que l'on peut supprimer, et il reste

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Nous voyons donc que :

Le coefficient économique maximum pour une machine à gaz fonctionnant suivant un cycle réversible de Carnot a pour expression le quotient de la différence $T_1 - T_2$ *des températures des deux sources par la température* T_1 *de la source chaude.*

Nous pouvons écrire ce coefficient économique sous la forme

$$\frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

$\frac{T_2}{T_1}$ représente le *coefficient de perte*. Pour diminuer ce coefficient dans la pratique, comme on ne peut pas diminuer T_2 indéfiniment,

on donnera à T_1, température de la source chaude, des valeurs très grandes.

Nous sommes donc arrivés, dans le cas particulier d'un cycle réversible de Carnot et d'un gaz parfait, à la valeur du coefficient économique maximum; pour que le principe de Carnot se vérifie, il faut que nous fassions voir que le coefficient économique maximum reste le même, quelle que soit la machine et quelle que soit la substance fonctionnant suivant un cycle réversible.

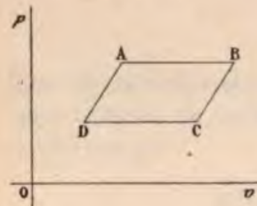
Nous pouvons essayer d'établir la généralité de ce résultat de deux façons, ou par l'étude de cas particuliers, ou par le raisonnement.

247. — CAS PARTICULIER.

Considérons une machine thermique qui serait formée d'un mélange d'air et de vapeur, fonctionnant entre 0° et 1°, et contenue dans un cylindre fermé par un piston.

Supposons que la chaudière contienne de l'eau à 1° et qu'au début de l'expérience le point figuratif soit en A. Soulevons le piston : de l'eau se vaporise à pression constante, et le point figuratif se déplace de A en B (*fig.* 224) en décrivant une parallèle à l'axe des volumes. La vapeur est ensuite comprimée jusqu'au volume correspondant à la température 0° : le point figuratif décrit la droite BC. En C, la vapeur communique avec un condenseur à la température zéro : elle se condense à pression constante, et le point figuratif décrit la droite CD parallèle à l'axe Ov; enfin elle s'échauffe pour revenir à la température de 1°, et le point figuratif décrit la droite DA, qui ferme le cycle.

Fig. 224.



Cherchons, dans ces conditions, la valeur du coefficient économique.

L'aire du parallélogramme ABCD est $\Delta p \, \Delta v$; elle représente le travail extérieur (233) et équivaut à une quantité de chaleur ayant pour expression

$$Q_1 - Q_2 = \frac{1}{J} \Delta p \, \Delta v.$$

Si nous représentons par λ_1 la quantité de chaleur Q_1, le coefficient économique sera

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{\frac{1}{J} \Delta v \, \Delta p}{\lambda_1};$$

nous pouvons obtenir Δv en prenant le volume de 1^g de matière : à la pression de 760^{mm}, on a

$$\Delta v = \frac{1000}{0,804} \times \frac{760}{4,57};$$

on a de même

$$\Delta p = \frac{0,341}{760} \times 1033 \times 981$$

et

$$\lambda_1 = 605,805;$$

on trouve, de cette manière, pour valeur du coefficient économique,

$$0,003715.$$

C'est le coefficient économique *calculé au moyen des quantités de chaleur* Q_1 *et* Q_2, pour une machine thermique fonctionnant entre 0° et 1° de l'échelle centigrade.

Nous aurions pu calculer ce coefficient au moyen des températures absolues T_1 et T_2; nous aurions eu ainsi

$$\frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{274 - 273}{273} = \frac{1}{273},$$

$$\frac{T_1 - T_2}{T_1} = 0,00365;$$

il y a donc un accord satisfaisant entre les valeurs du coefficient économique calculé de ces deux manières.

248. — RAISONNEMENT DE CLAUSIUS.

Ainsi, grâce aux vérifications que l'on a pu en faire *a posteriori*, on peut considérer le principe de Carnot comme établi expérimentalement au même titre que le principe de l'équivalence.

Cependant, moyennant un *postulatum*, Clausius arrive à démontrer la nécessité du principe de Carnot. Ce *postulatum* est le suivant : *Il est impossible, sans dépense de travail, de faire passer de la chaleur d'un corps froid sur un corps chaud.* Nous allons reproduire rapidement ses raisonnements.

Imaginons deux machines thermiques (1) et (2), fonctionnant entre les mêmes limites de température; supposons qu'elles effectuent des travaux égaux, mais qu'elles transportent sur la source froide des quantités de chaleurs inégales Q_2 et Q'_2, Q_2 étant, par exemple, une quantité plus petite que Q'_2. Nous allons démontrer que cette hypo-

thèse est inadmissible et conduit à une conséquence contraire postulatum admis au commencement.

En effet, faisons marcher la machine (1) de façon qu'elle transforme de la chaleur en travail. Elle effectue un travail $\mathfrak{T}$ et apporte à source froide une quantité de chaleur Q_2.

Faisons marcher la machine (2) en sens inverse, de façon qu'elle transforme du travail en chaleur; elle transporte, au contraire, de la source froide à la source chaude, grâce à ce travail absorbé $\mathfrak{T}'$, une quantité de chaleur Q'_2.

Attelons maintenant les deux machines l'une à l'autre : l'état final sera identique à l'état initial, puisque, par hypothèse, les travaux $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$ sont égaux; mais on voit que, si l'on suppose, comme nous l'avons fait, $Q_2 < Q'_2$, une quantité de chaleur égale à $Q'_2 - Q_2$ aura été, gratuitement et sans dépense de travail, transportée *du corps froid au corps chaud*, et nous avons admis que cela était impossible.

Il faut donc nécessairement que, si $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}'$, l'on ait aussi $Q_2 = Q'_2$; de ces deux égalités il résulte que les coefficients économiques de deux machines sont aussi égaux, ce qui démontre le principe de Carnot.

249. — DÉFINITION NOUVELLE DE LA TEMPÉRATURE. TEMPÉRATURES ABSOLUES.

Nous allons faire voir qu'il est possible d'employer le principe de Carnot à donner une définition de la température indépendante de la nature du corps thermométrique.

Remarquons, pour cela, que le principe de Carnot est indépendant de celui de l'équivalence : rien ne nous aurait empêché de commencer l'étude de la chaleur par le principe de Carnot, qui ne suppose acquises d'autres notions que celle de températures inégales qui nous est fournie par les sens.

Imaginons une machine thermique *quelconque :* en vertu du principe de Carnot, son coefficient économique sera indépendant de la nature des corps dont elle utilise les transformations et ne dépendra que de l'intervalle des températures entre lesquelles elle fonctionne. La différence $\Theta_1 - \Theta_2$ des températures des corps chauds et des corps froids sera donc caractéristique du fonctionnement de la machine. Il est permis, par conséquent, de poser

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{\Theta_1 - \Theta_2}{\Theta_1},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{Q_1}{\Theta_1} = \frac{Q_2}{\Theta_2}.$$

Nous appellerons alors, par définition, Θ_1 et Θ_2 les *températures* du corps chaud et du corps froid.

Cette définition est parfaitement admissible ; elle permet de concevoir, par exemple, des températures égales, car, si $\Theta_1 = \Theta_2$, cette égalité se traduira par $Q_1 = Q_2$.

Une série d'intervalles de températures $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n$ sera donc caractérisée par le travail d'une machine thermique travaillant successivement entre Θ_1 et Θ_2, entre Θ_1 et Θ_3, ..., entre Θ_1 et Θ_n, et mettant en jeu des quantités de chaleur correspondantes : Q_1 empruntée chaque fois à la source chaude, et $Q_2, Q_3, \ldots, Q_n$ restituées successivement aux diverses sources froides ; on aura, dans tous les cas,

$$\frac{Q_1}{\Theta_1} = \frac{Q_2}{\Theta_2} = \ldots = \frac{Q_n}{\Theta_n};$$

les températures seront donc proportionnelles aux quantités de chaleur mises en jeu par une machine thermique, *quelle que soit la nature du corps* dont les transformations servent à son fonctionnement.

D'ailleurs, en définissant ainsi la température par des quantités de chaleur, en ramenant, en un mot, la thermométrie à la calorimétrie, on ne commet pas de cercle vicieux, des quantités de chaleur pouvant toujours se mesurer indépendamment d'un thermomètre, par des poids de glace fondue par exemple.

Si les températures ont été, au préalable, définies à l'aide du thermomètre à air, nous aurons

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\Theta_1}{\Theta_2} = \frac{T_1}{T_2}.$$

Les températures absolues seront donc proportionnelles aux températures indiquées par le thermomètre à air.

Il y a une infinité d'échelles thermométriques différentes ; mais il suffira de fixer l'une des températures pour que l'échelle soit entièrement déterminée. Fixons, par exemple, à $+273^\circ$ la température de la glace fondante. Nous aurons alors

$$\Theta_1 = T_1. \qquad \Theta_2 = T_2.$$

On nomme *zéro absolu* le zéro de l'échelle de température ainsi

déterminée, et qui s'appelle elle-même *échelle des températures absolues*.

On voit que les températures absolues sont définies par des rapports, comme les nombres proportionnels en Chimie, comme les intervalles musicaux en Acoustique.

La définition que nous avons donnée du zéro absolu ne préjuge, d'ailleurs, absolument rien relativement à son existence. On peut s'en approcher de plus en plus, mais asymptotiquement, et sans jamais l'atteindre; s'il existait, le rendement d'une machine thermique fonctionnant entre une température T quelconque et ce zéro serait $\frac{T}{T}$, c'est-à-dire l'unité : ce serait là la machine parfaite, utilisant toute la chaleur fournie par le corps chaud et ne transportant rien sur le corps froid.

Ce fait de ne pas pouvoir réaliser la température du zéro absolu ne doit, d'ailleurs, pas faire rejeter l'échelle absolue : il faudrait sans cela rejeter le système des nombres proportionnels, parce qu'il n'existe pas de corps simple dont le nombre proportionnel soit nul; il faudrait renoncer à la série des intervalles musicaux, parce qu'on ne connaît pas de son correspondant à un nombre nul de vibrations.

Une définition des températures telle que nous venons de la donner satisfait donc à toutes les exigences de la théorie; elle n'est, malheureusement, pas réalisable dans l'état actuel de la Science : on ne conçoit pas facilement, en effet, un moteur thermique servant de thermomètre. Dans la définition précédente, d'ailleurs, nous avons admis implicitement que la machine fournissait un rendement maximum et fonctionnait suivant un cycle de Carnot, dont les cycles réels s'écartent dans des proportions souvent considérables.

250. — EXPRESSION ANALYTIQUE DU PRINCIPE DE CARNOT.

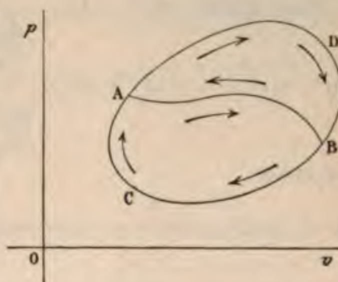
Proposons-nous maintenant de trouver une expression qui traduise analytiquement le principe de Carnot.

Considérons un cycle fermé et réversible ABCDA (*fig.* 225) sur lequel nous prenons deux points A et B réunis par une courbe arbitraire AB. Supposons que la transformation correspondant au trajet du point figuratif sur cette courbe soit réversible (nous pouvons toujours faire cette supposition, car la réversibilité ne saurait se traduire par une définition géométrique d'une courbe; une ligne quelconque tracée sur un plan représentera une transformation réversible ou ne

la représentera pas, suivant que l'on fera, relativement au milieu ambiant qui n'est susceptible d'aucune représentation graphique, telle ou telle hypothèse).

Faisons parcourir au corps soumis à la transformation les deux cycles CAB, BAD, dans le sens indiqué par les flèches : nous sommes, après ce dédoublement, dans les mêmes conditions qu'auparavant, car la ligne AB, parcourue une fois dans un sens et une fois dans l'autre, n'introduit que des termes nuls; mais nous avons remplacé le cycle entier ABCD, réversible par hypothèse, par deux cycles partiels réversibles séparément.

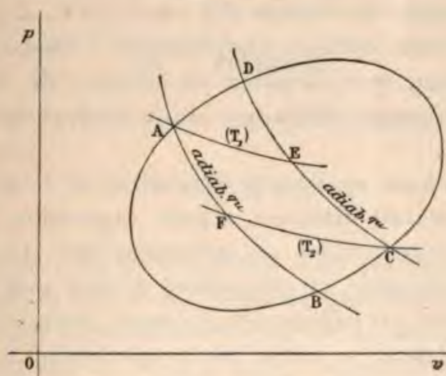
Fig. 225.



Nous pouvons pousser la décomposition encore plus loin : nous allons remplacer un cycle fermé et réversible par une infinité de cycles infiniment petits.

Prenons pour cela (*fig.* 226) un cycle fermé et réversible, et con-

Fig. 226.



sidérons une série d'adiabatiques et une série d'isothermes tracees dans son plan. Ces lignes décomposeront la surface de la courbe fermée en une infinité de polygones qui seront, les uns quadrilatéraux, comme AECF, les autres triangulaires, comme ADE ou BCF.

Considérons d'abord les cycles quadrilatéraux, tels que AECF.

Le long de l'isotherme AE, à température constante T_1, une quantité de chaleur dQ_1 est absorbée; le long de l'isotherme CF corres-

pondant à la température T_2, la quantité de chaleur mise en jeu est dQ_2; le coefficient économique d'une machine thermique fonctionnant entre T_1 et T_2 sera donc

$$\frac{dQ_1 - dQ_2}{dQ_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Nous tirons de là

$$\frac{dQ_1}{T_1} = \frac{dQ_2}{T_2}$$

ou

$$\frac{dQ_1}{T_1} - \frac{dQ_2}{T_2} = 0,$$

ou enfin

(1) $$\int \frac{dQ}{T} = 0.$$

Comme nous aurons une expression de cette forme pour tous les cycles de Carnot élémentaires analogues à AECF et contenus dans l'aire du cycle total, nous aurons pour l'ensemble de ces petits cycles

$$\sum \int \frac{dQ}{T} = 0.$$

Restent les cycles triangulaires tels que ADE. De A en D, le corps absorbe une quantité de chaleur dQ'; de D en E, il n'absorbe rien, puisque DE est une portion d'adiabatique, c'est-à-dire représente une transformation sans variation de chaleur; de E en A, il absorbe dQ_1. La somme algébrique de la chaleur mise en jeu est donc $dQ' - dQ_1$.

Si maintenant nous appliquons le principe de l'équivalence, nous voyons que le travail extérieur a pour expression l'aire du petit triangle ADE; cette aire est un infiniment petit du second ordre : elle est donc négligeable, ce qui permet de dire que le travail dont elle est l'expression est négligeable, lui aussi; mais, en vertu du principe de l'équivalence, ce travail est proportionnel à la quantité de chaleur mise en jeu, $dQ' - dQ_1$. Donc nous sommes en droit de négliger également cette dernière quantité et d'écrire

$$dQ' - dQ_1 = 0.$$

La température sur la ligne AD diffère d'ailleurs infiniment peu de la température T_1 de l'isotherme voisine. Divisons donc par T_1, il vient

$$\frac{dQ'}{T_1} - \frac{dQ_1}{T_1} = 0,$$

ce qui nous donne, pour le petit cycle triangulaire,

$$\int \frac{dQ}{T} = 0.$$

ar conséquent, cette dernière relation pouvant s'appliquer à tous les rcles élémentaires, quelle que soit leur forme, s'applique à leur mme, c'est-à-dire au cycle tout entier.

On aura donc, pour tout cycle fermé et réversible, la relation

$$\int \frac{dQ}{T} = 0.$$

Remarque. — Il est donc bon d'insister sur un point délicat de la monstration précédente.

A quel moment nous sommes-nous servis de l'hypothèse que le cle total était réversible? C'est quand nous avons considéré le petit cle triangulaire et que nous avons dit qu'il y avait égalité entre xpression numérique de sa surface et l'expression numérique du avail correspondant : cela supposait le petit cycle réversible, et en rticulier le côté AD, portions du cycle total. On n'aurait pas eu droit d'appliquer cette propriété si le cycle entier n'avait pas été versible.

251. — ENTROPIE.

Nous venons de voir que, pour tout cycle fermé et réversible, nous ions la relation

$$\int \frac{dQ}{T} = 0.$$

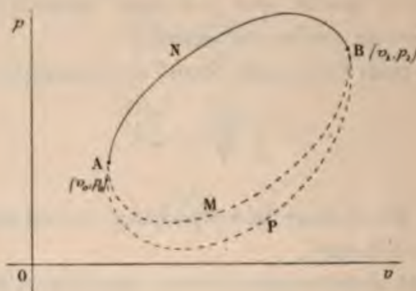
renons maintenant un cycle *ouvert*, mais réversible. En général, our un tel cycle, la valeur de l'intégrale précédente sera différente zéro; mais nous allons démontrer qu'elle ne dépend que de l'état itial et de l'état final du corps, et qu'elle est indépendante du chemin rcouru par le point figuratif entre les points du plan qui correspndent à ces deux états.

Soit une courbe AB (*fig.* 227) correspondant à une transformation versible. Je dis que la valeur de l'intégrale précédente, quand on de A en B par le chemin ANB, sera la même que si l'on va de A B par tout autre chemin, tel que AMB ou APB.

En effet, désignons par + M la valeur de cette intégrale quand on de A en B par le chemin AMB; fermons le cycle par une portion

de courbe réversible quelconque ANB : pour le cycle entier, l'inté-
grale est nulle; donc il faut qu'elle ait une valeur — M quand on revient de B en A par la ligne BNA. Mais nous savons que, si nous revenons de B en A par le chemin primitif parcouru en sens inverse

Fig. 227.



BMA, la valeur de l'intégrale sera égale et de signe contraire à la valeur correspondant au sens direct : elle sera donc — M; donc, pour aller de B en A, qu'on décrive la trajectoire BMA ou la trajectoire BNA, l'intégrale $\int \frac{dQ}{T}$ aura toujours la même valeur — M.

Il résulte de là que cette intégrale est une fonction des coordonnées des deux points extrêmes A et B; la quantité sous le signe $\int$ est donc la différentielle exacte d'une certaine fonction $\mathcal{S}$ de ces coordonnées, et nous aurons

$$\frac{dQ}{T} = d\mathcal{S}.$$

Cette fonction $\mathcal{S}$ a reçu un nom : on l'appelle l'*entropie*. L'entropie n'a, malheureusement, pas de signification physique; elle n'est donc pas susceptible de mesure directe.

En tous cas, pour exprimer analytiquement le principe de Carnot, nous formerons l'expression de dQ; nous la diviserons par la valeur de T, et nous exprimerons que l'expression résultante doit être une différentielle exacte, comme nous l'avons indiqué dans le cas du principe de l'équivalence. Nous aurons ainsi une équation de condition.

Nous sommes donc en mesure, à présent, d'exprimer analytiquement, dans nos calculs, les deux principes fondamentaux de la Thermodynamique. Quand nous aurons écrit les deux équations correspondantes, nous aurons épuisé les ressources de la Thermodynamique; mais, en revanche, nous verrons que nous pourrons toujours

éduire de l'ensemble de ces deux équations la valeur d'une constante hysique ; nous rendrons, par là même, inutile l'expérience qui sert mesurer directement cette constante, et si, malgré cela, nous faisons ette expérience, elle nous fournira une vérification intéressante de 'exactitude de nos deux principes.

Nous en donnons quelques exemples plus loin.

252. — FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES.

Potentiel thermodynamique. Transformations irréversibles. — Dès 1873, Massieu a démontré que l'on peut exprimer tous les coefficients mécaniques et thermiques d'un corps au moyen de deux fonctions, l'une des variables v et T, l'autre des variables p et T, auxquelles il a donné le nom de *fonctions caractéristiques*. L'étude de ces fonctions a été reprise et étendue par Helmholtz, Gibbs et M. Duhem, qui en ont fait des applications extrêmement intéressantes, notamment dans l'étude des équilibres physiques et chimiques.

Les fonctions caractéristiques de Massieu sont

$$H(v, T) = TS - U,$$
$$H'(p, T) = TS - U + \frac{1}{E} pv.$$

L'*énergie libre* $\mathfrak{F}$ de Helmholtz, la fonction ψ de Gibbs, le potentiel thermodynamique sous volume constant de M. Duhem désignent le produit de H par — E

$$\mathfrak{F} = \psi = E(U - TS).$$

La fonction ζ de Gibbs, le potentiel thermodynamique sous pression constante Φ de M. Duhem désignent

$$\zeta = \Phi = E(U - TS) + pv = -EH.$$

A titre d'exemple, nous allons montrer comment la pression p, l'entropie S, le coefficient d'augmentation de pression β, le coefficient de compressibilité γ s'expriment en fonction de $\mathfrak{F}$ et de ses dérivées.

Nous avons

$$(1) \qquad \frac{d\mathfrak{F}}{dt} = E\left(\frac{dU}{dt} - S - T\frac{dS}{dt}\right),$$

$$(2) \qquad \frac{d\mathfrak{F}}{dv} = E\left(\frac{dU}{dv} - T\frac{dS}{dv}\right).$$

D'autre part

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T}\left(dU + \frac{1}{E}\,pdv\right)$$

ou

(3) $$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{T}\,\frac{dU}{dT},$$

(4) $$\frac{dS}{dv} = \frac{1}{T}\left(\frac{dU}{dv} + \frac{1}{E}p\right).$$

Remplaçons dans l'équation (1) $T\,\frac{dS}{dt}$ par sa valeur $\frac{dU}{dt}$ tirée de il vient

$$\frac{d\mathfrak{F}}{dt} = S.$$

De même, en éliminant $\frac{dS}{dv}$ entre (2) et (4), il viendra

$$E\,\frac{d\mathfrak{F}}{dv} = p.$$

Le coefficient β est, par définition,

$$\beta = \frac{1}{p}\,\frac{dp}{dt} = \frac{\frac{d^2\mathfrak{F}}{dv\,dt}}{\frac{d\mathfrak{F}}{dv}},$$

le coefficient γ

$$\gamma = -\frac{1}{v}\,\frac{dv}{dp} = -\frac{1}{vE\,\frac{d^2\mathfrak{F}}{dv^2}}.$$

Il est aisé de calculer d'une manière analogue l'expression du c ficient de dilatation α et des chaleurs spécifiques C et c, en fai usage de la relation

$$\frac{dv}{dp}\,\frac{dp}{dt} = -\frac{dv}{dt}.$$

En effet,

$$\alpha = -\frac{1}{v}\left(\frac{dv}{dt}\right)_{p=\text{const.}}$$

$$0 = dp = \frac{dp}{dv}\,dv + \frac{dp}{dt}\,dt,$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\frac{dp}{dt}}{\frac{dp}{dv}},$$

$$\alpha = \frac{1}{v}\,\frac{\frac{dp}{dt}}{\frac{dp}{dv}} = \frac{1}{v}\,\frac{\frac{d^2\mathfrak{F}}{dv\,dt}}{\frac{d^2\mathfrak{F}}{dv^2}}.$$

Pour la chaleur spécifique C,

$$C = \left(\frac{dQ}{dt}\right)_p = \frac{dU}{dt} + \frac{p}{E}\frac{dv}{dt}.$$

Or, d'après l'équation (3),

$$\frac{dU}{dt} = T\frac{dS}{dt} = T\frac{d^2\mathfrak{F}}{dt^2}.$$

Par suite

$$C = T\frac{d^2\mathfrak{F}}{dt^2} + \frac{d\mathfrak{F}}{dv}\,\frac{\dfrac{d^2\mathfrak{F}}{dv\,dt}}{\dfrac{d^2\mathfrak{F}}{dv^2}}.$$

Enfin on a vu [p. 394, éq. (5)] que

$$C - c = -h\frac{dp}{dt},$$

$$h = \frac{T}{E}\,\frac{\dfrac{dp}{dt}}{\dfrac{dp}{dv}},$$

d'où

$$C - c = -\frac{T}{E}\frac{dp}{dt}\,\frac{\dfrac{dp}{dt}}{\dfrac{dp}{dv}} = T\,\frac{\left(\dfrac{d^2\mathfrak{F}}{dv\,dt}\right)^2}{\dfrac{d^2\mathfrak{F}}{dt^2}}.$$

Transformations irréversibles. Travail non compensé. — Considérons un cycle qui ne soit pas entièrement réversible : le rendement de ce cycle ne peut qu'être inférieur, d'après le théorème de Carnot, à celui d'un cycle réversible.

Supposons que le système emprunte à une source T_1 la quantité de chaleur T_1 et cède à une source T_2 une quantité de chaleur Q_2, nous aurons

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} < \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

d'où

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} < 0.$$

Si nous regardons comme positifs les quantités de chaleur *cédées* par le système et le travail *reçu*, pour nous conformer aux notations des auteurs ci-dessus cités, il faudra écrire

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} > 0.$$

Dans le cas général, on déduira de là

$$\int \frac{dQ}{T} > 0.$$

Soit maintenant une transformation irréversible qui fait passer le système d'un état (1) à un état (2). Ramenons le système à son état primitif (1) par une transformation réversible, nous formons ainsi un cycle irréversible pour lequel

$$\int \frac{dQ}{T} > 0.$$

Or

$$\int \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{dQ}{T} + \int_2^1 \frac{dQ}{T}.$$

Mais la deuxième intégrale, relative à une transformation réversible, est indépendante de cette transformation et égale à la différence $S_2 - S_1$ des valeurs de l'entropie correspondant aux écarts (1) et (2) du système. Nous pourrons donc écrire

$$(2) \qquad \int_1^2 \frac{dQ}{T} + S_2 - S_1 > 0$$

ou

$$\int_1^2 \frac{dQ}{T} > S_1 - S_2.$$

Ainsi, dans une transformation irréversible, l'intégrale $\int \frac{dQ}{T}$ est plus grande que la variation de l'entropie.

La somme (2) est ce que Clausius appelle la somme des *transformations non compensées*.

Clausius a fait remarquer en effet que, dans un cycle réversible, à toute transformation représentée par un terme $\frac{dQ}{T}$ correspond une autre transformation représentée par $-\frac{dQ}{T}$, et c'est sous cette forme que $\int \frac{dQ}{T}$ s'annule. Dans une série de modifications qui ne sont pas toutes réversibles, un certain nombre de transformations restent sans transformations inverses correspondantes et leur somme est représentée par l'expression (2).

Transformations isothermiques. — Si toutes les transformations se font à température constante, la somme (2) représente une quantité

de travail

$$\mathfrak{T} = E\left[\int dQ + T(S_2 - S_1)\right]$$

que nous appellerons *travail non compensé*.

Remplaçons dQ par sa valeur

$$dQ = -dU + \frac{1}{E} p\, dv,$$

il vient

$$\mathfrak{T} + \quad E\left[\int - dU + T(S_2 - S_1)\right] + \int p\, dv,$$

$$\mathfrak{T} = \quad E\left[-(U_2 - U_1 + T(S_2 - S_1)\right] + \int p\, dv,$$

$$= -E\left[+U - TS\right]_1^2 + \int p\, dv.$$

Supposons $dv = 0$,

$$\mathfrak{T} = -E(U - TS)_1^2 = -E(\mathfrak{F}_2 - \mathfrak{F}_1).$$

Supposons $p = \text{const.}$,

$$\mathfrak{T} = -E(U - TS)_1^2 + (pv)_1^2 = -E(\Phi_2 - \Phi_1).$$

Le travail non compensé est donc égal à la variation changée de signe du potentiel thermodynamique.

Comme $\mathfrak{T}$ est toujours positif, le potentiel thermodynamique ne peut que décroître quand le système subit une modification isothermique.

Si la modification isothermique est réversible, le potentiel thermodynamique reste constant.

Si le potentiel thermodynamique est minimum, le système est en équilibre stable.

Nous avons établi ces propriétés dans le cas où l'état du système et par suite le potentiel thermodynamique sont fonctions seulement de deux variables indépendantes. Mais elles sont générales, quel que soit le nombre des variables, et c'est justement ce qui en fait l'extrême importance dans l'étude des phénomènes d'équilibre complexes.

CHAPITRE IV.

APPLICATIONS.

253. — CALCUL DE LA CHALEUR DE DILATATION l ; ÉQUATION DE CLAPEYRON.

Prenons comme cas particulier celui où les variables sont le volume et la température ; la quantité élémentaire de chaleur nécessaire pour produire une variation dv de volume et, en même temps, une variation dt de température, est

$$dQ = c\,dt + l\,dv.$$

Appliquons d'abord le principe de l'équivalence.

Pour cela, formons l'expression du travail intérieur

$$d\mathcal{E} = J\,dQ - d\mathcal{T},$$

en remarquant que l'élément de travail extérieur $d\mathcal{T}$, qui accompagne la variation de volume dv, a pour expression

$$d\mathcal{T} = p\,dv\,;$$

nous avons

$$d\mathcal{E} = J\,c\,dt + (J\,l - p)\,dv\,;$$

pour que le second membre soit une différentielle exacte, il faut que l'on ait

$$\frac{d(J\,c)}{dv} = \frac{d(J\,l - p)}{dt}$$

et, puisque J est une constante,

$$(1) \qquad J\left(\frac{dl}{dt} - \frac{dc}{dv}\right) = \frac{dp}{dt}.$$

Appliquons, en second lieu, le principe de Carnot : il suffit de

former la valeur de $d\mathcal{S}$ ($\mathcal{S}$ représentant l'entropie) et d'exprimer que c'est une différentielle exacte :

$$d\mathcal{S} = \frac{dQ}{T},$$

$$d\mathcal{S} = \frac{c}{T}\,dt + \frac{l}{T}\,dv,$$

T étant défini par la relation $T = t + 273$. Il en résulte que $dt = dT$, et que T sera une des variables.

Pour que le second membre soit une différentielle exacte, il faut que l'on ait

$$\frac{d\left(\frac{c}{T}\right)}{dv} = \frac{d\left(\frac{l}{T}\right)}{dt}$$

ou

$$\frac{1}{T}\frac{dc}{dv} = \frac{1}{T}\frac{dl}{dt} - \frac{l}{T^2},$$

ou enfin

(2) $$\frac{l}{T} = \frac{dl}{dt} - \frac{dc}{dv};$$

nous avons donc appliqué les deux principes, traduits par les relations (1) et (2). Combinons ces deux relations, il vient

(3) $$l = \frac{T}{J}\frac{dp}{dt}:$$

c'est l'*équation de Clapeyron*.

Grâce à l'application de nos deux principes, nous pouvons calculer l, chaleur de dilatation, au moyen d'une seule variation de pression $\frac{dp}{dt}$, dans une expérience faite à volume constant.

254. — ÉTUDE DU COEFFICIENT h.

Prenons maintenant comme variables la température et la pression : l'expression élémentaire de la quantité de chaleur devient

$$dQ = C\,dt + h\,dp.$$

En appliquant successivement les deux principes de l'équivalence et de Carnot, nous calculerions par une méthode analogue l'expression du coefficient h.

On peut y arriver directement : en effet, nous avons démontré

$$h = l\,\frac{dv}{dp};$$

substituons à l la valeur que nous venons de trouver, il vient

$$h = \frac{T}{J}\,\frac{dv}{dp}\,\frac{dp}{dt}.$$

mais

(m) $$\frac{dv}{dp}\,\frac{dp}{dt} = -\frac{dv}{dt};$$

nous avons donc

$$h = -\frac{T}{J}\,\frac{dv}{dt},$$

qui nous fait connaître le coefficient h.

Remarque. — On établit facilement la relation (m). Les trois variables p, v, t sont en effet reliées par la relation

$$f(p, v, t) = 0,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{df}{dp}\,dp + \frac{df}{dv}\,dv + \frac{df}{dt}\,dt = 0,$$

et, en supposant successivement dp, dv et dt nuls, on a

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\frac{df}{dt}}{\frac{df}{dv}}, \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{\frac{df}{dt}}{\frac{df}{dp}}, \qquad \frac{dv}{dp} = -\frac{\frac{df}{dp}}{\frac{df}{dv}}.$$

On a donc

$$\frac{dv}{dp}\,\frac{dp}{dt} = \frac{\frac{df}{dp}}{\frac{df}{dv}}\,\frac{\frac{df}{dt}}{\frac{df}{dp}} = \frac{\frac{df}{dt}}{\frac{df}{dv}} = -\frac{dv}{dt}.$$

256. — VÉRIFICATIONS EXPÉRIMENTALES. — EXPÉRIENCES DE JOULE.

Des expériences très intéressantes, dues à Joule, ont été faites dans le but de vérifier ces formules, à l'aide de la compression des liquides.

Opérons dans une enceinte imperméable à la chaleur. La transformation sera adiabatique, et nous aurons

$$C\,dt - h\,dp = 0.$$

plutôt, comme les accroissements donnés aux variables, quoique très petits, seront toujours, physiquement, finis,

$$C\,\Delta t + h\,\Delta p = 0,$$

d'où

$$\Delta t = -\frac{h}{C}\Delta p;$$

remplaçons h par sa valeur, il vient

$$(4)\qquad \Delta t = \frac{JC}{T}\frac{dv}{dt}\Delta p.$$

Toutes les quantités de cette formule sont accessibles à l'expérience.

Voici comment Joule effectua ses mesures.

Il comprimait fortement de l'eau dans un vase de cuivre, et mesurait l'accroissement de température que la compression déterminait dans l'eau à l'aide d'un élément thermo-électrique fer-cuivre plongé au centre de la masse liquide, et dont il avait fait une étude préalable. Des expériences préliminaires lui avaient permis de déterminer les erreurs systématiques ou de les éliminer.

Il prit, dans ses expérienees sur l'eau, $\Delta p = 26^{kg},19$.

Voici les résultats qu'il obtint :

Température initiale T.	Δt observé.	Δt calculé.
°	°	°
1,2........	$-0,0083$	$-0,0071$
5..............	$+0,0044$	$+0,0041$
11,7............	$+0,0205$	$+0,0197$
30.........	$+0,0544$	$+0,0563$

Les valeurs de Δt obtenues par le calcul et l'expérience présentent un accord bien remarquable, si l'on songe à la difficulté de pareilles expériences.

On voit de plus que, au-dessous de 4°, la compression produit, non un échauffement, mais un refroidissement. On peut déduire ce résultat de la formule (4) : si le corps se contracte quand on l'échauffe (et c'est le cas de l'eau entre 0° et 4°), $\frac{dv}{dt}$ est négatif, donc Δt doit être négatif. On voit que l'expérience vérifie cette conclusion. Au contraire, quand le corps (et c'est le cas général) se dilate par échauffement, Δt doit être positif : la formule le prévoit et l'expérience le montre.

Joule a vérifié également les résultats de la théorie dans le cas des corps solides, en étudiant les phénomènes thermiques qui se pro-

duisent quand on les soumet à des efforts de traction. C'est le problème dont nous avons commencé l'étude (242).

Comme le phénomène est réversible si l'on ne dépasse pas la limite d'élasticité, nous pourrons appliquer nos deux principes. Nous avons donné l'expression du principe de l'équivalence.

En effectuant des calculs analogues aux précédents pour exprimer le principe de Carnot, nous arriverons à une expression de la chaleur latente λ d'allongement du fil,

$$\lambda = \frac{T}{J}\frac{dp}{dt}.$$

λ est positif pour la plupart des corps ; Joule l'a constaté par des expériences directes, dans lesquelles il mesurait à l'aide d'un couple thermo-électrique la température du fil. Un fil qu'on allonge se refroidit, comme on le constate par l'expérience : le caoutchouc, pourtant, fait exception, et s'échauffe sensiblement quand on l'étire.

256. — ÉTUDE DE LA VAPORISATION ET DE LA FUSION.

Nous allons montrer maintenant comment on peut appliquer aux phénomènes de changements d'état les principes de Thermodynamique. Nous allons d'abord nous occuper de la vaporisation.

1° **Vaporisation**. — Considérons une masse de liquide égale à l'unité et mettons-la en communication avec un espace vide de capacité convenable : elle donnera naissance à une vapeur qui, à une température t, aura une force élastique maxima p, fonction de la température. A cette même température t le liquide aura un volume spécifique u et la vapeur un volume spécifique u' : u et u' sont fonctions de la température.

Pour vaporiser 1^g de liquide, il faut lui fournir une quantité de chaleur L (L est la chaleur latente de vaporisation) ; pour échauffer 1^g de liquide de 1°, en imposant la condition que sa vapeur reste saturante, il faudra lui fournir une quantité de chaleur m qui n'est pas la chaleur spécifique sous pression constante, puisque la force élastique de la vapeur qui surmonte le liquide croît avec la température. Enfin, pour élever de 1° la température de 1^g de vapeur, il faut lui fournir une quantité de chaleur m' qui, pour la même raison, n'est pas la chaleur spécifique de la vapeur sous son volume constant.

Les six quantités p, u, u', L, m, m' ne sont donc fonctions que de la température.

Cela posé, prenons une masse liquide de 1g et offrons-lui un espace [vi]de : une portion x de liquide se vaporise, et il en reste une quan[ti]té $1 - x$. Nous aurons donc un mélange de liquide et de vapeur [a]uquel nous allons faire subir une transformation réversible et faisant [v]arier t de dt et x de dx.

La masse du liquide restant étant $1 - x$, la quantité de chaleur qu'il [f]aut lui fournir pour augmenter sa température de dt est $m(1 - x)\,dt$. Pour élever de t à $t + dt$ la température de la masse x de vapeur, il faut, de même, lui fournir une quantité de chaleur $m'x\,dt$; mais, en faisant cela, nous avons augmenté de dx la masse de vapeur, et cette augmentation a nécessité l'intervention d'une troisième quantité de chaleur $L\,dx$. Nous aurons donc, aux infiniment petits du second ordre près,

$$dQ = m(1 - x)\,dt + m'x\,dt + L\,dx.$$

Appliquons d'abord le principe de Carnot. On doit avoir

$$dS = \frac{dQ}{T} = \text{une différentielle exacte},$$

$$\frac{dQ}{T} = \frac{m(1 - x) + m'x}{T}\,dt + \frac{L}{T}\,dx.$$

Pour que le second membre soit une différentielle exacte, il faut [q]ue l'on ait

$$\frac{d\left[\frac{m(1 - x) + m'x}{T}\right]}{dx} = \frac{d\left[\frac{L}{T}\right]}{dt};$$

[t] est d'ailleurs une des variables indépendantes, car on a

$$T = t + 273,$$

[e]t m et m' ne sont fonctions que de t seulement. Effectuons la diffé[r]entiation indiquée

$$\frac{1}{T}(m' - m) = \frac{1}{T}\frac{dL}{dt} - \frac{L}{T^2}$$

ou

(1) $$\frac{dL}{dt} + m - m' = \frac{L}{T}.$$

Nous pouvons tirer de là la valeur de m'. Il vient

$$m' = \frac{dL}{dt} + m + \frac{L}{T}.$$

Si l'on calcule m' pour la vapeur d'eau à 58°,2, on trouve

$$m' = -1,406.$$

Donc, si nous prenons 1g de vapeur d'eau à 58° et que nou
lions le porter à 59° en maintenant cette vapeur saturante,
faudra pas lui fournir de chaleur : c'est au contraire la vapeur
dégagera.

Nous tirons de là une conséquence importante : la vapeu
comprimée se surchauffe et la vapeur d'eau *détendue se con*
de là la nécessité de purger de temps en temps le cylind
machines à vapeur de l'eau de condensation provenant des d
successives de la vapeur.

Les phénomènes inverses se produisent pour la vapeur d
comme cela résulte d'expériences faites par Hirn.

Appliquons maintenant le principe de l'équivalence ; fo
l'expression de $d\mathcal{E}$,

$$d\mathcal{E} = \mathrm{J}\, dQ - d\mathfrak{T},$$

et exprimons qu'elle est une différentielle exacte. $d\mathfrak{T}$ est le
extérieur $p\,dv$ qui s'est produit pendant la variation.

Le volume v provient du poids $(1-x)$ de liquide et du poi
vapeur. Le volume de $1-x$ est $u(1-x)$; celui de x est $u'x$
donc

$$v = (1-x)u + xu' ;$$

comme les variables sont t et x, il faut prendre l'expression de

$$dv = \frac{dv}{dt}\,dt + \frac{dx}{dv}\,dx.$$

Nous avons, en différentiant la valeur de v,

$$\frac{dv}{dt} = (1-x)\frac{du}{dt} + x\frac{du'}{dt}$$

et

$$\frac{dv}{dx} = u' - u ;$$

nous aurons donc, pour expression du travail $d\mathfrak{T} = p\,dv$,

$$d\mathfrak{T} = p\left[(1-x)\frac{du}{dt} + x\frac{du'}{dt}\right]dt + p(u'-u)\,dx.$$

Formons maintenant l'expression de $d\mathcal{E}$:

$$d\mathcal{E} = \Big\{ \mathrm{J}[m(1-x) + m'x] - p\left[(1-x)\frac{du}{dt} + x\frac{du'}{dt}\right]\Big\} dt$$
$$+ [\mathrm{J}\,\mathrm{L} - p(u'-u)]\,dx.$$

Exprimons que le second membre est une différentielle exacte ; nous aurons l'équation de condition

$$\mathrm{J}(m'-m) - p\left(\frac{du'}{dt} - \frac{du}{dt}\right) = \mathrm{J}\frac{d\mathrm{L}}{dt} - (u'-u)\frac{dp}{dt} - p\left(\frac{du'}{dt} = \frac{du}{dt}\right).$$

Supprimons les termes communs, il reste

$$(2) \qquad \mathrm{J}\left(\frac{d\mathrm{L}}{dt} + m - m'\right) = (u'-u)\frac{dp}{dt}.$$

Comparons l'équation (2) et l'équation (1); éliminons la quantité entre parenthèses, il vient

$$\mathrm{J}\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}} = (u'-u)\frac{dp}{dt},$$

d'où nous tirons

$$(3) \qquad \mathrm{L} = \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{J}}(u'-u)\frac{dp}{dt}.$$

Il est intéressant de comparer la valeur de L ainsi calculée à celle que Regnault a déterminée par l'expérience.

Pour connaître u, il suffit d'étudier la dilatation de l'eau. u' est connu grâce aux travaux de Fairbairn et Tate et à ceux plus récents de M. Pérot; quant à p, on prendra sa valeur dans la formule empirique de Regnault, dont on calculera la dérivée pour avoir $\frac{dp}{dt}$.

On trouve ainsi

$$\mathrm{L} = 537,$$

valeur qui concorde remarquablement avec celle que Regnault a trouvée par ses mesures.

2° **Fusion**. — Comme la vaporisation, la fusion est un phénomène éversible ; comme dans le cas de la vaporisation, l'influence de la ression se fera sentir, mais elle sera plus difficile à mettre en vidence.

Tous les raisonnements que nous avons faits, tous les calculs que ous avons développés dans le cas de la vaporisation peuvent être épétés dans le cas de la fusion ; les notations même demeurent

identiques, pourvu que l'on convienne de représenter par volume spécifique du corps à l'état solide, et par u' le volume s fique du corps à l'état liquide.

Nous obtiendrons ainsi, pour valeur de la chaleur latente de fu l'expression

$$L = \frac{T}{J}(u' - u)\frac{dp}{dt},$$

p étant la pression correspondant à la température de fusion t.

257. — ÉTUDE DES GAZ RÉELS.

Nous savons déjà que les gaz réels ne suivent pas la loi de Mar Il est nécessaire de chercher de plus si le travail intérieur, dan gaz, est nul : c'est ce que Joule a fait dans deux expériences célè

Il a pris d'abord deux réservoirs résistants H et H' (*fig.* 228) muniquant entre eux par un tube à robinet et contenus dan même calorimètre, dans lequel était une assez faible masse d'ea réservoir H contenait de l'air fortement comprimé, tandis que, le réservoir H', on avait fait le vide aussi parfaitement que possi

Les choses étant ainsi disposées, on ouvrait le robinet et le g détendait de H en H'; or, dans ces conditions, Joule n'a ob aucune élévation sensible de température dans l'eau du calorim

Fig. 228.



Fig. 229.



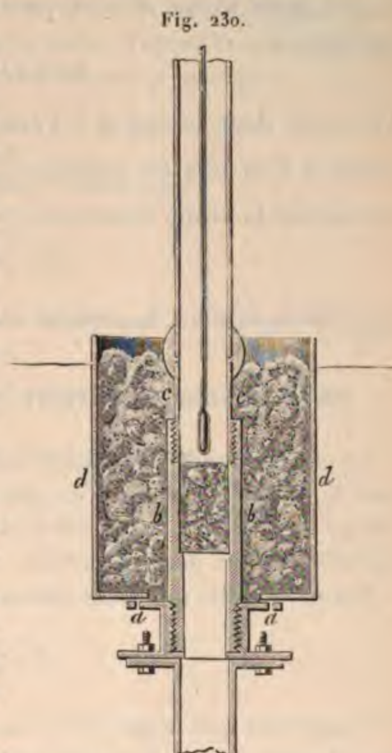
Il pensa donc qu'il n'y avait pas de chaleur dégagée penda détente d'un gaz n'accomplissant aucun travail extérieur. Une sec expérience acheva de l'éclairer sur ce sujet.

Il reprit ses deux réservoirs H et H', l'un vide, l'autre plein comprimé; mais, au lieu de les plonger tous deux dans le m calorimètre, il les mit dans deux calorimètres différents (*fig.* Il constata alors, en ouvrant le robinet, que l'un des calorim

se refroidissait d'une quantité exactement égale à celle dont s'échauffait l'autre.

Il conclut de là que le travail intérieur dans le gaz était, sinon nul, du moins tellement petit, que sa mesure directe n'était pas accessible à l'expérience sous la forme précédente. Craignant que les deux dispositifs que nous venons de décrire ne se prêtassent pas à une précision suffisante, il fit, en commun avec Sir W. Thomson, une troisième expérience que nous allons rappeler : cette expérience consiste à faire écouler par pression une masse de gaz à travers un tampon de coton poreux (*fig.* 230).

Fig. 230.



L'appareil était soigneusement mis à l'abri de l'échauffement ou du refroidissement extérieur par un manchon rempli de duvet de cygne *dd*. Un thermomètre très sensible, placé à la sortie du gaz, indiquait les moindres variations de température. Dans ces conditions, on constatait toujours un abaissement de température au thermomètre. Nous allons voir que l'on peut en déduire la variation de l'énergie interne, ΔU.

Supposons le régime permanent établi et considérons l'unité de masse du gaz; représentons par p' et v' la pression et le volume de cette masse avant son passage à travers le tampon poreux, par p'' et v'' la pression et le volume après le passage, et par Δt l'abaissement thermométrique.

Si nous voulions ramener le gaz à la température t sous la pression p'', il faudrait lui fournir une quantité de chaleur égale à $C\Delta t$. D'ailleurs, le travail extérieur accompli par le gaz est $\int p\,dv$ ou $p''v'' - p'v'$. Nous aurons donc, en écrivant qu'il y a équivalence entre la chaleur et le travail,

$$\text{(1)} \qquad J C \Delta t = \Delta U + p''v'' - p'v'.$$

Cette équation fait connaître ΔU.

Mais nous pouvons remarquer ici que le principe de Carnot nous a fourni la valeur du coefficient l :

$$l = \frac{T}{J}\frac{dp}{dt}, \tag{2}$$

et que nous avons obtenu pour valeur de la variation d'énergie interne

$$\Delta U = (J\,l - p)\Delta v.$$

ΔU serait donc connu si l l'était ; et, d'après la relation (2), l le serait si l'on pouvait calculer $\frac{dp}{dt}$; c'est-à-dire, en somme, si l'on connaissait la forme exacte de la fonction

$$f(v, p, t) = 0$$

qui relie le volume, la pression et la température d'un gaz réel.

258. — EXPRESSION COMPLÈTE DE J DANS LE CAS DES GAZ RÉELS.

La conséquence des expériences de Joule et Thomson est donc que le travail intérieur n'est pas nul dans les gaz réels : cela nous oblige à modifier l'expression de l'équivalent J que nous avions calculée à l'aide des gaz parfaits.

On se rappelle que nous étions arrivés à la valeur

$$J = \frac{p_0 v_0 \alpha}{C - c},$$

en supposant que le gaz suivît exactement les lois de Mariotte et de Gay-Lussac, et que le travail intérieur y fût nul.

Prenons, au contraire, un gaz réel : il suffira, pour le différentier d'avec un gaz parfait, de dire que, par exemple, son travail intérieur est différent de zéro.

Considérons donc un kilogramme de gaz placé dans un corps de pompe et y occupant le volume v_0 sous la pression p_0, à la température de 0°. Partons de la température initiale 1°, la pression étant toujours p, le volume sera $v_0(1 + \alpha)$. Pour ramener le gaz à pression constante, à son volume primitif, le piston s'abaissera à mesure que la température diminuera ; la diminution de volume sera $v_0\alpha$; la pression étant p_0, le travail sera $p_0 v_0 \alpha = \mathfrak{T}$.

La quantité de chaleur dégagée est C ; mais, pour fermer le cycle, il faut revenir à l'état initial p, et $v_0(1 + \alpha)$. Pour cela, échauffons

ɔord le gaz à volume constant; il faut lui fournir une quantité de leur c. La chaleur mise en jeu est donc de la chaleur absorbée, t-à-dire $-c$. Le gaz est maintenant à 1° sous p_0 et v_0. Il faut lui rir un espace vide égal à $v_0 \alpha$ pour qu'il revienne au volume nitif; mais il va se détendre sans produire de travail, et dégagera quantité de chaleur ε qui n'est pas nulle, d'après l'expérience de le et Thomson; la quantité Q de chaleur totale est donc

$$Q = C - c + \varepsilon,$$

ıous avons, en définitive, pour valeur exacte de J,

$$J = \frac{p_0 v_0 \alpha}{C - c + \varepsilon}.$$

ıtefois l'erreur que l'on commet en négligeant ε n'est que de $\frac{1}{500}$ ır l'air et de $\frac{1}{1200}$ pour l'hydrogène.



CHANGEMENTS D'ÉTAT.

CHAPITRE I.

GÉNÉRALITÉS.

Vers 1790, Lavoisier publiait dans un de ses Mémoires le passage suivant, qui est resté célèbre :

« Considérons un moment ce qui arriverait aux différentes substances qui composent le globe si la température en était brusquement changée.

» Supposons, par exemple, que la Terre se trouvât transportée tout à coup dans une région beaucoup plus chaude du système solaire, dans une région, par exemple, où la chaleur habituelle serait fort supérieure à celle de l'eau bouillante : bientôt l'eau, tous les liquides susceptibles de se vaporiser à des degrés voisins de l'eau bouillante et plusieurs substances métalliques même entreraient en expansion et se transformeraient en fluides aériformes.... On pourrait examiner ce qui arriverait dans cette hypothèse aux pierres, aux sels, à la plus grande partie des substances fusibles qui composent le globe; on conçoit qu'elles se ramolliraient, qu'elles entreraient en fusion et formeraient des liquides.... Par un effet contraire, si la Terre se trouvait placée tout à coup dans des régions très froides, par exemple de Jupiter et de Saturne, l'eau qui forme aujourd'hui nos fleuves et nos mers et probablement le plus grand nombre des liquides que nous connaissons, se transformeraient en montagnes solides, en rochers très durs.... L'air, dans cette supposition, ou tout au moins une partie des substances qui le composent, cesseraient sans doute d'exister dans l'état de fluide invisible, faute d'un degré de chaleur suffi-

sant; il reviendrait donc à l'état de liquidité, et ce changement produirait de nouveaux liquides dont nous n'avons aucune idée.

» Ainsi *solidité, liquidité, fluidité aériforme* sont trois états différents de la même matière, trois modifications particulières par lesquelles presque toutes les substances peuvent successivement passer. »

Si l'on se reporte à l'état de la Physique et de la Chimie à l'époque où ces idées étaient émises, on conçoit sans peine qu'une semblable prédiction ait dû passer pour simple jeu d'imagination. Aujourd'hui l'expérience a prononcé : toutes les idées qui y sont émises ont été vérifiées.

Pendant longtemps, on considéra de nombreuses substances comme *réfractaires*, exprimant par ce mot l'impossibilité où l'on était de les amener par une élévation suffisante de la température jusqu'à leur point de fusion; jusqu'à ces dernières années, on désignait encore sous le nom de *gaz permanents* un certain nombre de gaz qui avaient résisté aux procédés les plus puissants imaginés pour les liquéfier sous l'influence simultanée de la pression et du froid. Moins de cent ans après la prédiction de Lavoisier, il n'y avait plus ni corps réfractaires ni gaz réellement permanents. On peut dire qu'aujourd'hui il n'y a plus de substance totalement infusible, comme il n'y a plus de gaz dont nous ne puissions dire qu'il a été liquéfié.

Ce double résultat a été obtenu par les perfectionnements sans cesse apportés dans les méthodes de chauffage, d'une part, dans les procédés de refroidissement et de compression, de l'autre. A mesure que nos appareils et nos méthodes ont été plus parfaits, le nombre des corps réfractaires, le nombre des gaz non liquéfiés a sans cesse diminué pour disparaître enfin complètement.

259. — SUBSTANCES RÉFRACTAIRES.

Les substances réfractaires sont aujourd'hui celles que les procédés ordinaires de chauffage ne peuvent réduire à l'état liquide et pour lesquelles on est obligé de recourir aux méthodes de production des températures les plus élevées que nous puissions atteindre.

Despretz, en appliquant simultanément à une même substance les trois sources de chaleur les plus intenses dont nous sachions disposer, combustion de l'hydrogène et de l'oxygène dans les proportions qui forment l'eau, rayons solaires concentrés au foyer d'une puissante

lentille à échelons, enfin l'arc électrique de près de 200 éléments de Bunsen, parvint à volatiliser la magnésie, à ramollir une baguette d'anthracite ou de graphite et enfin à fondre l'alumine, le rutile, le bore, le silicium, que l'on considérait comme infusibles.

Henri Sainte-Claire Deville a employé dans le même but un chalumeau à gaz oxygène et hydrogène ou aussi à oxygène et gaz d'éclairage ; c'est à l'aide de cet appareil que Deville et Debray ont fait de la fonte du platine dans un creuset de chaux une opération aujourd'hui industrielle, puisqu'on est arrivé, dans ces dernières années, à fondre jusqu'à 300^{kg} de platine iridié pour la fabrication des étalons du mètre. Cette méthode de production des températures élevées est celle qu'on emploie de préférence dans les études de reproductions minérales à haute température, le quartz ou l'alumine fondus servant de dissolvants.

En employant des arcs électriques fournis par des courants de plusieurs centaines d'ampères, jaillissant dans des fours à réverbère, M. Moissan a même réalisé la volatilisation de la silice et a pu arriver à la reproduction artificielle du diamant. Dans ces conditions, la chaux elle-même fond et se volatilise ; c'est ainsi que, dans l'industrie, se prépare le carbure de calcium.

260. — GAZ PERMANENTS.

La liquéfaction des gaz et la solidification de certains liquides ont présenté des difficultés d'un autre ordre et qui n'ont été surmontées que dans ces dernières années.

Ce n'est qu'en 1823 que la question de la liquéfaction des gaz, presque oubliée depuis Lavoisier, fit d'immenses progrès entre les mains de Faraday. C'est à cette époque qu'il imagina la méthode connue sous le nom de *méthode du tube de Faraday* et dans laquelle les gaz étaient liquéfiés par l'effet de la pression seule ; le gaz ammoniac, l'acide sulfureux, le gaz carbonique et le protoxyde d'azote furent à cette époque réduits à l'état liquide.

En 1845, nouveau pas en avant fait par Faraday : il ne se contente plus de soumettre les gaz à liquéfier à des pressions énormes à l'aide des pompes de compression, il utilise le froid intense que peuvent donner les gaz liquéfiés qu'il a appris à préparer et qui, en l'espace de vingt ans, sont devenus aussi faciles à manier que l'eau elle-même. Le tube dans lequel est comprimé le gaz en expérience est enveloppé d'un mélange d'acide carbonique solide et d'éther ou bien d'une

grande masse de protoxyde d'azote dont on entretient l'ébullition dans le vide à la température de $-120°$.

Faraday liquéfia ainsi presque tous les gaz; six seulement résistèrent. Ce sont : les éléments de l'air, l'oxygène et l'azote, le bioxyde d'azote, l'oxyde de carbone, le bicarbure d'hydrogène et enfin l'hydrogène; on les appela les *gaz permanents*.

Il semblait qu'on eût épuisé toutes les ressources et qu'il fût impossible de soumettre les gaz à des pressions plus fortes et à des températures plus basses, et qu'on dût par conséquent renoncer à les liquéfier.

Cependant il n'y a plus aujourd'hui de gaz permanents; c'est à Andrews que l'on doit de connaître exactement les conditions dans lesquelles cette liquéfaction est possible, et c'est à M. Cailletet que revient incontestablement l'honneur d'avoir imaginé les procédés les plus simples et les plus puissants qui ont permis de résoudre définitivement le problème.

Nous verrons, en effet, comment la découverte des propriétés des gaz dans le voisinage du *point critique* a servi de guide dans ces recherches et comment le phénomène de la *détente*, qui peut, comme nous l'avons vu, être accompagné d'abaissements énormes de la température, a permis de réaliser les températures au-dessous desquelles seulement l'air peut se liquéfier.

Une fois en possession de ces liquides, qui entrent en ébullition, même sous des pressions déjà élevées, à des températures inférieures à $-150°$, il est facile d'imaginer que les liquides les plus difficiles à solidifier, l'alcool, le sulfure de carbone, n'aient pu résister à ces froids extraordinaires, et ainsi il est remarquable de voir que c'est toujours l'emploi convenablement combiné des gaz liquéfiés qui a, par le grand abaissement de température qu'ils permettaient de réaliser, rendu possible et la solidification des liquides et, en définitive, la liquéfaction même des gaz.

CHAPITRE II.

FUSION. — SOLIDIFICATION. — DISSOLUTION. CRISTALLISATION.

Nous étudierons d'abord le passage de l'état solide à l'état liquide et le retour inverse à l'état solide; ce changement d'état peut être obtenu par l'effet de la chaleur seule : on lui donne alors le nom de *fusion* ou de *solidification*, suivant le sens dans lequel il s'effectue. Nous étudierons ensuite le passage à l'état liquide par l'effet des dissolvants, c'est-à-dire la *dissolution*, et le passage inverse qui s'effectue le plus souvent par *cristallisation*.

I. — FUSION.

261. — LOIS DE LA FUSION.

La fusion est le passage de l'état solide à l'état liquide sous l'influence de la chaleur. Ce phénomène n'est soumis à des lois très nettes que lorsqu'il est brusque; nous écarterons donc le cas où le corps passe insensiblement du premier état au second par des déformations et un ramollissement graduels, comme le font le verre et la cire, par exemple, qui restent, dans un intervalle de température assez étendu, dans un état de semi-fluidité où les propriétés du corps tiennent à la fois de celles des solides et de celles des liquides.

Ce changement d'état est soumis aux lois suivantes :

1° Chaque substance solide fond, sous pression constante, à une température bien déterminée qu'on appelle son *point de fusion* et qui est une constante spécifique de cette substance.

2° Si la pression ne varie pas, la température reste constante pendant la fusion, jusqu'à ce que le corps solide soit entièrement liquéfié.

3° La fusion est accompagnée en général d'un accroissement de volume.

262. — CHALEUR DE FUSION.

La seconde loi conduit à des considérations et à une définition très importantes.

Pendant le phénomène de la fusion, la température reste constante, quelle que soit l'intensité du foyer employé; cependant le corps qui fond absorbe de la chaleur, qui ne produit aucune variation de température sensible au thermomètre. Depuis Black, on pense que cette chaleur observée est celle précisément qui est employée à produire le travail mécanique intérieur qui accompagne le changement d'état; on lui donne, puisqu'elle échappe au thermomètre, le nom de *chaleur latente de fusion* ou, plus simplement, de *chaleur de fusion;* nous apprendrons bientôt à la mesurer.

La troisième et la première loi ne sont pas aussi absolues que l'on pourrait croire, et il se présente des irrégularités ou des exceptions que nous allons étudier.

263. — CHANGEMENT DE VOLUME PENDANT LA FUSION.

Dans le cas où la fusion est brusque, ce phénomène est accompagné en général d'un accroissement subit de volume; il y a cependant des exceptions à cette loi : c'est ainsi que la glace, par exemple, diminue de volume en fondant.

Cette exception a été étudiée de bien des manières. On sait aujourd'hui que la glace, lorsqu'on la prend au-dessous de zéro et qu'on la chauffe, se dilate, puis qu'à 0° elle fond en diminuant subitement de volume; la contraction se continue à l'état liquide jusqu'à 4°, température à partir de laquelle l'eau rentre dans la règle générale en se dilatant sous l'effet de la chaleur.

La démonstration de ce fait que la densité de la glace est plus faible que celle de l'eau résulte de ce que la glace flotte sur l'eau.

On peut mettre en évidence l'accroissement de volume de l'eau qui passe à l'état de glace par une expérience bien simple. Dans un canon de fusil fermé ou dans une bombe on emprisonne de l'eau; en faisant congeler d'abord l'eau dans le voisinage de l'écrou qui sert à la fermeture, on forme un bouchon de glace hermétique; on plonge alors le récipient entier dans un mélange réfrigérant et on l'entend bientôt après éclater.

La fonte jouit des mêmes propriétés que la glace; elle occupe un

volume moindre à l'état liquide qu'à l'état solide; si l'on jette dans de la fonte en fusion un boulet du même métal, au moment d'entrer en fusion on le verra surnager. Il résulte de cette propriété que la fonte en fusion subira un accroissement brusque de volume au moment où, coulée dans un moule, elle se solidifiera; elle en prendra donc très bien l'empreinte.

Mais ces expériences ne sont que qualitatives. Divers physiciens ont cherché à mesurer ces variations de volume.

Brunner et Dufour ont tous deux, par des méthodes différentes, mesuré les densités de la glace jusqu'à 0°; la connaissance de ce nombre g_0 et de la densité e_0 de l'eau à zéro permettait de calculer la variation de volume Δv pendant la fusion, qui est pour les deux expériences à peu près la même,

$$\Delta v = \left(\frac{1}{g_0} - \frac{1}{e_0}\right) = 0,09.$$

Brunner employait la méthode de la balance hydrostatique en plongeant le bloc de glace dans le pétrole. Dufour formait pour chaque température des mélanges d'eau et d'alcool, de densités convenables, dans lesquels la glace restait en suspension; il déterminait ensuite les densités de ces mélanges.

Fig. 231.



Kopp a étudié aussi cette variation de volume, mais ses expériences n'ont pas porté exclusivement sur l'eau. La méthode de Kopp est en somme celle du thermomètre à tige; seulement le réservoir, formé d'une large éprouvette (*fig.* 231), et la tige graduée ne sont pas soudés, mais reliés par un bouchon chauffé préalablement dans l'huile à 100°, ce qui le rend imperméable; ce mode de fermeture ne semble pas devoir permettre d'obtenir des résultats bien précis. La substance à étudier, qui remplit un tube à essai, est placée dans l'éprouvette, qu'on achève de remplir avec un liquide convenable sans action sur cette substance. Le calcul des variations de volume nécessite la connaissance des coefficients de dilatation du verre et du liquide employés.

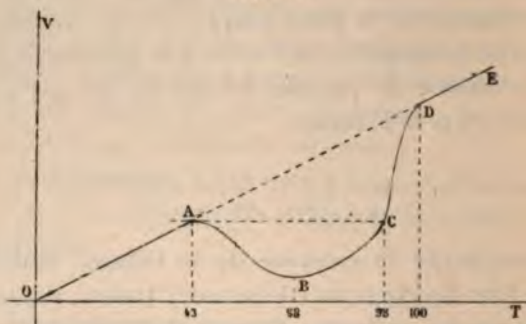
Il trouva ainsi que 1 volume de glace donne seulement $0^{vol},843$ d'eau à zéro; la contraction serait donc $\Delta v = 0,157$, nombre bien différent de celui de Brunner et de Dufour.

Le phosphore, en fondant, augmente de volume dans le rapport de 1 à 1,034, le soufre de 1 à 1,05, l'acide stéarique de 1 à 1,11.

Ermann employait la méthode de la balance hydrostatique et représentait les résultats de ses expériences par des courbes; en abscisses, il portait les degrés, et, en ordonnées, les variations de volume rapportées au volume primitif à zéro.

Il étudia l'alliage de Rose (2 parties de bismuth, 1 de plomb, 1 d'étain). A l'état solide, les variations de volume sont représentées par une droite OA (*fig.* 232); le volume augmente jusqu'à 35° R.

Fig. 232.



(43°,75 C.) où il présente un maximum; il se contracte ensuite rapidement et son volume présente un minimum vers 55° R. (68°,75 C.); le volume augmente alors de nouveau jusqu'à 75° R. (93°,75 C.) où le métal est complètement fondu; jusqu'à 80° R. (100° C.) la dilatation est encore rapide, puis au delà elle semble représentée par le prolongement exact DE de la droite OA.

Ainsi la variation de volume pendant la fusion n'a aucune influence sur le volume final, qui serait celui d'un solide s'étant dilaté régulièrement. Ermann fait de plus remarquer que le volume du métal liquéfié à 75° R., figuré en C, est identique à celui de l'alliage avant liquéfaction au point du maximum figuré en A.

Le phosphore a une dilatation représentée à l'état solide et à l'état liquide par deux droites, la seconde plus inclinée que la première; le passage de l'état solide à l'état liquide est accompagné d'une expansion qui paraît subite. Ces droites ont pour équation

$$v = 1 + 0,000474\,t$$

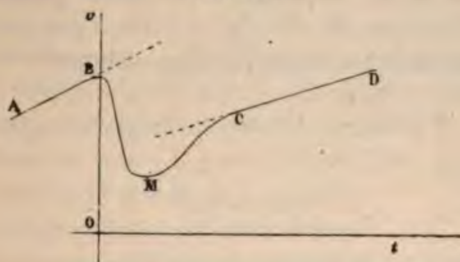
pour le phosphore solide entre 0° et 37°,5 C., et

$$v = 1,0457 + 0,000908(t - 37°,5)$$

pour le phosphore liquide entre 37°,5 et 87°,5.

Ermann représenta pour l'eau les résultats connus en prenant pour coefficient moyen de dilatation cubique de l'eau et de la glace les nombres 0,000438 et 0,000735 empruntés à un Mémoire de M. Heinrich. Les droites AB et CD (*fig.* 233) représentent les dilatations de la glace et de l'eau. B correspond à la fusion à 0°, M au minimum de volume à 4°.

Fig. 233.



264. — INFLUENCE DE LA PRESSION SUR LA TEMPÉRATURE DE FUSION.

Nous avons établi, en appliquant au phénomène de la fusion les principes de la Thermodynamique, la relation

$$(1) \qquad l = \frac{T}{J}(u' - u)\frac{dp}{dt}$$

qui exprime la valeur de la chaleur de fusion l, en fonction de la température absolue T de fusion et de la pression p correspondante, u et u' étant les volumes spécifiques du corps à l'état solide et à l'état liquide à la même température.

Or l'expérience montre que l est toujours positif; d'autre part, T est positif pour tous les corps; donc le signe de $\frac{dp}{dt}$ est le même que celui de $u' - u$.

Par exemple, dans le cas de l'eau, $u' - u$ est négatif puisqu'il y a contraction par fusion, donc $\frac{dp}{dt}$ doit être négatif; un accroissement de pression abaissera la température de fusion et inversement.

Pour tout corps qui, au contraire, augmentera de volume en fondant, $u' - u$ étant positif, la pression et la température de fusion varieront dans le même sens : à un accroissement de la pression correspondra une élévation de la température de fusion.

De nombreuses expériences de vérification ont établi l'exactitude de ces conclusions théoriques, mais c'est surtout le cas de l'eau, c'est-à-dire l'exception à la règle générale, qui a fait l'objet des observations les plus variées.

On peut, à l'aide de la formule (1), calculer dans le cas de l'eau l'abaissement δt de la température de fusion produite par un accroissement de pression de 1^{atm} ($\delta p = 1033^g,5$ par centimètre carré); il suffit d'y remplacer les lettres par leurs valeurs

$$l = 80, \quad F = 273, \quad J = 425, \quad u' = 1,001, \quad u = 1,0905,$$

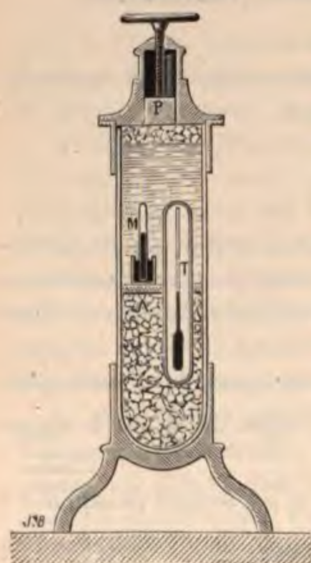
on trouve

$$\delta t = 0^\circ,0075.$$

Cette formule a été établie par James Thomson.

Appareil de Lord Kelvin. — L'appareil employé par Lord Kelvin est le piézomètre d'Œrstedt (*fig.* 234); il est formé d'un vase cylindrique à parois épaisses en verre, fermé à sa partie supérieure par une garniture métallique que traverse un piston plongeur à vis. La moitié inférieure est remplie de fragments de glace maintenus au fond par une rondelle de plomb; on achève de remplir d'eau. Deux appareils servent l'un à l'évaluation de la température, l'autre à la mesure des pressions.

Fig. 234.



Le premier est un thermomètre à éther, dont la dilatation est huit à neuf fois celle du mercure, donnant, entre $-0^\circ,6$ et $1^\circ,1$, le $\frac{1}{150}$ de degré; il est enfermé dans un tube en verre résistant qui le soustrait à l'effet de la pression; du mercure, qui enveloppe le réservoir, établit la conductibilité.

Le second est un petit manomètre à air comprimé.

Lorsqu'en faisant descendre la vis on exerce une forte pression dans l'appareil, on peut admettre que le thermomètre indique la température de fusion, puisque le cylindre renferme un mélange d'eau et de glace.

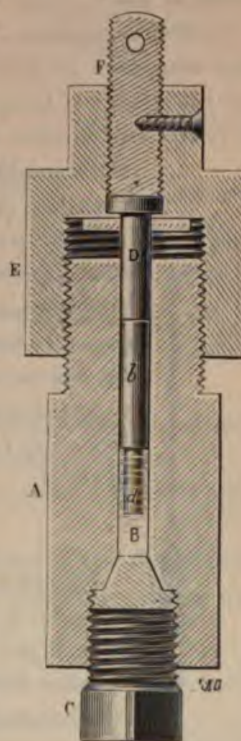
Les résultats obtenus sont les suivants :

	Températures	
Atmosphères.	observées.	calculées.
1	0,00	0,00
8,1	— 0,059	— 0,061
16,8	— 0,129	— 0,126

Appareil de M. Mousson. — M. Mousson a employé, pour vérifier la possibilité de fondre la glace à des températures notablement inférieures à 0°, un appareil figuré ci-contre (*fig.* 235).

C'est un prisme en acier A percé suivant son axe d'une cavité cylindrique et portant un pas de vis à sa partie supérieure. La cavité cylindrique était fermée à sa partie inférieure par un cône en cuivre *f* pressé par une forte vis C. A la partie supérieure, elle prenait une forme légèrement conique et était fermée par un long cône en cuivre *b*, sur lequel reposait un piston d'acier D qu'on pouvait presser avec une grande force à l'aide de l'écrou E; le mouvement de l'écrou s'obtenait à l'aide d'un levier fixé sur la vis F.

Fig. 235.



Pour faire l'expérience, on fermait l'appareil à sa partie supérieure, on le renversait, on y introduisait une tige de cuivre *d*, on le remplissait d'eau jusqu'en *c* et on le soumettait à l'action du froid. L'eau étant congelée, on enlevait avec soin la petite quantité de glace qui dépassait l'ouverture, on introduisait le cône et l'on fermait tout l'appareil à l'aide de la vis C. On le redressait alors et on le portait dans un mélange réfrigérant à — 18°; on exerçait ensuite une pression aussi énergique que possible. Il est clair que, si la glace était ramenée par la pression à l'état liquide, l'index *d* devait tomber de la partie supérieure à la partie inférieure de la cavité, et qu'il y resterait si une diminution de pression ramenait la congélation de l'eau. L'expérience ayant donné ce résultat, M. Mousson en a conclu qu'il est possible d'abaisser la température de fusion de la glace au dessous de — 18° à l'aide d'une pression suffisante.

Il estime dans ces expériences la pression à 13 000^{atm} et la contraction de l'eau à 0,13.

265. — REGEL.

Ces faits permettent d'en expliquer d'autres qui semblent plus difficiles à interpréter.

M. James Thomson-Bottomley prend par exemple un bloc de glace parallélépipédique et le place entre deux planches; un fil de fer placé dessus pend de chaque côté et porte des poids. On voit alors le fil de fer pénétrer dans le bloc, le traverser complètement, et cependant le bloc reste entier; le plan suivant lequel il a été scié se distingue pourtant par réflexion; on peut constater que le fil, à l'endroit où il touche la glace, a une température inférieure à zéro.

Tyndall comprime à la presse hydraulique un bloc de glace entre deux morceaux de bois qui présentent entre eux une cavité lenticulaire; la glace est brisée et cependant, après une forte compression, on retire une lentille homogène parfaitement limpide. Le bloc de glace semble avoir été moulé : la glace présente donc une plasticité apparente.

Fig. 236.



L'explication de ces expériences est facile. La glace sous pression a fondu, mais alors sa température s'est abaissée par suite de l'absorption de chaleur qui accompagne la fusion; donc au moment où l'eau résultant de la liquéfaction de la glace cesse d'être comprimée, comme sa température est inférieure à 0°, elle passe à l'état solide. Il y a par conséquent, dans toutes ces expériences, fusion et regel.

266. — EXPÉRIENCES DE BUNSEN.

Bunsen a vérifié la formule théorique dans le cas général, c'est-à-dire avec des substances telles que la paraffine et le blanc de baleine, qui augmentent normalement de volume en passant à l'état liquide.

Son appareil est un tube en U, en verre très résistant, complètement fermé, présentant une partie renflée et deux branches capillaires A et C (*fig.* 236). A est exactement calibré et contient de l'air : il constitue donc un manomètre à air comprimé; de B en D se trouve du mercure et enfin, de D en C, la substance sur laquelle on opère. Pour faire une expérience, on plonge DC et une partie du mercure du réservoir E dans un bain

chaud à température supérieure au point de fusion; puis on laisse refroidir et l'on note avec un thermomètre la température du bain au moment où a lieu la solidification. En plongeant plus ou moins le réservoir E, le mercure se dilate plus ou moins; l'expérience peut être ainsi faite sous des pressions variées, et l'on observe les résultats suivants :

	Pressions en atmosphères.	Température de solidification.
Blanc de baleine....	1	47,7
	29	48,3
	96	49,7
	141	50,5
	156	40,9
Paraffine...........	1	46,3
	85	48,9
	100	49,9

II. — SOLIDIFICATION.

267. — LOIS DE LA SOLIDIFICATION.

La solidification est la transformation inverse qu'éprouve un corps liquide lorsqu'il passe à l'état solide; cette modification de l'état physique peut être lente ou brusque comme la fusion et elle est, dans ce dernier cas, soumise à trois lois qui correspondent exactement à celles que nous avons énoncées pour la fusion :

1° Chaque substance liquide se solidifie, sous pression constante, à une température fixe qui est la même que le point de fusion.

2° Si la pression ne varie pas, la température reste constante pendant la solidification.

3° La solidification est accompagnée en général d'une diminution de volume; le phénomène est, au signe près, identique à celui que l'on observe pendant la fusion.

L'étude de divers cas de solidification conduit à des observations analogues à celles que nous avons faites à propos de la fusion.

Pour faire solidifier un liquide, il faut lui soustraire de la chaleur, sa température devrait donc s'abaisser; si elle ne change pas, c'est que la substance abandonne la chaleur qu'elle a absorbée lors du passage inverse de l'état solide à l'état liquide. Cette chaleur qui n'est pas sensible au thermomètre, c'est la chaleur latente de solidification : elle est rigoureusement égale à la chaleur latente de fusion.

268. — SURFUSION.

Mais tout l'intérêt de cette étude se trouve dans les exceptions fort remarquables à la première loi et dans l'observation du retard considérable que l'on peut constater dans la température de solidification, phénomène connu sous le nom de *surfusion*.

L'eau refroidie à l'abri du contact de l'air, sous une couche d'huile, peut être maintenue à l'état liquide jusqu'à 12° au-dessous de zéro, à condition qu'elle soit soustraite à toute agitation. Nous avons déjà dit que, grâce au phénomène de la surfusion, Despretz avait pu étudier la dilatation de l'eau jusqu'à —20° en la conservant à l'état liquide dans des tubes capillaires. Dufour est arrivé facilement à maintenir l'eau en surfusion à des températures plus basses encore en soustrayant le liquide au contact de tout solide. Pour cela, il forme des mélanges convenables de chloroforme ou de pétrole avec l'huile d'amandes douces, qui ont la même densité que l'eau et qui ne la dissolvent pas. On projette dans ce bain liquide des gouttelettes d'eau, qui restent en suspension, et l'on refroidit le tout. Les plus grosses gouttes se solidifient les premières, et les plus petites peuvent rester en suspension jusqu'à — 20°.

C'est là une propriété que présentent bien d'autres corps. Le phosphore, par exemple, fondu à 44°,2 sous une couche d'eau, peut être maintenu en surfusion fort longtemps à 10° en employant un dispositif décrit par M. Gernez et que représente la figure 237.

Fig. 237.



M. Gernez a pu répéter avec le soufre des expériences analogues à celle de M. Dufour, en employant comme bain une solution très concentrée de chlorure de zinc. Les gouttes les plus petites ont pu être conservées à l'état liquide jusqu'à +5°, et cela pendant plusieurs jours.

Quand on abaisse suffisamment la température, cet état de surfusion finit toujours par cesser; mais, si l'on a amené le liquide surfondu seulement à quelques degrés au-dessous de sa température de solidification, on peut employer pour provoquer le changement d'état divers moyens : agitation, contact d'une tige métallique ou d'un agitateur de verre, contact de diverses substances solides; on n'est jamais sûr par l'un quelconque de ces procédés d'amener la solidification,

… en touchant le corps surfondu avec
…e à l'état solide.
… être obtenue avec un liquide surfondu
…sphore ; elle est très intéressante avec
…montrer qu'on peut faire tomber dans
… parcelles de phosphore rouge pur sans
… amènerait au contraire invariablement
…eur ayant touché du phosphore blanc.
…particulier dans lequel se trouve le liquide
…ilibre instable, qui peut être détruit
…mais qui l'est à coup sûr par le seul
…forme d'équilibre stable à cette tem-
…état solide.

… ainsi brusquement de l'état liquide
…donne sa chaleur latente de fusion, et
…pérature s'élève subitement. On em-
…fait en évidence, un thermomètre à
…dont le réservoir est enveloppé d'un
…tement fermé, dans lequel est de l'eau
…refroidit l'appareil dans un mélange
…ues précautions jusqu'à 7° ou 8° au-
…l'on vient alors à agiter l'appareil, la
…ement et le thermomètre, qui indiquait
…eau qui l'enveloppe, remonte dans le

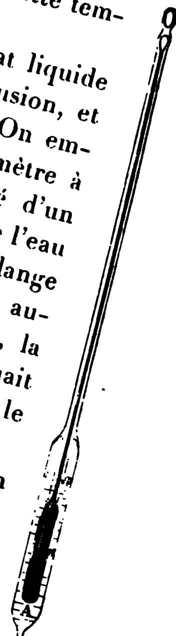


Fig. 238.

…t général. M. Gernez a montré qu'on
… déterminer avec exactitude la tempé-
…corps et éviter ainsi les difficultés qu'on
…mesurer directement la température de
…sultant précisément du phénomène de
…propose de substituer à la détermina-
…a mesure de la température de solidification

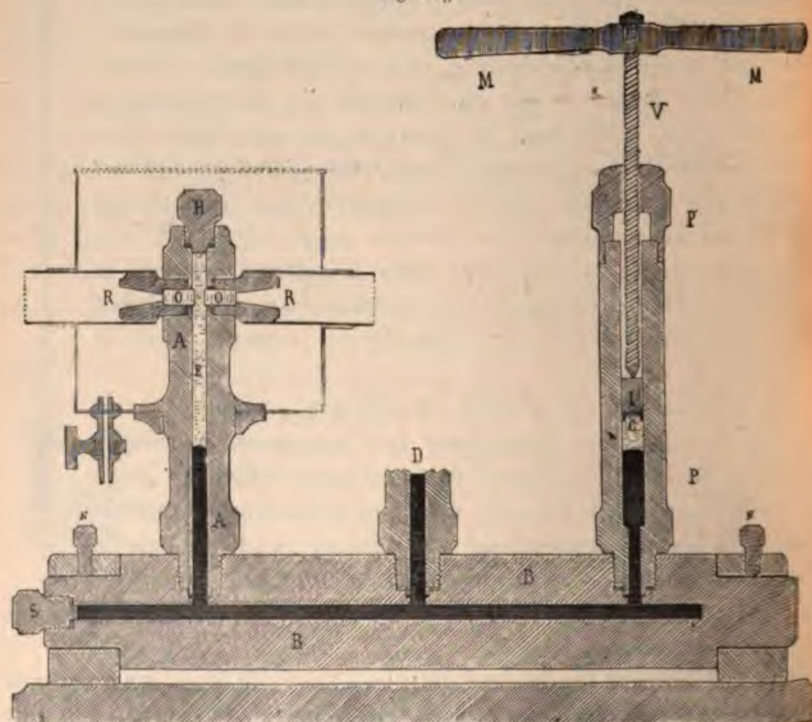
…dans un tube à essai, de façon qu'il entoure
…d'un thermomètre fin, et l'on place le tout
…quelque peu inférieure à celle de la soli-
…est établi, on amène une parcelle solide
…ct avec le liquide surfondu : la solidifi-
…remonte : on suit les indications du ther-
…un maximum qui n'est sûrement pas

supérieur au point de solidification, mais peut lui être inférieur. On recommence, en prenant pour température du bain celle qu'on vient de déterminer ainsi, et, après quelques expériences, la lecture des températures ne diffère que de fractions insensibles de degré : c'est la température de fusion.

269. — SOLIDIFICATION DES LIQUIDES PAR PRESSION.

Théoriquement, la formule de Clapeyron permet de prévoir que, à une température donnée, la solidification d'un corps peut devenir possible sous une pression suffisante, à la seule condition que sa densité soit plus grande à l'état solide qu'à l'état liquide.

Fig. 239.



Les autres conséquences de la formule ayant été vérifiées comme nous l'avons vu, M. Amagat a cherché à vérifier aussi celle-ci. Il a annoncé qu'il avait réussi à solidifier le bichlorure de carbone (C^2Cl^4) inconnu auparavant à l'état solide.

La figure 239 montre une coupe de l'appareil employé pour ces expériences.

Le liquide à solidifier est enfermé dans une pièce A munie de deux regards RR, entre lesquels il forme une couche de quelques millimètres seulement; il repose sur une colonne de mercure qui lui transmet la pression produite au moyen du dispositif PP'.

La pièce A est enveloppée par un manchon destiné à l'obtention de la température à laquelle on veut opérer.

La solidification a lieu sous forme de cristaux, que l'on fait apparaître ou disparaître à volonté en serrant ou desserrant la vis V au moyen du double bras M.

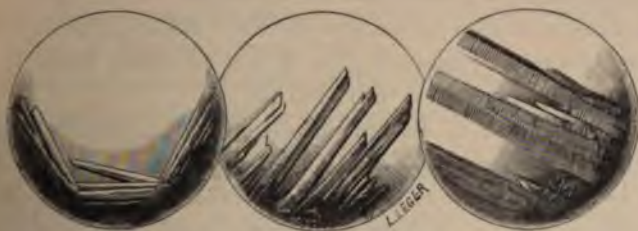
Conformément à la théorie, la pression de solidification croît avec la température; pour le chlorure de carbone, elle s'est produite aux températures et pressions suivantes :

			atm
A	— 19,5, sous une pression de	....	210
A	0	»	620
A	10	»	900
A	19,5	»	1160

La benzine, qui se solidifie à zéro sous la pression normale, a été également solidifiée à + 22° sous une pression approximative de 700^{atm}.

La figure 240 est relative à l'eau; c'est la reproduction en vraie grandeur de clichés sur lesquels les cristaux sont grossis à peu près

Fig. 240.



cinq fois en diamètre. La solidification (corps plus dense à l'état liquide qu'à l'état solide) est obtenue en décomprimant ce corps maintenu liquide par la pression au-dessous de 0°.

Courbes de fusion. — La courbe de fusion d'un corps est la courbe dont les coordonnées sont la pression p et la température de fusion correspondante.

M. Tammann a déterminé ces courbes de fusion pour un certain nombre de corps, jusqu'à des pressions très élevées (3000^{atm} et au delà). L'étude de ces courbes a révélé des faits fort intéressants sur lesquels nous reviendrons.

270. — DISSOLUTIONS.

Définition. — On dit qu'un corps solide se dissout dans un corps liquide, quand il forme avec lui un mélange liquide homogène et qu'on ne peut plus les séparer par des moyens mécaniques. Le mélange est appelé une *dissolution*, le liquide est le *dissolvant* et le solide le corps *dissous*.

Telles sont, par exemple, les dissolutions du chlorure de potassium, du sulfate ou de l'azotate de sodium et d'un grand nombre d'autres sels, des acides comme les acides tartrique, citrique, oxalique, etc., du sucre, dans l'eau; du soufre, des graisses, dans le sulfure de carbone ou la benzine; de la résine dans l'alcool, etc.

Concentration. — La concentration d'une dissolution est le rapport de la masse du corps dissous à la masse du dissolvant. On l'exprime d'ordinaire en centièmes et elle est représentée alors par le nombre de grammes du solide dissous dans 100^g du dissolvant.

On définit aussi la concentration par le rapport de la masse du corps dissous à la masse de la dissolution; cette deuxième définition est moins usitée.

Dissolution saturée. Coefficient de solubilité. — Lorsqu'on ajoute au dissolvant des masses croissantes du corps dissous, il arrive un moment où le solide ne se dissout plus. Il y a équilibre entre le solide et la dissolution; celle-ci est dite *saturée*.

La concentration de la dissolution saturée est le coefficient de solubilité du solide dans le liquide. Ce coefficient de solubilité est fonction de la température. En général il croît quand la température s'élève; plus rarement, il diminue comme pour certains sels de calcium en dissolution dans l'eau. Dans d'autres cas, rares aussi, il passe par un maximum : c'est ce qui arrive par exemple pour le sulfate de sodium dissous dans l'eau, au voisinage de $32°,75$, pour le carbonate de sodium à 10^{mol} d'eau, en dissolution dans l'eau au voisinage de $36°$.

La *courbe de solubilité* d'un corps dans un dissolvant est la courbe construite en prenant comme abscisses les températures et comme ordonnées les coefficients de solubilité correspondants. Dans quelques

s, ces courbes présentent des points anguleux : on vérifie que cette riation brusque de la solubilité correspond à une modification chiique du corps dissous et qu'en réalité les deux branches de la courbe e rapportent à des substances distinctes.

Au point de vue thermique, si le phénomène de la fusion absorbe le la chaleur, on peut prévoir que le phénomène de la dissolution en bsorbera aussi : car non seulement il faudra comme dans la fusion fournir au solide la quantité de chaleur nécessaire pour l'amener à l'état liquide, mais encore il faudra lui fournir la chaleur nécessaire pour disséminer ses particules dans le dissolvant : leur somme contitue la chaleur de dissolution.

271. — CRISTALLISATION.

Le passage inverse à l'état solide se fait en général par cristallisaion. Dans la plupart des cas, quand on diminue par un moyen quelonque, par évaporation par exemple, le poids du dissolvant dans ne dissolution saturée, ou quand on abaisse la température de la issolution, le corps dissous se transforme partiellement en solide et pparaît le plus souvent sous une forme cristalline. Le poids du solide insi déposé par la dissolution est tel qu'elle reste sans cesse saturée.

Sursaturation. — Cependant il se présente des exceptions à cette ègle. On peut, par exemple, abaisser considérablement la tempéraure d'une dissolution saturée à chaud sans qu'elle abandonne aucune race du solide dissous ; ce phénomène est l'analogue de la surfusion : on lui donne le nom de *sursaturation*.

Le sulfate de sodium se prête bien à ce genre d'observations ; lorsqu'il est abandonné à l'état de solution saturée à chaud, s'il dépose des cristaux immédiatement par refroidissement, leur formule est $SO^4Na^2, 10H^2O$; mais, si l'on peut l'amener à 10° en le conservant dans un ballon fermé, on voit se former une couche de cristaux dont la formule est $SO^4Na^2, 7H^2O$; le liquide qui persiste est encore sursaturé, on peut en provoquer la cristallisation subite par divers moyens. Cette observation capitale est due à Lœvel ; on peut en tirer cette conclusion que le contact d'un cristal quelconque ne suffit pas pour faire cesser la sursaturation.

M. Violette et M. Gernez ont particulièrement étudié les conditions dans lesquelles la sursaturation cesse ; ils ont montré par de nombreuses expériences que les procédés mécaniques, agitation, vi-

bration, frottement dans le sein de la masse liquide, que, d'autre part, le contact de corps solides cristallisés ne permettaient pas de provoquer d'une façon certaine la cristallisation; le contact d'un cristal identique ou d'un cristal isomorphe est le seul procédé certain.

On peut alors expliquer facilement les expériences classiques de sursaturation. Si du sulfate de sodium est sursaturé dans un ballon fermé, la cristallisation se produit en général au moment de l'ouverture; c'est que l'on fait tomber dans le liquide quelques cristaux déposés sur le col ou que l'air entraîne au contact du liquide des cristaux identiques. M. Gernez a montré en effet que si l'on tamise cet air à travers du coton-poudre, ou si on le fait passer à travers un tube chauffé au rouge, c'est-à-dire que si l'on arrête ou si l'on détruit les matières cristallisées, on peut conserver indéfiniment la solution sursaturée.

La forme du cristal semble donc jouer le rôle prédominant. On peut le montrer d'une façon bien plus nette encore en expérimentant avec des cristaux présentant le phénomène de l'hémiédrie.

Prenons, par exemple, une solution de chlorate de sodium inactive sur la lumière polarisée et projetons-y un cristal droit de ce même sel, c'est-à-dire un cristal hémièdre à droite faisant tourner à droite le plan de polarisation de la lumière; les cristaux qui se formeront présenteront tous la même orientation, seront tous droits.

Fig. 241.



Le phénomène du retour brusque à l'état solide d'une dissolution est accompagné (et c'est là une analogie de plus avec la surfusion) d'un dégagement de chaleur qui peut quelquefois porter la masse solidifiée à une température assez élevée; le corps abandonne brusquement sa chaleur de dissolution. Pour mettre ce phénomène en évidence, on place de l'éther dans un tube à essai que l'on ferme à sa partie supérieure avec un bouchon traversé par un tube effilé; puis, après avoir touché quelques cristaux d'hyposulfite de sodium, par exemple, avec le fond du tube, on le fait plonger dans une solution sursaturée du même sel (*fig.* 241). La solidification se fait rapidement, la température s'élève jusqu'à près de 60°, l'éther bout et l'on

peut enflammer la vapeur qui sort à l'ouverture du tube effilé. C'est cette propriété des solutions sursaturées qu'on utilise aujourd'hui dans le chauffage des bouillottes de chemins de fer.

Enfin, si l'on examine la forme du solide qui prend naissance dans une quelconque de ces expériences où la solidification est totale, on voit que manifestement le changement d'état a été accompagné d'un changement de volume ; le plus souvent, un accroissement se produit au moment de la solidification.

M. Brard a proposé de faire usage de cette propriété à l'essai des pierres *gélives;* on nomme ainsi des pierres qui, étant poreuses, s'imprègnent d'eau pendant les pluies et se brisent lorsque survient une gelée suffisante pour provoquer la solidification de l'eau. Si l'on trempe une semblable pierre dans une solution saturée à chaud de sulfate de sodium, pendant le refroidissement, lorsque la sursaturation cessera, la pierre sera brisée si elle est gélive.

CHAPITRE III.

CHALEUR DE FUSION.

On nomme *chaleur de fusion* d'une substance le nombre de calories nécessaires pour faire passer l'unité de poids de cette substance de l'état solide à l'état liquide à sa température de fusion.

272. — CHALEUR DE FUSION DE LA GLACE.

Black mesura tout d'abord, par la méthode des mélanges, la chaleur de fusion de la glace et trouva le nombre 80, qui ne s'écarte que fort peu des nombres trouvés depuis par les physiciens les plus habiles.

P. Desains et de la Provostaye firent sur ce sujet une expérience qui peut passer pour un modèle de recherche calorimétrique. Ils adoptèrent la méthode des mélanges.

Soient :

M le poids du calorimètre réduit en eau et de l'eau qu'il contient:
p le poids de glace à 0° sur lequel on opère;
t la température initiale de l'eau;
θ sa température finale;
l la chaleur de fusion de la glace.

On peut écrire entre ces diverses quantités la relation

$$pl + p\theta = M(t - \theta)$$

qui exprime que la quantité de chaleur employée à fondre la glace et à porter l'eau qui en provient à la température de θ° a été fournie par le calorimètre; on en déduit

(1) $$l = \frac{M}{p}(t - \theta) - \theta.$$

Détermination de M. — M comprend le poids de l'eau contenue

ıs le calorimètre auquel on ajoute le poids du calorimètre et du rmomètre réduits en eau; mais il faut en retrancher la quantité au évaporée depuis l'instant de la pesée jusqu'au moment de l'imrsion de la glace; des expériences directes d'évaporation permetınt dans chaque cas d'estimer la valeur rigoureuse de la perte.

Détermination de p. — Pour avoir le poids de glace employée, on se de nouveau l'appareil à la fin de l'expérience; on retranche du mbre obtenu dans cette seconde pesée celui qu'avait donné la preère et l'on ajoute à la différence le poids de l'eau perdue par évaration pendant toute la durée de l'expérience calorimétrique.

La petite couche d'eau adhérente à la glace étant enlevée avec le ıs grand soin avec du papier joseph, l'erreur qui peut provenir de au qui reste toujours nécessairement est négligeable.

La formule (1) montre que, si l'on commet sur θ une erreur de $0^{\circ},1$, rreur absolue sur la chaleur de fusion est aussi de $0^{\text{cal}},1$; il faut nc vérifier avec soin la position du zéro.

Mais on voit d'autre part que, si l'erreur sur $t-\theta$ est aussi de $0^{\circ},1$, tte erreur se trouve multipliée par $\frac{M}{p}$, rapport qui peut s'élever ilement à 10 dans les expériences, de sorte que l'erreur sur l lève à une unité. On ne peut songer à diminuer par trop $\frac{M}{p}$, $t-\theta$ s'élèverait à peu près proportionnellement et les erreurs refroidissement augmenteraient d'autant; on peut faire usage de rmomètres donnant avec exactitude le centième de degré.

Les corrections de rayonnement portent sur θ; le calorimètre ayant du de la chaleur par rayonnement et par suite de l'évaporation de ıu, θ est trop faible; la variation de θ à chaque minute peut tours se représenter par une formule

$$\Delta\theta = K(\theta-\tau),$$

tant la température ambiante. Les diverses valeurs de θ pendant xpérience étant connues, il suffit de faire quelques expériences éliminaires pour déterminer K dans les conditions de l'expérience, la somme $\Sigma\Delta\theta$, étendue au temps de l'expérience, donne le terme correction de θ.

Ces recherches conduisirent au nombre 79,25.

273. — CAS GÉNÉRAL. — MÉTHODE DE PERSON.

Cette même méthode peut s'appliquer d'une façon générale, que le corps soit solide ou liquide, à la température ordinaire.

Supposons, par exemple, un corps solide.

Person, auquel on doit de nombreuses mesures, fondait le corps et l'échauffait, après fusion, à une température T supérieure à son point normal de fusion t_f; il l'introduisait fondu dans un calorimètre contenant un poids P d'eau et dont la température initiale était t. Soit θ la température finale corrigée du refroidissement; désignons par C, C′ et l la chaleur spécifique du corps à l'état solide, la chaleur spécifique à l'état liquide et la chaleur de fusion. L'équation des mélanges sera évidemment, p étant le poids du corps,

$$(1) \qquad pC'(T - t_f) + pl + pC(t_f - \theta) = P(\theta - t).$$

Cette équation contient trois inconnues : C, C′ et l. C peut se déterminer directement; pour déterminer C′, on fait une seconde expérience à une température T′ très différente de T

$$(2) \qquad yC'(T' - t_f) + pl + pC(t_f - \theta') = P(\theta' - t');$$

du système des équations (1) et (2) on tirera C′ et l.

274. — VARIATION DE LA CHALEUR DE FUSION AVEC LA TEMPÉRATURE.

Nous avons établi en Thermodynamique (256) la formule

$$\frac{dl}{dT} + m - m' = \frac{l}{T},$$

m et m' étant les chaleurs spécifiques des corps étudiés sous les deux états considérés, qui sont ici C et C′ : nous avons donc, avec les notations actuelles,

$$\frac{dl}{dT} + C - C' = \frac{l}{T}.$$

Nous pouvons faire parcourir au corps un cycle fermé en le liquéfiant à la température t_f, le refroidissant jusqu'à t'_f et le solidifiant à cette température, pour le réchauffer, à l'état solide, jusqu'à t_f. Dans ces conditions, il n'y a aucun travail dépensé, et nous avons, en vertu

de l'équation précédente,

$$\int_{t_f}^{t'_f} \left(\frac{dl}{dt_f} + C - C'\right) dt_f = 0,$$

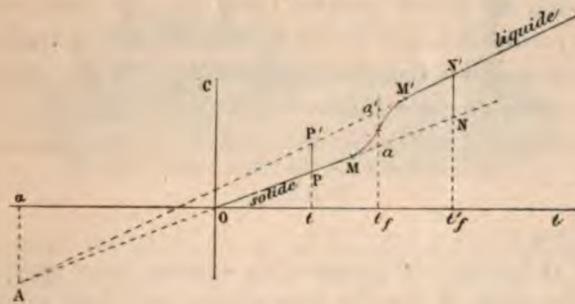
d'où

$$l - l' = \int_{t_f}^{t'_f} (C - C')\, dt_f;$$

le signe de la variation de la chaleur de fusion est donc le même que celui de la variation de la chaleur spécifique quand on passe de l'état solide à l'état liquide. Or, en général, C est supérieur à C'. Donc la chaleur de fusion varie dans le même sens que la température.

C'est précisément ce que Person avait observé. Du reste, en construisant graphiquement les droites OM, M'N' (*fig.* 242) qui repré-

Fig. 242.



sentent les variations de chaleur spécifique C et C' avec la température, on voit que la chaleur de fusion qui, à une température quelconque t, est représentée par le segment PP', augmente avec t.

Comme le coefficient angulaire de C' est plus grand que celui de C, ces deux droites prolongées iraient se rencontrer en un point A où la chaleur de fusion serait nulle. Person l'avait fixé à — 160°. Mais rien ne dit que, sur un intervalle de température aussi considérable, les variations de C et C' conservent la forme linéaire; il se peut, et c'est même fort probable, que les deux courbes qui représentent réellement ces variations tendent chacune vers une asymptote; s'il en est ainsi, elles se rencontreront, et la conclusion de Person subsistera, à la valeur numérique près de la température assignée. Mais si les courbes ont des branches paraboliques, elles peuvent ne pas se couper : la conclusion précédente serait inexacte. L'expérience seule pourra

nous apprendre quelle est la vraie forme des deux courbes à des températures auxquelles l'extrapolation n'est plus légitime.

275. — MÉTHODES CALORIMÉTRIQUES BASÉES SUR LA FUSION DE LA GLACE.

1° **Puits de glace.** — Black, le premier, imagina de mesurer une quantité de chaleur par un poids de glace fondue. Il prenait un bloc de glace aussi pure que possible, planait une de ses faces et y creusait une cavité cylindrique qu'il fermait par une table de glace s'appuyant exactement sur la face plane du bloc.

L'intérieur de la cavité étant bien égoutté, puis essuyé avec un linge fin, on y jetait le corps à étudier chauffé à une température t, puis on refermait avec soin la cavité à l'aide de la table.

Au bout d'un certain temps, le corps étant arrivé à zéro, on découvrait la cavité, on faisait écouler l'eau dans un vase taré et l'on essuyait les parois ainsi que le corps avec un linge également taré.

Soit p la somme des accroissements de poids ainsi obtenus, p représente le poids de glace fondue; si P est le poids du corps, c sa chaleur spécifique, l la chaleur de fusion de la glace, on aura

$$Pct = pl,$$

d'où l'on tirera c.

Lavoisier et Laplace ont imaginé un appareil pour appliquer cette méthode à des corps de grandes dimensions; mais leur *calorimètre à glace* exagère encore l'incertitude de la méthode du puits relativement à la connaissance du poids de l'eau de fusion.

Le seul appareil précis dans lequel on mesure la chaleur par la quantité de glace fondue est le calorimètre de Bunsen.

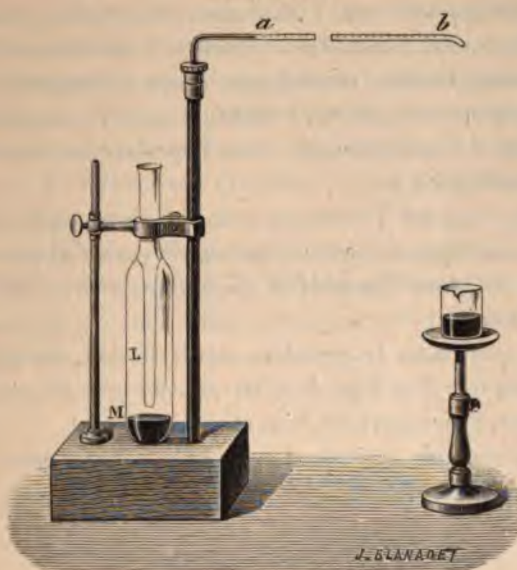
2° **Calorimètre de Bunsen.** — L'appareil (*fig.* 243) se compose d'un gros réservoir en verre M dans lequel pénètre une éprouvette concentrique L soudée à sa partie supérieure. Ce réservoir se termine à sa partie inférieure par un tube recourbé en forme d'U et qui se redresse verticalement. Dans la branche latérale, on introduit un tube recourbé à angle droit, *bien calibré*, et dont la réunion au reste de l'appareil se fait par un joint en caoutchouc serré par une vis de fer.

L'appareil contient, dans la partie supérieure du réservoir M, autour de la partie plongeante de l'éprouvette, de l'eau distillée bouillie

et privée d'air; la partie inférieure, la branche verticale et le tube calibré horizontal contiennent du mercure.

Supposons que, par un procédé quelconque, on ait congelé par-

Fig. 243.



tiellement l'eau du réservoir M de façon qu'il ne reste autour de l'éprouvette qu'une gaine de glace à zéro et que tout l'appareil soit plongé dans de la glace fondante pour être préservé des causes extérieures de réchauffement. Si, dans l'intérieur de l'éprouvette centrale, un dégagement quelconque de chaleur vient à se produire, soit par suite d'une réaction chimique, soit par suite de l'introduction d'un corps chaud, un peu de glace fond, ce qui diminue le volume total du mélange d'eau et de glace qui entoure l'éprouvette; par suite, le mercure rentre dans la tige horizontale en y parcourant n divisions.

Soit u le volume d'une de ces divisions que nous supposerons équivalentes : la diminution totale du volume sera nu. Soient, d'autre part, g_0 la densité de la glace à 0° et e_0 celle de l'eau à la même température; la différence $v = \frac{1}{g_0} - \frac{1}{e_0}$ représente la diminution de volume correspondant à la fusion de 1^{g} de glace; et, si N désigne le nombre de calories cédées à l'appareil, le quotient de N par la chaleur latente l de fusion de la glace, multiplié par v, est égal à la contraction ob-

servée *nu*. On aura donc

$$(1) \qquad \frac{N}{l}\left(\frac{1}{g_0} - \frac{1}{e_0}\right) = nu.$$

Nous pouvons prendre pour inconnue, dans cette formule, soit N, soit l. Dans le premier cas, l'instrument fonctionne comme calorimètre ordinaire et fait connaître le nombre N de calories abandonnées dans l'éprouvette. Dans le second cas, il sert à déterminer la chaleur latente l de fusion de la glace, à condition que N soit connu *a priori*, ce qui est facile : il suffit de jeter dans l'éprouvette un poids p d'eau à t^o; N est alors égal à pt.

Nous avons supposé l'instrument muni d'une tige cylindrique et nous avons admis qu'un calibrage préalable avait fait connaître le volume u d'une division. On peut se dispenser de ce calibrage en opérant comme il suit :

Je suppose que, dans la première manipulation, on ait cherché la chaleur spécifique c d'un liquide dont on avait pris un poids p chauffé à t^o; N est alors l'inconnue de l'équation (1).

On fait une seconde opération avec un poids ϖ d'eau à θ degrés et l'on a une seconde équation

$$(2) \qquad \frac{\varpi\theta}{l}\left(\frac{1}{g_0} - \frac{1}{e_0}\right) = n'u.$$

Divisons (1) et (2) membre à membre et remarquons que, dans le premier cas, N est égal à pct; il vient

$$\frac{pct}{\varpi\theta} = \frac{n}{n'},$$

d'où l'on tire c.

On peut enfin se dispenser de tout calibrage et mesurer d'un seul coup la variation de volume total $U = nu$; il suffit de remplir entièrement de mercure la tige graduée et d'en faire plonger le bec dans une capsule pleine de mercure et soigneusement tarée. La diminution de poids de cette capsule indique le poids du mercure rentré : on en déduit facilement son volume.

Manipulation de l'instrument. — Le calorimètre étant plongé dans de la glace pilée en menus fragments, il faut congeler la masse d'eau contenue dans M. Cette masse, complètement à l'abri de l'air, présente naturellement d'une façon accentuée le phénomène de la surfusion; aussi l'opération nécessite-t-elle quelques précautions spé-

iales. Voici le mode opératoire qui nous a semblé le plus rapide et e meilleur :

On se procure un tube à essai en verre très mince et pouvant enrer dans l'éprouvette centrale dans laquelle on a eu soin de mettre n peu de mercure. Quand on y enfonce le tube à essai, ce mercure 'élevant entre les deux parois de verre forme entre elles une gaine onductrice de la chaleur. On verse alors dans le tube du chlorure de éthyle dont l'évaporation produit un froid suffisant pour congeler, u bout de quelques minutes la masse d'eau du calorimètre. On retire nsuite le tube à essai et le mercure. On attend que le petit bloc de lace commence à fondre par l'extérieur : il est alors bien à zéro, et appareil est prêt à servir.

Pendant la congélation, il faut avoir soin de retirer la tige calirée; elle n'offre au mercure qu'un débit insuffisant, et, au moment ı passage brusque à l'état solide, l'augmentation subite de volume iserait l'appareil.



CHAPITRE IV.

FORMATION DES VAPEURS.

VAPORISATION. — ÉBULLITION. — CALÉFACTION.

276. — FORMATION DES VAPEURS DANS LE VIDE.

Prenons la cuve profonde qui nous a déjà servi à étudier la loi de Mariotte pour les pressions inférieures à celles de l'atmosphère, et, à l'aide d'un très long tube de cristal fermé à l'une de ses extrémités, répétons l'expérience de Torricelli : nous aurons une colonne de mercure soulevée qui équilibrera la pression atmosphérique et au-dessus de laquelle se trouvera le vide de la chambre barométrique.

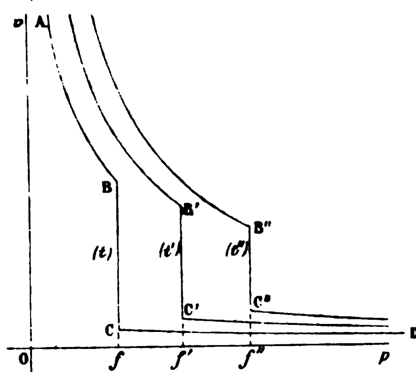
Cela fait, introduisons dans le tube barométrique, à l'aide d'une pipette recourbée, une goutte d'un liquide volatil. Si la goutte est assez petite et le volume de la chambre barométrique assez grand, cette goutte disparaît entièrement quand elle arrive dans le vide, et, en même temps, on observe une dénivellation brusque de la colonne mercurielle dans le tube : un corps aériforme a pris naissance; on dit que le liquide s'est transformé en *vapeur*.

Supposons que la température extérieure demeure rigoureusement constante. Enfonçons le tube de façon à diminuer le volume occupé par la vapeur : nous voyons que sa pression augmente en même temps, et si nous portons en abscisses (*fig.* 244) les pressions et en ordonnées les volumes, en continuant à opérer de la sorte, nous traduisons les résultats de cette première expérience par une branche de courbe AB qui est sensiblement une branche d'hyperbole équilatère. Nous en concluons que, dans cette première phase, la vapeur suit à peu près la loi de Mariotte.

Mais si nous continuons à diminuer le volume de la vapeur, il arrive un moment où la force élastique, qui a toujours été en croissant, cesse d'augmenter et demeure invariable; en même temps, une goutte de liquide apparaît au-dessus du mercure à la partie supé-

ieure du tube. Si l'on cherche à enfoncer le tube davantage, la hauteur du mercure soulevé ne varie plus; c'est comme si le tube glissait autour d'une tige solide de mercure; seul le volume de la goutte augmente légèrement à mesure que diminue l'espace offert à la vapeur. La vapeur qui est en contact avec le liquide générateur n'a donc plus les mêmes propriétés que la vapeur sèche : on dit qu'elle est *saturante,* et sa force élastique, à la température où l'on opère, est la *force élastique maxima.* La branche de courbe qui représente cette seconde phase de l'expérience est donc une droite BC, parallèle à Oc, et qui se raccorde à la branche d'hyperbole AB.

Fig. 244.



Enfin, pour pousser l'expérience jusqu'au bout, enfonçons notre tube jusqu'à ce que le fond vienne au contact du liquide, réduisant ainsi le volume de la chambre au simple volume de la goutte introduite. Si nous continuons alors à enfoncer le tube, nous comprimons le liquide, et, comme la compressibilité de ce dernier est très faible pour une grande variation de pression, nous ne réaliserons qu'une diminution infinitésimale du volume de la goutte. La dernière phase de notre expérience sera donc représentée par une courbe CD qui sera sensiblement une droite parallèle à Op.

La courbe ABCD, construite à une température t, s'appelle une *ligne isotherme.*

A des températures plus élevées t', t'', ..., nous aurions des isothermes A'B'C'D', A"B"C"D", ..., ayant la même forme générale, mais dans lesquelles la portion rectiligne B'C', B"C", correspondant à l'existence simultanée du liquide et de la vapeur, diminuerait à mesure que la température augmenterait. Les abscisses Of, Of', Of'', ... de ces portions rectilignes représentent les *forces élastiques maxima* de la vapeur étudiée aux différentes températures.

277. — PRINCIPE DE LA PAROI FROIDE.

Nous avons admis, dans l'expérience précédente, que tout le tube était à température constante.

Imaginons maintenant un tube semblable contenant une vapeur saturante à une température t : elle aura une force élastique maxima F_t.

Supposons qu'on refroidisse une portion seulement du tube à la température $\theta < t$.

L'expérience montre que la force élastique de la vapeur ne sera plus F_t mais s'abaissera à F_θ, valeur de la tension maxima à la température la plus basse.

C'est l'énoncé de ce fait expérimental, vérifié dans tous les cas, qui constitue le *principe de la paroi froide*.

278. — FORMATION DES VAPEURS DANS UNE ATMOSPHÈRE ILLIMITÉE.

Dans une atmosphère illimitée, on observe que tout liquide non renouvelé finit par disparaître entièrement par évaporation.

C'est Dalton, le premier, qui étudia la vitesse avec laquelle se fait cette évaporation. Il suspendit à cet effet sous l'un des plateaux d'une balance un vase plat contenant le liquide à étudier et dont la perte de poids, au bout d'un temps t, exprimait évidemment la perte par évaporation.

Il opéra d'abord dans l'air sec, à des températures variant entre 40° et 100°; il constata ainsi que la quantité E d'eau évaporée pendant un temps égal à l'unité était proportionnelle à la force élastique F de la vapeur aux températures de l'expérience.

Plaçant ensuite l'appareil dans une atmosphère contenant de la vapeur d'eau à la force élastique f, il reconnut que E était proportionnel à $F - f$; enfin il s'assura que E était aussi proportionnel à la surface S de liquide soumis à l'expérience. Par conséquent, les résultats directs de l'observation conduisaient à l'expression suivante de E :

$$E = CS(F - f),$$

C étant un coefficient constant.

Il y a lieu de se demander ce que devient cette formule quand la pression de l'atmosphère H vient à varier.

A mesure que H diminue, les phénomènes doivent évidemment

tendre à se rapprocher de ce qu'ils seraient dans le vide, et l'évaporation devient de plus en plus rapide. *On admet* que E est inversement proportionnel à H. Nous aurons par suite

$$E = \frac{BS}{H}(F - f),$$

B étant encore un coefficient constant.

Dalton a trouvé que ce coefficient était le même pour l'eau et pour l'alcool. Dans le cas de ce dernier liquide, la valeur de F seule est plus considérable, ce qui explique l'évaporation plus rapide de l'alcool.

Cette formule s'applique au cas d'une atmosphère absolument calme. Évidemment les résultats sont profondément modifiés quand les couches gazeuses, au contact immédiat du liquide, sont renouvelées par une agitation continue ; dans ce cas, l'évaporation est plus rapide. Mais alors on ne peut plus rien affirmer de précis relativement à la vitesse avec laquelle elle se fait, et la mesure ne peut se faire qu'expérimentalement, par la balance, et dans chaque cas particulier.

279. — FORMATION DES VAPEURS DANS UNE ATMOSPHÈRE LIMITÉE. LOI DE DALTON.

C'est à Dalton que l'on doit aussi la première recherche expérimentale relative à l'évaporation dans une enceinte limitée, recherche qui l'a conduit à énoncer la loi suivante, qui porte son nom :

Dans un espace fermé contenant un gaz, la force élastique de la vapeur émise par un liquide est la même que dans le vide à la même température.

L'appareil imaginé par Dalton se composait d'un ballon de verre (*fig.* 245) qui contenait la cuvette M d'un baromètre à siphon, et dans lequel un tube latéral C permettait d'introduire des gaz à une pression déterminée ou de faire le vide. On y faisait entrer un excès de liquide par un entonnoir à robinet B. Le liquide se vaporisait lentement, et l'accroissement final de pression était toujours égal à la force élastique maxima dans le vide à la même température.

Gay-Lussac, à l'aide d'un appareil aujourd'hui classique, vérifia la loi de son côté. AB et CD (*fig.* 246) sont les branches d'un mano-

mètre à air libre; la première est fermée en F par une armature en fer à robinet. On y visse un entonnoir muni d'un *robinet à gouttes* G. Supposons qu'on ait introduit dans l'appareil de l'air sec à la pression atmosphérique jusqu'en N et qu'on y fasse ensuite pénétrer par le robinet G quelques gouttes de liquide, on verra le mercure baisser dans la grosse branche et monter dans la petite, puis, au bout d'un certain temps, la pression demeurera constante. On versera alors du mercure dans la petite branche pour ramener le niveau dans la

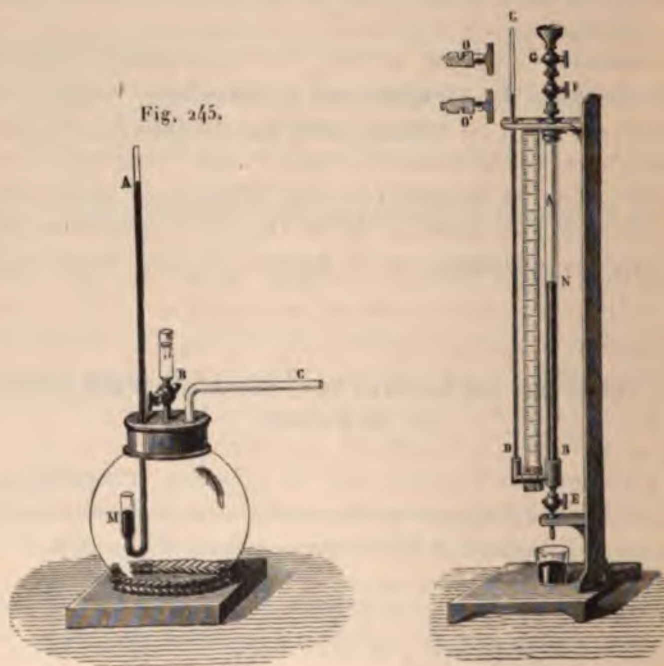


Fig. 245.

Fig. 246.

grande jusqu'en N; la différence des deux niveaux représente, dans ces conditions, la force élastique de la vapeur formée. Gay-Lussac trouva qu'elle était toujours égale à celle qu'on observait dans le vide à la température de l'expérience.

Regnault enfin entreprit relativement à la loi de Dalton des recherches précises, en mesurant d'abord la tension maxima de la vapeur d'eau formée dans les gaz aux diverses températures. Il trouva en général que cette tension était un peu plus faible que dans le vide, mais les écarts étaient tellement faibles ($0^{mm},5$ en moyenne) que la loi de Dalton n'était, en somme, pas en défaut.

Dans une seconde série d'expériences, Regnault mesura, non plus la force élastique, mais le poids de vapeur d'eau formée dans les gaz. Il trouva, avec une grande approximation, que le poids mesuré était toujours égal au poids calculé d'après la loi de Dalton.

Aussi admet-on cette loi comme exacte, non seulement dans le cas où les vapeurs ont leur force élastique maxima à la température donnée, mais encore quand elles ont une force élastique inférieure quelconque, et l'on peut l'énoncer ainsi :

Les gaz et les vapeurs, en se mélangeant, ont une force élastique égale à la somme de celles qu'ils auraient isolément dans le même espace.

280. — EXPRESSION DU POIDS D'UN MÉLANGE DE GAZ ET DE VAPEURS.

Des expériences très soignées de M. Herwig ont confirmé le résultat auquel nous avait conduit l'expérience fondamentale de l'étude des vapeurs. Quand une vapeur est suffisamment éloignée de son point de liquéfaction, elle suit sensiblement la loi de Mariotte, elle a un coefficient de dilatation très voisin de celui des gaz : $\frac{1}{273}$, et une densité constante. Pour la vapeur d'eau, cette densité est très approximativement représentée par le nombre $\frac{5}{8}$.

Si donc on considère une masse de vapeur ayant le volume v, la force élastique f et la température t et qu'on passe aux nouvelles conditions v', f', t', on aura la relation

$$\frac{vf}{1+\alpha t} = \frac{v'f'}{1+\alpha t'},$$

d'où

$$f' = \frac{v}{v'}\,\frac{1+\alpha t'}{1+\alpha t} f,$$

pourvu que f et f' soient inférieures ou au plus égales à la force élastique maximum $F_{t'}$ à la température t'.

Si, par le calcul, on trouvait $f' > F_{t'}$, cela signifierait qu'une partie de la vapeur se serait condensée en passant au volume v' et à la température t'.

Nous trouverons facilement l'expression, en grammes, du poids d'une masse d'air humide.

Soient V le volume exprimé en litres, H la pression, t la température d'une masse d'air contenant de la vapeur d'eau dont la force élastique actuelle serait f. Le poids total P est égal à la somme des

poids p de l'air sec et p' de la vapeur d'eau. Or on a

$$p = V.1,293 \frac{1}{1+\alpha t} \frac{H-f}{760},$$

$$p' = V.1,293 \frac{5}{8} \frac{1}{1+\alpha t} \frac{f}{760}.$$

Donc

$$p + p' = V.1,293 \frac{1}{1+\alpha t} \frac{H + \frac{5}{8}f - f}{760}$$

ou enfin

$$P = V.1,293 \frac{1}{1+\alpha t} \frac{H - \frac{3}{8}f}{760}.$$

281. — FORMATION DES VAPEURS DANS LA MASSE DU LIQUIDE. ÉBULLITION.

Quand on soumet à l'action d'une source suffisante de chaleur un liquide, de l'eau par exemple, il se fait d'abord à la surface de ce liquide une évaporation suivant la loi ordinaire; mais on ne tarde pas à voir de petites bulles gazeuses prendre naissance en certains points des parois du vase. Celles de ces bulles qui apparaissent en premier lieu semblent s'anéantir pendant leur ascension et ne parviennent pas à atteindre la surface libre du liquide : ce sont donc des bulles de vapeur qui se condensent en chemin au contact de couches plus froides. Mais bientôt les bulles ne se condensent plus; elles augmentent de volume et se produisent simultanément dans toute la masse du liquide : c'est le phénomène de l'*ébullition*.

Lois de l'ébullition. — Ce phénomène est soumis aux trois lois suivantes :

1° *Un liquide donné entre toujours en ébullition à la même température, la pression extérieure étant constante;*

2° *La température du liquide reste la même pendant toute la durée du phénomène;*

3° *Un changement de volume très grand accompagne ce changement d'état.* C'est ainsi que 1^l d'eau à $100°$ donne naissance à 1700^l de vapeur saturante à la même température.

On peut calculer ce nombre qui intervient très souvent dans les

applications ou bien en se servant de la formule

$$\varpi = \mathrm{V}ad\frac{p}{760}\frac{1}{1+\alpha t}$$

ou bien de la relation

$$pv = \mathrm{RT};$$

en faisant dans cette dernière, pour $p_0 v_0 = \mathrm{RT}_0$,

$$p_0 = 1033, \qquad v_0 = \frac{1}{ad} = \frac{1}{0,000\,804} = 1243,7 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{T}_0 = 273,$$

on a

$$\mathrm{V} = 4709\frac{\mathrm{T}}{p},$$

et elle donne en centimètres cubes le volume correspondant à 1^{g} d'eau.

Pour vérifier les deux premières lois, il suffit d'observer la marche d'un thermomètre plongé dans un liquide bouillant sous la pression atmosphérique; on voit sa colonne demeurer stationnaire pendant tout le temps que dure l'ébullition. Pour l'eau, cette température a comme valeur moyenne 100° sous la pression de 760^{mm}.

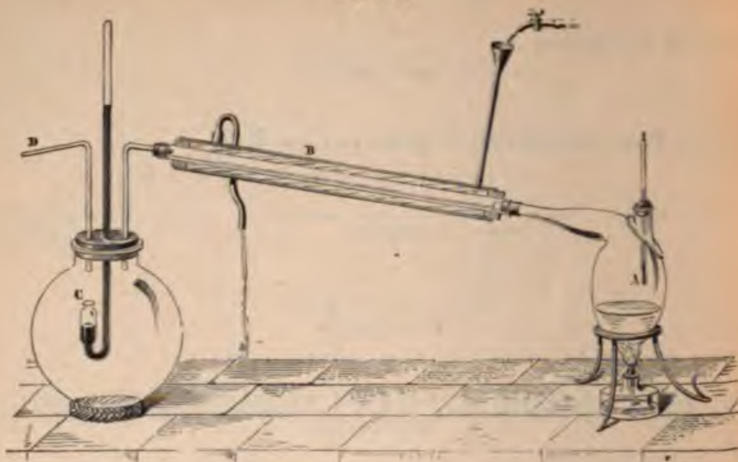
Ceci nous montre que la chaleur du foyer pendant le phénomène n'est plus employée à élever la température du liquide : elle ne sert qu'à produire le changement d'état.

Si la pression extérieure vient à changer, la température à laquelle a lieu l'ébullition ou, comme on dit souvent, le *point d'ébullition*, change aussi.

Faisons, par exemple, bouillir de l'eau dans une cornue tubulée A (*fig.* 247) munie d'un thermomètre et dont le col, refroidi par un courant d'eau B, communique avec un ballon C dans l'intérieur duquel on peut faire varier et mesurer la pression. Si nous raréfions l'air en C nous constaterons que l'ébullition se produit à une température constante mais inférieure à 100°. Comme la vapeur est condensée en B au fur et à mesure de sa production, la pression ne peut d'ailleurs pas s'élever. En mesurant chaque fois avec soin la force élastique de l'atmosphère du ballon, on trouve ainsi que l'*ébullition d'un liquide se produit à la température pour laquelle la force élastique maxima de sa vapeur est égale à la pression de l'atmosphère qui le surmonte.*

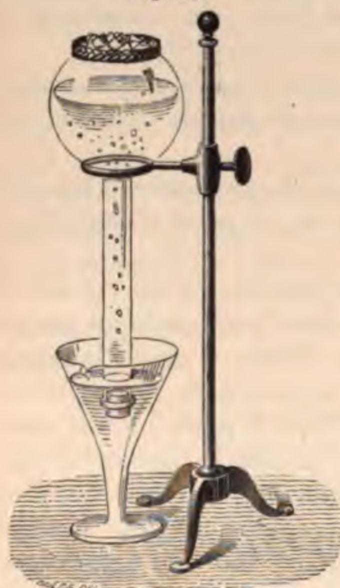
Ainsi, en diminuant la pression au-dessus d'un liquide, nous le ferons bouillir à une température plus basse; nous élèverons au con-

Fig. 247.



traire son point d'ébullition en augmentant la pression dans le vase qui le renferme. Le *bouilleur de Franklin* (*fig.* 248) est une expérience de cours classique qui sert à vérifier la première de ces deux conséquences; quant à la seconde, elle se vérifie constamment dans les chaudières des machines à vapeur, ou à l'aide de l'instrument que l'on montre dans les cours sous le nom de *marmite de Papin.* Ce dernier appareil se prête à une expérience intéressante. L'ébullition étant retardée jusqu'à 180°, on peut, malgré cela, plonger sans aucun risque la main dans le jet de vapeur qui sort avec violence de l'appareil quand on en soulève la soupape. La Thermodynamique (**232**) nous avait permis de prévoir ce résultat.

Fig. 248.



Inversement, l'observation du point d'ébullition de l'eau permet d'en déduire la pression correspondante, et, si l'on est sur une mon-

tagne, la hauteur de cette dernière : c'est le principe de l'*hypsomètre*.

282. — THÉORIE ET ÉTUDE EXPÉRIMENTALE DE L'ÉBULLITION.

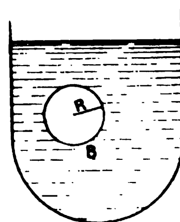
Rôle des gaz. — Nous avons constaté expérimentalement que l'*ébullition d'un liquide se produisait à la température pour laquelle la tension maxima de sa vapeur égalait la pression extérieure.*

Nous pouvons établir ce principe par un raisonnement simple.

Pour qu'une bulle, formée dans la masse liquide, puisse arriver à la surface après s'être augmentée dans l'intérieur du liquide, il faut qu'elle puisse surmonter la pression extérieure. Or, cette bulle est gonflée par la vapeur du liquide, dont la force élastique est au plus égale à la force élastique maxima, à la température de l'expérience. Il faut donc que la température soit au moins égale à celle pour laquelle la tension maxima est égale à la pression extérieure.

On peut, d'ailleurs, étudier d'un peu plus près la formation de ces bulles de vapeur au sein du liquide. Soit B une bulle naissante (*fig.* 249). On peut toujours, avec une approximation suffisante, supposer sphérique une petite bulle gazeuse; soit R son rayon. La pression de l'air qu'elle renferme et qui, comme nous le verrons plus loin, est *nécessaire* à sa formation, est inversement proportionnelle au binome de dilatation; ce sera donc une expression de la forme $K\frac{1+\alpha t}{R^3}$. Pour avoir la pression totale à l'intérieur de la bulle, il faut ajouter à cette valeur la force élastique F_t maxima de la vapeur d'eau à la température t. La pression φ à l'intérieur est donc

Fig. 249.



$$\varphi = F_t + K\frac{1+\alpha t}{R^3}. \qquad (1)$$

A l'extérieur de la bulle, nous avons à exprimer deux forces : 1° la pression p qui existe dans le liquide au point où se trouve la bulle; 2° la pression capillaire qui est, comme nous l'avons vu, $\frac{2A}{R}$; A étant la *tension superficielle*. Nous avons donc, à l'extérieur de la bulle,

une action totale φ_1

(2) $$\varphi_1 = p + \frac{2A}{R};$$

écrivons qu'il y a équilibre, c'est-à-dire que $\varphi = \varphi_1$; il vient

$$p = F + K\frac{1+\alpha t}{R^3} - \frac{2A}{R}.$$

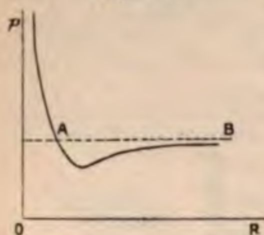
Si nous considérons p et R comme des coordonnées, la courbe indiquée sur la figure 250 représente le phénomène : cette courbe est asymptote à la droite

$$p = F,$$

et elle coupe cette droite en un point A, à distance finie.

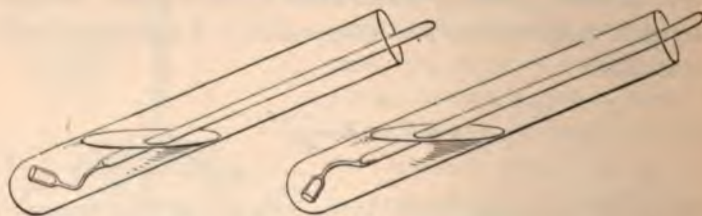
En cherchant à déterminer le point d'ébullition de l'eau, Gay-Lussac avait remarqué qu'il était plus élevé de 1°,3 dans un vase de verre que dans un vase métallique. Avant lui, de Luc avait déjà obtenu de l'eau surchauffée à 140° sans la voir bouillir, et M. Donny, en chauffant avec précaution de l'eau dans un marteau d'eau soigneusement construit, vit l'ébullition retardée jusqu'à 137°.

Fig. 250.



De ces expériences il semblait résulter que, dans l'eau *privée d'air,* l'ébullition n'a lieu que très difficilement. Des expériences très nettes, dues à M. Gernez, ont démontré d'une façon indiscutable que le rôle essentiel de l'air est de provoquer l'ébullition. Ce physicien a pris de l'eau bien privée d'air et présentant nettement le phénomène du retard à l'ébullition; il lui

Fig. 251.



suffisait d'introduire au sein du liquide une bulle d'air, à l'aide d'une petite cloche renversée (*fig.* 251), pour voir cette bulle devenir le point de départ d'une grande quantité de bulles de vapeur, et l'ébul-

lition commencer. Or elle s'arrêtait naturellement quand on suspendait l'action du foyer, et l'on constatait que la petite bulle d'air était toujours au fond de la cloche; si l'on recommençait à chauffer avant que cette bulle fût dissoute, l'ébullition recommençait aussitôt, mais on ne pouvait plus la produire si la bulle avait complètement disparu par dissolution ou si, en retournant la cloche, on avait laissé la bulle s'échapper.

Nous pouvons donc affirmer avec de Luc et M. Gernez que la *présence des bulles gazeuses libres est indispensable à l'ébullition normale*. Dès lors l'ébullition n'est plus qu'un cas particulier de l'évaporation.

Il résulte de ce qui précède qu'il faudra, pour prendre la température d'ébullition d'un liquide, s'assurer que l'ébullition est normale et n'a point subi de retard; le plus simple est alors d'y introduire de l'air en y jetant un corps pulvérulent sans action chimique sur lui : de la mousse de platine ou des grains de charbon pur, l'air dissous ne suffisant pas à maintenir longtemps l'ébullition. Quant à la vapeur d'un liquide bouillant, elle est toujours à la température de l'ébullition normale. Aussi détermine-t-ón le second point fixe des thermomètres en les plongeant, non dans l'eau bouillante, mais dans sa vapeur.

283. — CALÉFACTION.

Un cas très intéressant de retard à l'ébullition se produit au contact d'un liquide et d'une paroi très chaude : une goutte d'eau jetée sur une plaque de platine chauffée au rouge y roule en prenant la forme d'un globule et disparaît par évaporation lente, mais sans produire l'abondant dégagement de vapeurs qui aurait lieu si la plaque n'était, par exemple, chauffée qu'à 100°. En même temps, on observe que la goutte ne touche pas la plaque rougie : le courant électrique ne se transmet pas de l'une à l'autre; de plus, en plongeant dans la goutte ainsi *caléfiée* ou à l'*état sphéroïdal* la boule d'un petit thermomètre, on constate que la température est toujours inférieure à celle de l'ébullition.

On peut expliquer ces particularités en ayant recours aux lois qui régissent les phénomènes capillaires. On sait que la constante capillaire diminue quand la température s'élève. La courbure superficielle de la goutte, d'abord concave, comme c'est le cas général, devient donc convexe, et le liquide, ne mouillant pas la paroi au-dessus de laquelle il se trouve, se met en boule comme une goutte de mer-

cure. On a mesuré la température à laquelle cessait la caléfaction pour faire place à l'ébullition : on a trouvé 160° pour l'eau, 134° pour l'alcool, 60° pour l'éther. On pourrait peut-être en conclure que ces températures seraient celles auxquelles les ménisques terminaux de ces liquides cesseraient d'être concaves pour devenir convexes.

Quant à la température relativement basse du globule caléfié, elle s'explique aisément : *il n'y a pas contact du liquide avec la plaque rougie*, comme on le démontre aisément, soit en constatant que deux fils attachés aux deux pôles d'une pile et communiquant respectivement avec la bulle et la plaque ne ferment pas le circuit, soit optiquement. La chaleur de la plaque rougie ne parvient donc au globule que par rayonnement, et l'active évaporation qui se fait par sa surface suffit à abaisser la température.



CHAPITRE V.

FORCES ÉLASTIQUES DES VAPEURS.

La mesure des forces élastiques des vapeurs et en particulier de la ieur d'eau présente un très grand intérêt; aussi le nombre des ysiciens qui se sont occupés de cette question est-il considérable. Cependant les résultats ne présentent pas dans la plupart des cas une icordance satisfaisante, et les divergences notables que l'on cons- e, même entre des limites de température peu écartées, méritent on les explique. Elles tiennent le plus souvent à des imperfections is la préparation du liquide générateur de la vapeur et à l'insuffi- ice du vide dans les appareils de mesure. La présence d'un gaz sous dans le liquide générateur ou de traces d'air dans la chambre ométrique suffit en effet pour apporter dans les résultats un trouble table, et c'est pour ne s'être pas assez préoccupés de cette difficulté mise en expérience que les différents opérateurs ont dressé des bles de tensions si différentes.

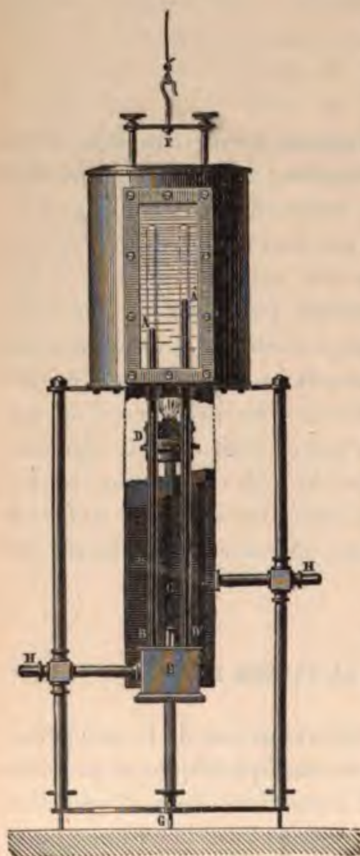
284. — FORCE ÉLASTIQUE DE LA VAPEUR D'EAU.

1° **Températures ordinaires.** — La détermination de la force élas- ue de la vapeur d'eau aux températures atmosphériques ne présente de difficulté; il suffit en effet de construire deux baromètres cés sur la même cuvette et d'introduire dans l'un d'eux une goutte au qui se rend dans le vide barométrique. La différence de hau- r des deux baromètres placés dans des circonstances identiques ine la tension de la vapeur d'eau pour la température à laquelle ils trouvent. Quant à cette température, on se contente ordinairement ir la mesurer de placer un thermomètre à la hauteur de la chambre ométrique. C'est de cette façon que M. Kæmtz a pu dresser une bonne Table des tensions de vapeur d'eau entre — 19° et + 26°

résultant d'une longue suite d'observations poursuivies pendant deux années.

Le même procédé peut être employé pour les températures qui diffèrent peu de celles-là. Il suffit en effet que les deux baromètres soient entourés d'un manchon en verre plein d'eau dont on puisse élever la température. C'est le procédé employé par Dalton. Il est peu susceptible de précision, tant à cause de l'incertitude que présente la détermination de la température nécessairement inégale d'une longue colonne d'eau, qu'à cause de la difficulté qu'on éprouve à lire une différence de niveaux à travers un manchon de verre.

Fig. 252.



Regnault a employé cette méthode et fait construire dans ce but l'appareil suivant : deux baromètres (*fig.* 252), l'un sec, l'autre mouillé, disposés contre une planche, plongent dans la même cuve ; une caisse en tôle, qui présente une fenêtre rectangulaire fermée par une glace de verre à faces parallèles, entoure la partie supérieure seulement des deux baromètres et contient de l'eau que l'on peut maintenir chaude à l'aide d'une lampe à alcool. Le baromètre sec porte un trait vers le niveau ordinaire du mercure ; le baromètre mouillé porte plusieurs traits distants de 1^{cm}. On s'assure, en relevant au cathétomètre les distances des traits de ces deux baromètres, que l'interposition de la glace et de la couche d'eau ne change rien aux valeurs absolues de ces distances.

Le thermomètre plonge dans l'eau de la cuve, qui doit être vivement agitée ; on n'a pas ici à craindre, comme dans les expériences où le manchon repose sur la cuve à mercure, que l'agitation se transmette aux colonnes de mercure et rende les lectures impossibles ; il suffit donc d'arrêter l'agitateur pendant les courts instants que durent ces lectures.

La différence de hauteur des colonnes de mercure est à la température du bain ; il suffira de la corriger. Les colonnes ne sont pas, il est vrai, chauffées dans toute leur hauteur, mais on peut admettre qu'elles sont dans toute leur hauteur à des températures identiques.

L'eau forme une couche de 3^{mm} à 4^{mm} au-dessus du mercure dans le baromètre mouillé ; cette couche, par son poids, déprime le mercure, et tend, d'autre part, à élever la colonne par son action capillaire.

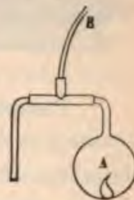
On réduit la hauteur de cette colonne d'eau en colonne équivalente de mercure, et l'on ajoute cette petite quantité à la hauteur lue dans le baromètre mouillé.

Quand à l'influence capillaire, Regnault la déterminait par une expérience directe.

Il soudait à l'extrémité supérieure des deux tubes barométriques qu'il avait employés des tubes de verre capillaires qu'il mastiquait dans un tube de cuivre à trois branches servant à les mettre en relation avec la machine pneumatique ; sur l'un des tubes capillaires était soudé un tube à ponce sulfurique ; on enlevait l'air des deux baromètres à l'aide de la pompe et l'on fermait à la lampe le tube de communication avec la machine pneumatique ; on faisait alors pénétrer dans l'un d'eux une petite couche d'eau, et l'on avait ainsi constitué deux baromètres, imparfaits il est vrai, mais réalisant d'autre part exactement les conditions des expériences précédentes. Les deux baromètres ont même pression intérieure : la différence de leurs hauteurs, lorsqu'on a tenu compte de la couche d'eau, représente donc l'altération due à l'action capillaire ; cette correction était de $0^{mm},12$.

Regnault fit une seconde série de mesures avec un second appareil un peu différent. L'un des baromètres est réuni par un tube étroit à un ballon de 500^{cm^3} qui renferme une ampoule pleine d'eau bouillie; par une tubulure latérale, on peut faire le vide par l'intermédiaire de tubes desséchants (*fig.* 253). On fait le vide un grand nombre de fois aussi parfaitement que possible (la machine ne permettait pas d'abaisser la pression au-dessous de 1^{mm}); on remplit alors le manchon de glace fondante et l'on mesure la différence de niveau des deux baromètres après avoir fermé à la lampe la communication avec la machine; on connaît ainsi la tension de l'air sec à zéro resté dans la chambre barométrique. C'est à ce moment qu'il faut, avec quelques charbons, déterminer la rupture de l'ampoule, puis on entoure de nouveau

Fig 253.

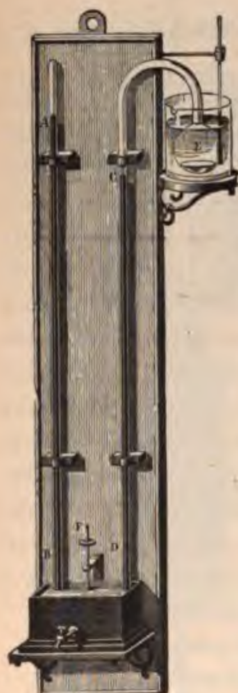


le ballon de glace fondante et l'on mesure la différence de niveau des deux baromètres ; en la diminuant de celle qu'on vient de mesurer, on a la force élastique de la vapeur d'eau à zéro.

Aux températures supérieures à zéro, on opère comme avec l'appareil précédent.

2° **Températures inférieures à zéro**. — C'est ce même appareil qu'a employé Regnault pour déterminer, par une méthode déjà pratiquée par Gay-Lussac, les forces élastiques de la vapeur d'eau au-dessous de zéro. La seule différence de construction tient à ce que le ballon E (*fig.* 254) est logé dans une cloche de verre d'environ 20^l, le manchon étant supprimé. Cette cloche renferme de la glace fondante ou bien un mélange réfrigérant liquide convenablement agité, formé par de la neige et du chlorure de calcium. La température pouvait ainsi être rendue constante dans tout le mélange, ce qui était très difficile à obtenir avec le mélange de glace et de sel marin employé par Gay-Lussac.

Fig. 254.



La grande différence réside dans le principe même de cette méthode. La chambre à vapeur n'est plus entièrement portée à la température de l'expérience ; une partie seulement s'y trouve maintenue, et le principe de la paroi froide nous permet de conclure que la différence de pression mesurée est celle qui correspond à la température du mélange réfrigérant.

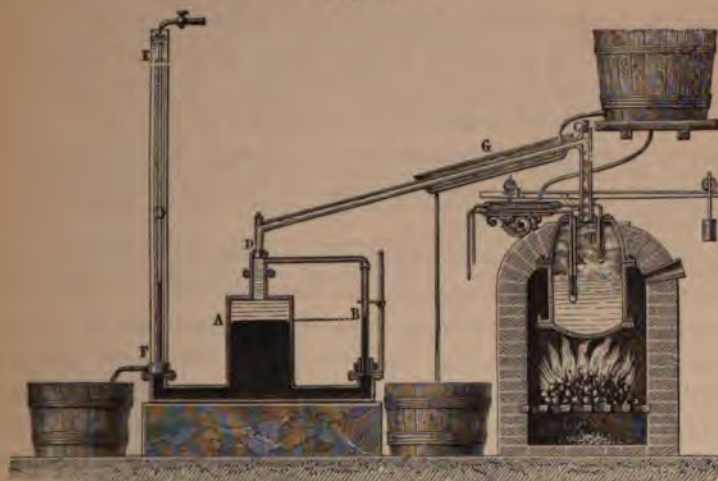
Ces méthodes se prêtent tout aussi bien à la mesure des forces élastiques de vapeurs quelconques dans les mêmes limites de températures, c'est-à-dire entre — 30° et + 60°.

3° **Températures élevées** : *a*. Expériences de Dulong et Arago. — Dulong et Arago mesurèrent la tension de la vapeur d'eau produite dans une chaudière close et qui était mise en relation avec un manomètre à l'air comprimé. A chaque température maintenue constante correspondait une valeur fixe de la pression ; l'appareil était disposé de façon à permettre la lecture simultanée de ces deux éléments.

La chaudière K (*fig.* 255) est d'une capacité d'environ 80^l ; elle renferme de l'eau et l'air en a été totalement chassé par une ébullition

prolongée ; elle communique par un tube de fer droit, puis coudé et légèrement incliné, avec un réservoir à mercure A en fonte. Le tube incliné contient de l'eau maintenue à température constante par un réfrigérant G ; il reste toujours plein, grâce à la distillation de la

Fig. 255.



vapeur qui vient se condenser en C. Le réservoir A porte à sa partie inférieure deux tubulures : sur l'une est mastiqué un tube de verre B, qui communique par sa partie supérieure avec l'eau du réservoir et sert par suite à indiquer le niveau B du mercure ; sur l'autre est en EF un manomètre à air comprimé, qui n'est autre chose que l'appareil qui avait servi à la même Commission dans ses études préalables de la loi de Mariotte ; ce manomètre était entouré d'eau froide et sa graduation avait été faite expérimentalement jusqu'à 27^{atm}. Il est clair que la pression de l'air dans le manomètre fait équilibre à la somme algébrique des pressions représentées par la différence de niveau du mercure, la colonne d'eau AC et la force élastique de la vapeur. Cette dernière quantité pourra donc se déduire de la lecture des autres.

La mesure exacte des températures était obtenue à l'aide de deux thermomètres portés dans les canons de fusil soudés au couvercle de la chaudière et plongeant l'un presque jusqu'au fond, l'autre au quart de sa profondeur ; le premier donnait la température de l'eau, le second celle de la vapeur ; ces tubes étaient pleins de mercure dont la conductibilité facilitait la mise en équilibre de température ; les tiges de ces thermomètres étaient coudées et placées horizontalement

dans des réfrigérants à température connue, ce qui permettait les corrections.

Les lectures étaient faites au moment où l'on jugeait que la température de la chaudière passait par un maximum, qui était indiqué par le ralentissement de la marche des thermomètres et des variations du manomètre.

Dulong et Arago avaient l'intention de pousser les expériences jusqu'à 30^{atm}, mais la chaudière perdait une si grande quantité d'eau qu'il leur fut impossible d'aller au delà de 24^{atm}; ils firent, dans cet intervalle, trente observations comprises entre 123° et 224°.

L'écart entre les deux thermomètres n'a jamais dépassé 0°,07, et cela seulement vers les basses températures, l'accord étant bien meilleur aux températures élevées.

La Commission française avait exécuté ses mesures de 1823 à 1829; à peu près vers cette même époque, une Commission de savants américains se livrait à des expériences de la même nature par des procédés à peu près semblables. Ces expériences ne s'étendent que jusqu'à 10^{atm} et ne présentent malheureusement pas une concordance satisfaisante avec celle des savants français. La courbe construite d'après ces dernières observations est plus basse que celle de Dulong et Arago dans la partie inférieure de l'échelle; elle la coupe vers le milieu et s'élève ensuite au-dessus de telle façon que, vers 10^{atm}, il y a déjà une différence de 0°,65.

b. Expériences de Regnault. — Il y avait donc une incertitude qui rendait indispensables de nouvelles recherches. Regnault fait remarquer que ces divergences doivent tenir à la non-comparabilité des thermomètres à mercure employés; et qu'elles auraient certainement disparu si les deux Commissions avaient employé à la détermination des températures le thermomètre à air.

En 1843, il exécuta de nouvelles expériences sur le même sujet, en même temps que Magnus en Allemagne. Leurs résultats furent très concordants, mais les expériences de Magnus ne s'étendent que de $-20°$ à $+115°$; celles de Regnault vont au contraire de $-30°$ à $+230°$.

Le principe de la méthode a déjà été indiqué dans l'étude de l'ébullition, et l'appareil n'est que la reproduction sous une autre forme de l'appareil que nous avons décrit à ce propos. On fait bouillir de l'eau dans un vase qui communique librement avec un grand espace dans lequel on peut comprimer ou dilater à volonté de l'air; cet air forme une atmosphère artificielle qui exerce une pression au-dessus du

liquide chauffé. Dans ces conditions, l'ébullition s'établit à une température parfaitement fixe et que l'on peut maintenir stationnaire aussi longtemps que l'exigent les mesures que l'on a à effectuer. Il n'est pas alors nécessaire, comme dans les expériences de Dulong et Arago, de faire à la hâte les mesures pendant la courte durée d'un maximum souvent difficile à saisir.

Regnault fit construire un petit appareil à l'aide duquel il soumit cette méthode à des essais préliminaires, et ce fut à la suite de ces essais qu'il en fit construire un beaucoup plus grand destiné aux plus hautes pressions.

L'intérêt étant tout entier dans la méthode et dans le principe de la disposition expérimentale, il nous suffira de faire connaître le plus petit des deux instruments et les résultats généraux obtenus.

L'appareil consiste en une cornue de cuivre rouge (*fig.* 256) fer-

Fig. 256.



mée par un couvercle boulonné ; ce couvercle est traversé par quatre tubes en fer fermés par le bas, dont deux descendent au milieu, deux au fond de la cornue ; ils sont destinés à recevoir les thermomètres *b*, *c* qui plongent dans du mercure. Ces thermomètres sont soigneusement comparés au thermomètre à air. Le col de la cornue s'engage dans un tube incliné d'environ 1^m de long, enveloppé d'un manchon de cuivre A dans lequel on fait circuler de B en C un courant d'eau froide. Ce tube communique avec un ballon en cuivre

de 24^l de capacité renfermé dans un grand vase plein d'eau. Le ballon porte un ajutage à deux branches qui communique d'une part au baromètre différentiel ou au manomètre à air libre, d'autre part à une machine pneumatique ou à une machine de compression.

Pour opérer au-dessous de la pression atmosphérique, on fait le vide dans le ballon. On chauffe l'eau jusqu'à l'ébullition : on reconnaît qu'on l'a obtenue quand les thermomètres sont stationnaires ; la vapeur vient se condenser dans le réfrigérant et retombe dans la cornue. La pression sous laquelle se fait l'ébullition est facilement mesurée au manomètre barométrique ; la colonne de mercure, quoique n'étant pas absolument stationnaire, n'effectue que des oscillations qui ne dépassent pas $0^{mm},1$. Les thermomètres étaient lus à la lunette pour éviter les erreurs de parallaxe.

On laissait peu à peu rentrer l'air et l'on poursuivait les mesures jusqu'à la pression atmosphérique.

Pour les pressions supérieures à la pression atmosphérique, on comprimait l'air dans le grand ballon et on lisait, à l'aide de deux cathétomètres, les niveaux du mercure ; on en prenait la différence, et il fallait y ajouter la pression atmosphérique pour connaître la force élastique de la vapeur. L'emploi de ces appareils faisait disparaître les erreurs auxquelles on s'exposait dans la méthode de Dulong et Arago par l'emploi du manomètre à air comprimé.

Les thermomètres sont presque complètement plongés dans les tubes de fer ; la partie de la colonne mercurielle qui sort subit une légère correction que Regnault effectue en prenant la température moyenne à l'aide d'un petit thermomètre placé à mi-hauteur ; on n'observe d'ailleurs pas de différences sensibles entre les indications des thermomètres plongés dans l'eau et de ceux qui sont dans la vapeur.

Le grand appareil est construit identiquement d'après les mêmes principes ; le petit fut employé entre 40° et 148°, l'autre entre 100° et 231°.

Résultats. Formules. — Les résultats furent représentés graphiquement : les températures portées en abscisses, les forces élastiques en ordonnées. Tous les points obtenus dans une même série d'expériences se placent exactement sur une courbe dont la continuité parfaite montre que les erreurs accidentelles des observations ne peuvent être que très faibles.

Mais les courbes figurant les diverses séries d'expériences aux mêmes températures se superposent rarement d'une manière absolue : elles sont parallèles et séparées d'une quantité toujours à la vérité

très faible. Cette différence est probablement explicable par le déplacement continu des points fixes, bien que Regnault ait pris la précaution de les déterminer à nouveau chaque jour.

Ces courbes peuvent être représentées par des formules d'interpolation; il en a été imaginé un nombre considérable. L'une d'elles, proposée par Biot, s'accorde le mieux avec les observations, ce qui tient à ce qu'elle contient cinq paramètres qui nécessitent pour leur calcul cinq observations; cela revient à dire que la courbe représentée par cette formule passe par cinq points pris sur le tracé graphique. Regnault lui a donné la forme suivante

$$\log F = a - b\alpha^x - c\beta^x;$$

x et les coefficients ont les valeurs suivantes

$$x = t^\circ + 20;$$

$$a = 6,2640348,$$

$$\log b = 0,1397743, \qquad \log \alpha = \bar{1},994049292,$$

$$\log c = 0,6924351, \qquad \log \beta = \bar{1},998343862.$$

Cette formule représente très bien l'ensemble des résultats de Regnault depuis -33° jusqu'à $+232^\circ$.

Duperray a proposé une formule fort simple applicable entre 97° et 230°, c'est-à-dire dans le cas des machines à vapeur :

$$f = at^4,$$

dans laquelle f représente les kilogrammes de pression par centimètre carré et t la température exprimée en centaines de degré. Le coefficient a est égal à 0,984, c'est-à-dire sensiblement à l'unité, de sorte que le calcul peut se faire très simplement à l'aide de la formule

$$f = t^4.$$

Cette formule présente un accord satisfaisant avec celle de Regnault, pour les calculs industriels tout au moins. Ainsi, à 200°, elle conduit à conclure que la pression de la vapeur d'eau en kilogrammes est de 16^{kg} par centimètre carré, alors que la formule de Regnault donne une force élastique de $15^{atm},34$, c'est-à-dire une pression de $15^{kg},90$ environ.

CHAPITRE VI.

HYGROMÉTRIE.

285. — ÉTAT HYGROMÉTRIQUE.

Le problème général de l'Hygrométrie consiste à déterminer la *quantité* de vapeur d'eau qui se trouve dans un volume donné d'air à un instant donné; on peut en conclure immédiatement le rapport e qui existe entre cette quantité et celle que l'air renfermerait s'il était à l'état de saturation, rapport que l'on nomme l'*état hygrométrique*.

Les méthodes qui ont été proposées par les physiciens sont de deux espèces, suivant qu'on se propose de déterminer le poids p de la vapeur d'eau, ou sa tension f. Il est facile de montrer que la connaissance de l'une de ces deux quantités conduit facilement au calcul de la seconde et que la détermination de l'une ou de l'autre permet le calcul de e.

En effet, le poids d'un certain volume de vapeur d'eau à la pression f et à la température t est exprimé par la relation qui lie p et f

$$(1) \qquad p = v \times 1{,}293 \times 0{,}622 \frac{f}{760} \frac{1}{1+\alpha t};$$

d'ailleurs le poids P de la vapeur contenue dans un même volume à la même température, s'il y avait saturation, s'exprimerait par la même formule où l'on remplacerait p par P et f par F, tension maxima de la vapeur d'eau à $t°$; on voit donc que, en divisant membre à membre ces deux relations, on aurait

$$e = \frac{f}{F} = \frac{p}{P}.$$

Les méthodes dans lesquelles on détermine p sont dites *méthodes chimiques;* elles consistent à absorber, au moyen de substances très avides d'eau, la vapeur d'eau renfermée dans un volume connu d'air et à en déterminer le poids par la balance.

Les autres sont des méthodes fondées sur l'observation de certains phénomènes physiques et peuvent se diviser en trois groupes, suivant que l'on constate et que l'on mesure :

1° La déformation de certaines substances organiques. Les appareils de cette première catégorie mériteraient plutôt le nom d'*hygroscopes;* on les nomme *hygromètres par absorption :* le type en est l'*hygromètre à cheveu* de de Saussure;

2° La température à laquelle il faut abaisser l'air pour qu'il se trouve saturé par la quantité d'humidité qu'il renferme : ce sont les *hygromètres à condensation ;*

3° Enfin la différence de température entre un thermomètre sec et un thermomètre humide; l'appareil employé à ce genre d'observation porte le nom de *psychromètre*.

286. — MÉTHODE CHIMIQUE.

La méthode chimique a été décrite par Brunner. Elle consiste à aspirer dans l'atmosphère, au point que l'on choisit et à l'aide de tubes de verre joints par des caoutchoucs, une certaine quantité d'air que l'on fait passer à travers trois tubes desséchants à ponce sulfurique. Le premier et le second sont les appareils d'absorption, le troisième sert à protéger les deux premiers contre le retour de la vapeur d'eau provenant de l'aspirateur à eau que l'on emploie dans ces expériences.

Les deux tubes étant tarés à la balance, on ouvre les robinets de l'aspirateur de façon à faire passer lentement le courant d'air à travers les tubes; l'opération se poursuit jusqu'à ce que l'eau de l'aspirateur soit totalement écoulée. On pèse alors de nouveau les deux tubes : ils ont augmenté d'un poids ϖ.

Soient

t la température moyenne de l'air pendant l'expérience,
f la force élastique de la vapeur d'eau,
t' la température de l'aspirateur à la fin de l'expérience,
F' la tension maxima de la vapeur correspondante,
H la pression barométrique à la fin de l'expérience,
α et k les coefficients de dilatation de l'air et de la tôle,
V_0 le volume de l'aspirateur à zéro.

Le volume de l'aspirateur à t' sera $V_0(1+kt')$. C'est le volume de l'air aspiré quand l'appareil est vidé d'eau. Mais ce volume est saturé

de vapeur; par suite, l'air sec n'y possède qu'une force élastique H—F': ce même air exerçait au dehors une presion $H - f$. Ainsi son volume est, dans ce dernier cas,

$$V_0(1 + kt')\frac{H - F'}{H - f}.$$

La température de cet air est t avant l'aspiration, t' dans l'aspirateur; son volume était donc, dans le premier cas,

$$V_0(1 + kt')\frac{H - F'}{H - f}\,\frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha t'}.$$

En désignant par a le poids du litre d'air dans les conditions normales et par d la densité de la vapeur d'eau, le poids ϖ de vapeur qui se trouvait dans ce volume d'air est

$$V_0(1 + kt')\frac{H - F'}{H - f}\,\frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha t'}\,ad\,\frac{1}{1 + \alpha t}\,\frac{f}{760}.$$

On a donc définitivement

$$\varpi = V_0(1 + kt')\frac{H - F'}{H - f}\,\frac{1}{1 + \alpha t'}\,ad\,\frac{f}{760},$$

expression d'où l'on pourra tirer f.

La méthode chimique ne donne pas la quantité d'humidité qui se trouve dans l'air à un instant déterminé, mais bien la quantité moyenne de vapeur que l'air renfermait pendant la durée de l'expérience. Elle ne répond donc pas au but que l'on se propose d'une observation exacte et rapide de l'état hygrométrique à un instant donné; elle exige une manipulation et des calculs trop longs.

Mais on peut l'employer avec avantage pour déterminer par exemple la quantité d'eau qui se trouve en suspension dans un nuage ou dans brouillard. En retranchant de la quantité ainsi mesurée celle qui pourrait exister dans cet air à l'état de saturation à la température à laquelle est faite l'observation, on en déduirait la quantité d'eau qui existe en suspension dans le nuage à l'état globulaire.

287. — HYGROMÈTRES PAR ABSORPTION.

L'hygromètre à cheveu de de Saussure n'est qu'un hygroscope; il ne présente qu'un avantage, qui est de donner des indications à simple lecture. Pour le construire, on prend des cheveux longs et fins et on les dégraisse en les faisant bouillir dans un petit sac plongé dans une

solution de 10g de carbonate de soude dans 1l d'eau; on les lave et on les sèche. On fixe un de ces cheveux, après lui avoir donné une longueur de 24cm, par une extrémité à une pince et on le tend par l'autre extrémité, à l'aide d'un poids de 0g,2. Vers le bas, il est enroulé sur une petite poulie dont l'axe porte une aiguille indicatrice mobile devant un cadran sur lequel on tracera la graduation de l'appareil (*fig.* 257).



Fig. 257.

Les deux points fixes de l'appareil : humidité extrême et sécheresse extrême se déterminent en portant l'hygromètre d'abord sous une cloche dont les parois sont mouillées, puis dans une autre qui renferme un cylindre de tôle couvert d'une couche de bicarbonate de potasse; l'intervalle est divisé en 100 parties égales.

Les inconvénients de ces appareils ont été mis en évidence par Regnault, qui a montré :

1° Que les degrés entre 0 et 100 ne correspondent pas aux états hygrométriques compris entre 0 et 1, c'est-à-dire que, lorsque l'hygromètre marque 75°, par exemple, on n'en peut pas conclure que l'état hygrométrique soit égal à 0,75;

2° Que les hygromètres ne sont pas comparables entre eux, c'est-à-dire que deux appareils ne donneront pas le même degré dans un même milieu;

3° Que le même hygromètre ne reste pas à la longue comparable à lui-même, c'est-à-dire ne marque pas le même degré lorsqu'il est, à un intervalle de temps suffisant, plongé dans un même milieu.

La méthode qu'il a employée pour cette étude des hygromètres est fort simple; elle consiste à préparer des solutions d'acide sulfurique de formules $(SO^4H^2 + nH^2O)$, ..., à 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12 et 18 équivalents d'eau et à déterminer avec le plus grand soin les forces élastiques de la vapeur d'eau donnée par ces solutions entre 0° et 50°.

L'hygromètre est alors suspendu dans une éprouvette cylindrique dont l'ouverture supérieure peut être fermée par un obturateur de verre et dans le fond de laquelle on place une couche de l'unedes solutions étudiées : on note les degrés que l'hygromètre marque, ainsi que la température à laquelle est faite l'expérience; les Tables

qu'on a dressées font connaître les états hygrométriques, pour chaque dissolution, aux températures d'observation. On peut ainsi établir ce qu'on appelle la *Table de l'hygromètre*, c'est-à-dire une Table de correspondance des degrés de l'hygromètre et des états hygrométriques réels.

288. — HYGROMÈTRES A CONDENSATION.

Le Roy, de Montpellier, a proposé le premier, pour déterminer l'état hygrométrique de l'air, de refroidir lentement l'eau renfermée dans un vase par l'addition successive de petites quantités de glace jusqu'à ce qu'il se forme un dépôt de rosée sur les parois.

La température de l'eau du vase est celle à laquelle l'air se trouverait complètement saturé par la quantité de vapeur qui s'y trouve; il suffit donc de lire la température ambiante T et la température de l'eau t, et de chercher dans les Tables qui donnent la force élastique maxima de la vapeur d'eau les valeurs F et f correspondantes pour en déduire l'état hygrométrique $e = \frac{f}{F}$.

Les hygromètres à condensation reposent tous sur ce principe très simple et ne diffèrent que par le procédé employé pour le refroidissement de la paroi.

L'appareil construit par Daniell (*fig.* 258) était très imparfait. Il consistait en deux boules réunies par un tube recourbé; dans l'une était de l'éther et un thermomètre dont le réservoir plongeait dans les couches supérieures du liquide : l'air avait été chassé de l'appareil; la seconde boule était vide; elle était de plus enveloppée d'une batiste sur laquelle l'observateur versait de l'éther goutte à goutte. L'évaporation de cet éther produit un abaissement de température qui détermine la distillation du liquide contenu dans la boule A. Celui-ci se refroidit donc à son tour et peut abaisser la température des parois de A au-dessous de la température à laquelle la condensation de la vapeur de l'air ambiant s'effectue. Le dépôt de rosée qui se produit est rendu plus apparent par la couleur bleu foncé que l'on donne au verre de la boule A.

Fig. 258.



Les imperfections de cet appareil sont nombreuses. La surface

seule de l'éther en A se refroidit; l'équilibre de température entre la couche d'éther et les parois de la boule ne s'établit que lentement, de sorte que le thermomètre indique une température en réalité plus basse que celle de la région où se forme la rosée; l'observateur étant dans le voisinage de l'appareil, sa présence influe sur l'état hygrométrique. Enfin l'évaporation de l'éther sur la boule A, dans le voisinage même des couches d'air dont on se propose de mesurer l'état hygrométrique, doit amener un changement très notable dans la valeur de la quantité qu'on observe. Cet éther renferme toujours en effet environ $\frac{1}{10}$ de son poids d'eau.

Regnault proposa un hygromètre condenseur qui était à l'abri de tous ces reproches; nous décrirons la forme très pratique que lui a donnée M. Alluard, cet appareil étant aujourd'hui d'un usage très répandu. Il se compose d'un prisme A (*fig.* 259) en laiton doré et bien poli; l'une de ses faces, sur laquelle le dépôt de rosée doit être observé, est encadrée dans une lame de laiton B dorée et polie, qui ne touche pas le prisme, et qui, n'étant par suite jamais refroidie, conserve son éclat. Cette disposition présente cet avantage que le dépôt de rosée s'observe avec plus de facilité par le contraste de la partie refroidie sur laquelle il s'effectue et de la lame qui l'encadre et qui reste brillante.

Fig. 259.



La partie supérieure de ce prisme est fermée par un bouchon que traverse un thermomètre, et porte trois tubulures C, D, E; la première porte un tube qui plonge jusqu'au fond du prisme dans l'éther qu'on y a versé par une tubulure en entonnoir E; les tubes D et C se recourbent à l'extérieur de l'appareil et viennent se terminer à deux robinets F et G. On réunit par un long caoutchouc le robinet F à un aspirateur à eau, et, en réglant le robinet de cet aspirateur et les robinets F et G, on peut arriver à faire passer de G en C à travers l'éther, puis en D et F, un courant d'air de rapidité variable à volonté.

On observe de loin avec une lunette le moment où le point de rosée est atteint, et l'on note la température t_1 au thermomètre t; en diminuant la vitesse du passage de l'air, l'instrument se réchauffe, et l'on

arrive à faire disparaître la rosée à une température t_2. En r
convenablement les robinets, on peut ramener les températu
et t_2 d'apparition et de disparition de la rosée à ne différer
fort peu; on en prend la moyenne comme expression de la te
ture t à laquelle la tension de vapeur serait saturante.

Un petit thermomètre fronde t' permet de mesurer rapiden
température T de l'air au moment de l'expérience; les Table
neront F.

Cet appareil est d'un usage très pratique et très rapide;
véritable hygromètre, mais il a l'inconvénient, au point de vu
Météorologie et de l'emploi qu'on en pourrait faire à la déte
tion des états hygrométriques dans un grand nombre de cent
l'absence d'un physicien, d'exiger u
nipulation, une petite expérience,
qu'il est indispensable de ne dem
dans ces observatoires rudimentaire
de simples lectures.

Fig. 260.



289. — PSYCHROMÈTRE.

Gay-Lussac a étudié le premier la
mination de l'état hygrométrique pa
servation simultanée d'un thermomè
et d'un thermomètre dont le réserv
maintenu constamment mouillé (*fig*

August a cherché à établir par de
dérations théoriques la formule qu
doit appliquer aux observations de
pareil, qui a reçu le nom de *psychro*
Sa théorie est incomplète et sa form
s'accorde que d'une façon insuffisan
les résultats d'observations directes.

En nous reportant aux considé
très simples que nous avons présent
quantité de vapeur formée autour du
voir humide est exprimée par la relation

$$E = \frac{BS}{H}(F - f).$$

Or la chaleur perdue par ce thermomètre est certainement

tionnelle au poids de vapeur émise; d'autre part, la chaleur gagnée par ce même thermomètre est proportionnelle à sa surface et à l'excès de la température t de l'air ambiant, donnée par le thermomètre sec, sur la température t' du thermomètre humide. On peut donc écrire, lorsque l'équilibre est atteint, que ces deux quantités sont équivalentes, et l'on a

$$\frac{\text{BS}}{\text{H}}(\text{F}-f)=\text{CS}(t-t'),$$

désignant par C un coefficient numérique qui doit être constant. Cette expression peut se mettre sous la forme

$$f=x=\text{F}-\text{AH}(t-t');$$

suffira donc de lire la température aux deux thermomètres et la pression barométrique au même instant pour pouvoir calculer f, si on a préalablement déterminé la valeur de la constante A.

Malheureusement, d'après les expériences de Regnault, la constante A varie considérablement avec le lieu où l'on opère : elle passe de 0,00074 à 0,00128, selon que l'expérience est faite à l'air libre ou dans une petite salle fermée.

Le coefficient dépend aussi, dans une grande mesure, de la vitesse du vent; c'est ainsi que Regnault, en faisant circuler avec une vitesse croissante de l'air sec dans un tube dans lequel était suspendu un psychromètre, obtint pour $t - t'$ les valeurs suivantes :

t.	$t-t'$.	Gaz écoulé en une minute.
°	°	cm³
14,96	7,38	797
»	8,09	1096
»	9,54	1466
»	10,29	3045
»	10,63	5067

On voit que la différence $t - t'$, qui augmente d'abord très vite, semble tendre vers une valeur limite lorsque la vitesse du gaz devient assez grande; cette considération nous conduira tout à l'heure à un mode d'observation du psychromètre.

Les indications du psychromètre dépendent donc de son exposition et de l'état de l'atmosphère, principalement de la vitesse du vent. On emploie deux procédés pour annuler cette double cause d'erreur : le *psychromètre fronde* et le *psychromètre ventilateur*.

Le premier fut étudié en 1855 par Doyère et depuis, en 1881, par M. J. Macé de Lépinay, qui proposèrent comme valeur de la con-

stante A les nombres 0,000687 et 0,000693, presque identiques. Il est théoriquement d'un maniement très simple, mais il nécessite une expérience de quelques minutes. Si peu que cela paraisse, cela suffit cependant pour empêcher que l'emploi de cet instrument se généralise dans les stations météorologiques où les observations doivent être faites à heure fixe par un personnel peu nombreux. C'est la même raison qui fait obstacle à l'emploi général des hygromètres à condensation. On doit chercher à donner aux observateurs des instruments où il n'y ait qu'une simple lecture à enregistrer.

Le psychromètre ventilateur porte en face des réservoirs des thermomètres et, à courte distance, un moulinet à ailettes mû par un puissant ressort; le vent produit place les réservoirs des thermomètres dans les mêmes conditions que le thermomètre et le psychromètre fronde; cet appareil est plus compliqué comme construction, mais d'une observation plus simple.

La constante qu'il faut employer est notablement différente de celle du psychromètre fronde et égale à 0,00078, d'après les études du Bureau central météorologique publiées par M. Angot.

D'ailleurs, dans nos régions, quand la température descend vers 0° ou quand, par suite de la sécheresse et de l'élévation de la température de l'air, la différence des thermomètres dépasse 12°, ou enfin quand la pression est notablement différente de 760, les formules ordinaires deviennent illusoires.

Jamin a fait, au sujet de l'état hygrométrique défini par le rapport $\frac{f}{F}$, cette remarque que le choix en est assez défectueux : l'introduction du facteur $\frac{1}{F}$ a pour effet de masquer l'influence de la température, et le quotient $\frac{f}{F}$ ne nous apprend que le degré de sécheresse ou d'humidité relatives sans mesurer la quantité de vapeur. Il proposa, en 1884, d'évaluer la proportion de vapeur contenue dans un volume déterminé d'air, c'est-à-dire exactement la *composition hygrométrique de l'air* comme on détermine sa composition en oxygène ou en azote.

Si f est la tension de la vapeur, H la pression atmosphérique, v le volume de l'air à t degrés, on a

$$\text{Poids de vapeur}\ldots\ldots\ldots \quad P = \frac{v(1^{g},293)(0,622)f}{760(1+\alpha t)},$$

$$\text{Poids d'air sec}\ldots\ldots\ldots\ldots \quad P' = \frac{v(1^{g},293)(H-f)}{760(1+\alpha t)};$$

$$\frac{P}{P'} = 0,622\,\frac{f}{H-f}.$$

$\frac{p}{P}$ est donc le rapport du poids de la vapeur à celui de l'air sec. Il est indépendant de la pression et de la température; il ne varie qu'avec la proportion de vapeur elle-même, et il la mesure; il exprime la richesse hygrométrique en poids, et $\frac{f}{H-f}$ la mesure en volume.

L'étude suivie des hygromètres montre que :

1° La richesse hygrométrique croît depuis le matin jusque vers midi ou 3h, pour diminuer ensuite quand le soleil s'abaisse et pendant la nuit;

2° Que la richesse augmente de janvier à juillet-août, pour décroître ensuite, et qu'elle est trois à quatre fois plus grande en été qu'en hiver.

CHAPITRE VII.

DENSITÉ DES VAPEURS.

290. — DÉFINITION.

La densité d'une vapeur est le rapport du poids d'un certain volume de cette vapeur au poids d'un égal volume d'air, ces volumes étant mesurés à la même température et sous la même pression.

La mesure de ce rapport peut être exécutée d'après diverses méthodes qu'il est facile de classer en considérant la formule qui, d'après cette définition, exprimera le poids d'un certain volume de vapeur à la température t° et sous la pression H. Cette formule est (V étant exprimé en litres) :

$$P = Vda = V\,d.1^{g},293\frac{1}{1+\alpha t}\frac{H}{760},$$

d'où l'on déduit

$$d = \frac{P(1+\alpha t)760}{VH.1^{g},293}.$$

Dans une première série de méthodes, dont celle de Gay-Lussac est le type, la donnée initiale du problème est le poids P de vapeur sur lequel on opère, et les appareils sont disposés de façon à permettre la détermination de V, t et H ; dans une deuxième série, au contraire, le volume de la vapeur est une constante définie par le choix d'un ballon de volume déterminé, et l'on mesurera P, H et t ; c'est le principe des méthodes analogues à celle de Dumas.

291. - MÉTHODE DE GAY-LUSSAC.

Appareil de Gay-Lussac. — L'appareil consiste en une cloche de verre longue et étroite, graduée à partir du fond en parties d'égales

apacités (*fig.* 261); on la remplit de mercure et on la renverse sur n bain de mercure contenu dans une marmite de fonte. On y fait nsuite pénétrer une petite ampoule de verre fermée pleine du liquide ır lequel on veut opérer; deux esées faites l'une avant l'autre après remplissage de l'ampoule perıettent de connaître par différence poids P du liquide qui y est enrmé.

On fait enfin descendre autour de cloche un large manchon de verre ui plonge jusqu'au fond de la marıite, où il est fixé par un mouveıent de baïonnette; ce manchon est mpli d'eau dans laquelle on plonge n thermomètre, et l'on chauffe le out sur un fourneau. Lorsque la empérature est assez élevée, l'amoule crève et le liquide qu'elle ontient se transforme en vapeur et hasse une partie du mercure. On lève la température au point où l'on eut opérer, on agite l'eau du manhon pour rendre cette température uniforme, et l'on procède alors aux mesures.

Fig. 261.



On note le nombre de divisions V occupées par la vapeur et la température t indiquée par le thermomètre; les divisions ayant été tracées à zéro, le produit $V(1+kt)$ exprime le volume de la vapeur (k étant le coefficient de dilatation du verre).

Avec une règle métallique, Gay-Lussac mesurait la différence des niveaux du mercure dans la cloche et dans la marmite; cette hauteur, retranchée de la hauteur de la colonne barométrique au moment de l'expérience et après que toutes deux avaient été réduites à 0°, exprimait la tension $H-h$ de la vapeur; la densité pouvait alors se déduire du calcul de la formule

$$d=\frac{P(1+\alpha t)\,760}{V(1+kt)\,1{,}293(H-h)},$$

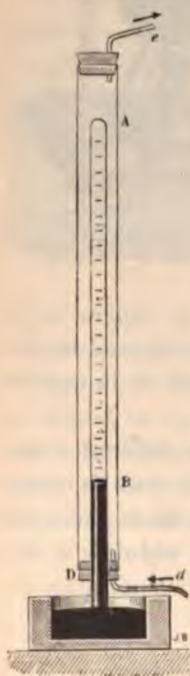
dont tous les éléments avaient été déterminés.

Il est bien évident que, pour que l'expérience soit exacte, il est indispensable que tout le liquide ait été tranformé en vapeur; on s'en assurera facilement, puisque, dans ce cas, la tension mesurée de la vapeur devra être inférieure à sa tension maxima à la température t, tension qui est en général donnée par des Tables. Dans le cas où cette condition ne serait pas remplie, il faudrait recommencer en employant une ampoule plus petite.

Cet appareil présente des inconvénients graves : la température est loin d'être uniforme dans le manchon chauffé par le bas, puisqu'on doit cesser d'agiter au moment de la lecture; la lecture du volume, faite à travers un manchon de verre et une couche d'eau, est incertaine; la détermination de h corrigé l'est davantage encore, puisqu'aux erreurs de réfraction s'ajoutent en ce cas celles dues à l'incertitude de la température, qui sont loin d'être négligeables.

Mais ce qui rend cet appareil d'un usage encore plus restreint, c'est que, d'une part, il ne permet pas d'opérer à des températures supérieures à 100°; l'emploi de l'huile dans le manchon à la place de l'eau rendrait en effet les lectures encore plus inexactes, à cause de l'opacité que présente ce liquide aussitôt qu'on le chauffe, et que, d'autre part, il ne permet pas d'opérer à des pressions assez éloignées de la pression atmosphérique. Or ces deux conditions de pouvoir opérer à des températures élevées et sous de faibles pressions sont, comme nous le verrons, celles que doit présenter un appareil destiné à la mesure des densités des vapeurs.

Fig. 262.



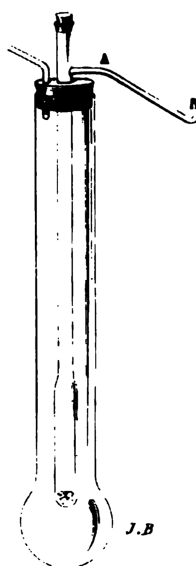
Appareil de Hoffmann. — La méthode de Gay-Lussac est cependant capable de donner de bons résultats, et très rapidement, grâce au dispositif de Hoffmann (*fig.* 262). La cloche est remplacée par un tube étroit de 2^{cm} de diamètre et de 1^m de hauteur, un véritable baromètre portant deux graduations, l'une en centimètres cubes, partant du haut, l'autre en millimètres et dont le zéro est en bas. Le manchon est fermé par deux bouchons dont l'un D sert à le supporter sur le tube AB; on peut y faire passer, par deux tubulures d et e, un courant de vapeur provenant d'un liquide en ébullition, choisi de telle façon que sa température

d'ébullition convienne pour la détermination qu'on se propose ; cette température présentera l'avantage de rester bien constante et d'être connue à l'avance. La matière soumise à l'expérience est enfermée dans un petit flacon de verre bouché à l'émeri et que la diminution de pression suffit à ouvrir.

Les opérations sont les mêmes que celles que nous avons décrites à propos de l'appareil de Gay-Lussac. Il faut cependant avoir soin d'incliner fortement le tube pour y faire monter lentement le petit flacon ; sans cette précaution, il se déboucherait trop tôt, et le mercure projeté contre le haut du tube pourrait en déterminer la rupture. Les lectures de volume et de pression ne doivent être faites qu'au moment où l'on s'est assuré, à l'aide d'une lunette à réticule, que le niveau du mercure est fixe, ce qui prouve que l'appareil a pris la température de la vapeur.

Cette méthode permet d'opérer à des températures très variées ; elle est particulièrement commode pour déterminer la densité des vapeurs facilement décomposables : en effet, grâce à la grande hauteur du tube, on peut opérer sous des pressions très faibles ; la température d'ébullition du liquide d'expérience est alors suffisamment abaissée pour qu'on n'ait pas à craindre sa décomposition.

Fig. 263.



292. — MÉTHODE DE V. ET C. MEYER.

Le principe de cette méthode est de mesurer non plus directement, comme dans la méthode de Gay-Lussac, le volume de vapeur donné dans des conditions connues de température et de pression par un poids connu de la substance en expérience, mais bien le volume d'air déplacé par cette vapeur.

Pour cela, on jette dans le fond d'un long tube cylindrique en verre, en porcelaine ou même en platine (*fig.* 263), maintenu à une température bien constante pendant tout le temps de l'expérience, un poids donné de la substance sur laquelle on opère, et l'on ferme rapidement ; la vapeur formée chasse par une tubulure latérale AB un volume égal d'air, à la même température et sous la même pression, que l'on recueille pour le mesurer ; divisant le poids de la substance employée par celui de l'air recueilli, on a la densité cherchée.

Cette méthode est extrêmement rapide.

293. — MÉTHODE DE DUMAS.

1° **Appareil de Dumas.** — On prend un ballon à long col, de 350^{cm^3} à 500^{cm^3}; on le porte au rouge, on le lave à l'acide azotique, puis à l'eau, et on le dessèche en y faisant passer un courant d'air sec pendant qu'on le chauffe sur la flamme d'un brûleur; enfin on étire le col et il prend la forme représentée dans la figure 264.

Fig. 264.



On le porte sur la balance; les poids p qui lui sont équivalents, d'après la méthode des doubles pesées, expriment le poids du ballon B plus le poids de l'air qu'il contient A diminué de la poussée ϖ :

$$(1) \qquad p = B + A - \varpi.$$

Il faut avoir soin de noter la température t, la pression H et l'état hygrométrique e.

On fait passer dans le ballon quelques grammes de la substance que l'on se propose d'étudier et on le place dans son support à anneau que la figure permet de comprendre; le tout est fixé avec un thermomètre dans une marmite en fonte chauffée sur un fourneau et dans laquelle on place de l'eau, une solution saline plus où moins concentrée, de l'huile ou un alliage fusible, suivant la température à laquelle on devra opérer.

On chauffe à une température nettement supérieure à la température d'ébullition de la substance soumise à l'expérience; l'ébullition a lieu, la vapeur chasse l'air et bientôt le ballon ne renferme plus que de la vapeur, la totalité du liquide ayant été transformée; on ferme alors au chalumeau la pointe effilée du ballon et l'on note la température T du bain, la température de l'air et la pression au baromètre; il est utile de chauffer légèrement au chalumeau le col du ballon avant la fermeture pour en chasser les traces du corps qui auraient pu s'y condenser.

Lorsque l'appareil est refroidi, on l'essuie et on le pèse de nouveau. Son poids p' représente le poids de l'enveloppe B plus le poids de la vapeur qu'il contient, diminué de la poussée ϖ' :

$$(2) \qquad p' = B + \text{vapeur} - \varpi'.$$

En admettant que les conditions atmosphériques n'aient pas changé

sensiblement entre ces deux pesées, qui se font dans un temps assez court, ϖ est identique à ϖ', et, en retranchant les égalités (1) et (2), il vient

$$(2') \qquad \text{vapeur} - A = p' - p.$$

Il ne reste plus qu'à déterminer le volume du ballon. On ouvre pour cela sa pointe sous de l'eau bouillie et froide, et, si l'expérience a été bien faite, il ne doit théoriquement pas y rester d'air; il se remplira donc complètement. Supposons d'abord qu'il en soit ainsi. On pèse de nouveau le ballon plein d'eau à t'; on aura

$$(3) \qquad P = B + \text{eau} - \varpi.$$

En retranchant (2) de (3), on a

$$(3') \qquad \text{eau} - A = P - p.$$

Si donc V est le volume du ballon à t°, D_1 et a_1 les poids spécifiques de l'eau et de l'air dans les conditions bien déterminées de l'expérience, on voit que la dernière égalité, qui peut s'écrire

$$V(D_1 - a_1) = P - p,$$

permettra le calcul de V.

L'expression (2') peut alors s'écrire évidemment

$$\text{vapeur} = p' - p + A = V[1 + k(T - t)]\frac{H}{760}1^{g},293\, d\,\frac{1}{1 + \alpha T};$$

il est presque inutile de rappeler que l'on a, d'autre part,

$$A = V.1^{g},293\,\frac{H - \frac{3}{8}eF}{760}\,\frac{1}{1 + \alpha t}.$$

Le calcul est encore plus long dans la pratique, parce qu'il reste toujours une bulle d'air dans le ballon au moment de son remplissage par l'eau; il faut faire passer cette bulle dans une éprouvette graduée et en mesurer le volume u à t° sous la pression H_1. Représentons son poids dans les expressions précédentes par *air*, l'expression (2') devient

$$\text{vapeur} + \text{air} - A = p' - p.$$

La force élastique H' qu'avait cette bulle d'air dans le ballon pen-

dant l'expérience est donnée par l'expression

$$\frac{u\mathrm{H}_1}{1+\alpha t} = \frac{\mathrm{V}[1+k(\mathrm{T}-t)]\mathrm{H}'}{1+\alpha\mathrm{T}},$$

et par suite on a évidemment

$$\text{vapeur} = p' - p + \mathrm{A} - \text{air} = \mathrm{V}[1+k(\mathrm{T}-t)]\,\frac{\mathrm{H}-\mathrm{H}'}{760}\,1^{g},293\,d\,\frac{1}{1+\alpha\mathrm{T}},$$

et la valeur de *air* peut se calculer par la formule approchée

$$\text{air} = u.1^{g},293\,\frac{\mathrm{H}_1}{760}\,\frac{1}{1+\alpha t}.$$

Cette méthode permet d'opérer à des températures plus élevées que la méthode de Gay-Lussac, mais la pression de la vapeur est toujours égale à la pression atmosphérique ; elle suppose, d'autre part, que les poussées restent identiques à elles-mêmes dans toutes les pesées, ce qui n'est pas rigoureusement exact. Il est préférable, pour diminuer l'erreur qui résulte de ce fait, de tarer le ballon avec un autre ballon à densité ; les principales causes d'erreur qui résultent de l'humidité de l'air et des condensations d'eau à la surface des ballons sont alors notablement atténuées.

Cette méthode est celle que l'on applique à la détermination de la densité des gaz dans les cas où ces gaz attaquent les montures métalliques et dans le cas où l'on ne peut en avoir à sa disposition qu'une faible quantité.

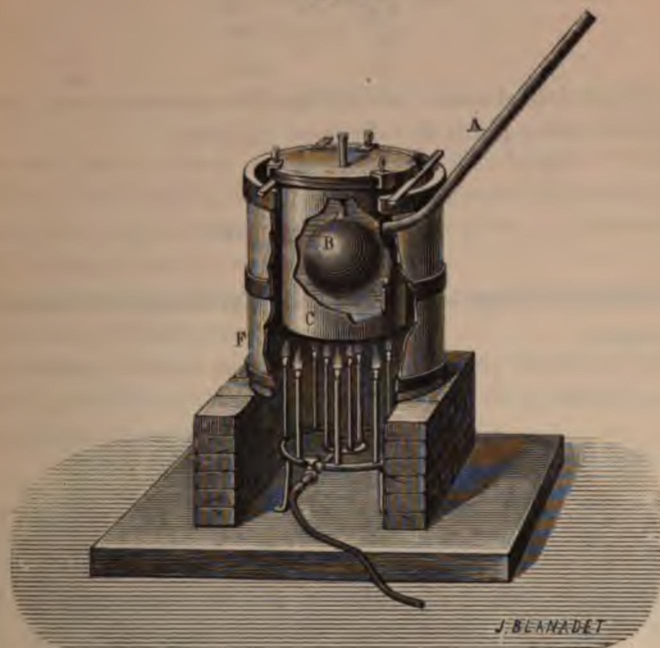
Le ballon à col étiré peut alors être remplacé par un flacon muni d'un bouchon à l'émeri ou d'un robinet, et le remplissage s'effectue à zéro.

2° **Appareil de MM. Deville et Troost.** — Aux environs de 500°, le verre vert commence à se ramollir, et cependant nombre de substances nécessitent des expériences à des températures plus élevées. MM. Deville et Troost ont employé des ballons de porcelaine de Bayeux (*fig.* 265), vernis intérieurement, qui sont impénétrables aux gaz même à ces températures. Le col du ballon est un cylindre d'environ 12^{cm} de long, ayant 4^{mm} de diamètre intérieur ; on peut le fermer à l'aide d'un bouchon légèrement conique de même substance que l'on ne peut fondre qu'au chalumeau à gaz oxhydrique.

Le bain liquide est remplacé par une étuve (*fig.* 265) dans laquelle on fait bouillir du mercure, du soufre, du cadmium ou du zinc dont

les températures d'ébullition sont aujourd'hui parfaitement déterminées. Cette étuve est une bouteille de fer munie à sa partie ouverte d'un rebord sur lequel s'appuie une plaque de tôle qu'on y fixe par du lut et trois pinces; elle présente en son centre un orifice par lequel passe le col d'un ballon; on le ferme avec du lut et de l'amiante.

Fig. 265.



Enfin, sur le côté, se trouve soudé un long tube de fer fortement incliné. Les vapeurs provenant du bain se condensent dans ce tube qu'il faut avoir soin de chauffer assez pour qu'elles ne puissent pas s'y condenser à l'état solide et le boucher; elles coulent et reviennent au bain qui, de cette façon, ne s'épuise pas.

Pour les très hautes températures, on remplacera la bouteille de fer par un creuset argileux.

Les opérations sont les mêmes que celles que nous venons de décrire pour l'appareil de Dumas.

294. — VARIATIONS DE LA DENSITÉ AVEC LA TEMPÉRATURE ET LA PRESSION.

Densité limite. — La densité d'une vapeur résulte du calcul de la relation

$$d = \frac{P}{\frac{VH}{760}\frac{1}{1+\alpha t}1,293}.$$

En opérant dans d'autres conditions de température et de pression, mais avec le même poids de substance, on aura

$$d' = \frac{P}{\frac{V'H'}{760}\frac{1}{1+\alpha t'}1,293}.$$

Il en résulte que le rapport de ces deux expressions de la densité d'une même vapeur

$$\frac{d}{d'} = \frac{V'H'}{VH}\frac{1+\alpha t}{1+\alpha t'}$$

ne sera égal à l'unité que dans la condition où l'on aurait

$$\frac{V'H'}{1+\alpha t'} = \frac{VH}{1+\alpha t},$$

c'est-à-dire si la vapeur en question suivait exactement la loi de Mariotte et la loi de Gay-Lussac. Or ceci n'a évidemment jamais lieu.

Voyons donc ce qui résultera, d'une part, d'une variation de pression, en second lieu d'une variation de température :

1° Si les expériences sont faites à la même température, on voit que

$$\frac{d}{d'} = \frac{V'H'}{VH};$$

les densités ne resteront égales que dans le cas où la vapeur suivrait la loi de Mariotte. Donc, comme cela n'a jamais lieu, on devra trouver à la même température, mais sous des pressions différentes, des densités inégales; on peut même prévoir dans quel sens se produira la variation de la densité. On sait en effet que, pour tous les gaz, si H' est plus grand que H, le produit VH est supérieur au produit V'H' : on en conclut donc que d' sera plus grand que d. Ainsi l'on peut

prévoir que, *si la pression va en diminuant, la densité à température constante ira aussi en diminuant.*

2° Si les expériences sont faites sous la même pression, on voit de même que les densités successives ne pourront rester identiques à elles-mêmes que si l'on a

$$\frac{d}{d'} = \frac{V'(1+\alpha t)}{V(1+\alpha t')} = 1,$$

c'est-à-dire si

$$\frac{V'}{1+\alpha t'} = \frac{V}{1+\alpha t}.$$

La vapeur devrait donc suivre la loi de Gay-Lussac, ce qui n'a jamais lieu. Les densités de vapeur, sous pression constante mais à des températures différentes, seront donc variables : *elles diminuent lorsque la température s'élève.*

Ces considérations théoriques ont été pleinement confirmées par les expériences de Cahours et de Bineau.

Les nombres donnés par Bineau pour l'acide formique suffisent à montrer et l'influence de la pression et celle de la température. Ils sont reproduits dans le Tableau suivant :

15°		20°		25°		30°	
Pression.	Densité.	Pression.	Densité.	Pression.	Densité.	Pression.	Densité.
2,6	2,87	2,7	2,80	2,9	2,71	3,1	2,61
7,6	2,93	8,0	2,85	8,4	2,77	8,8	2,70
15,8	3,06	16,7	2,94	17,5	2,85	18,3	2,76
		24,2	3,15	26,2	2,94	27,8	2,81

Le soufre présente un cas particulier : la variation de sa densité avec la température est tellement considérable qu'elle a conduit à admettre l'existence d'un état allotropique.

Sa densité varie en effet :

De	6,617	à la température de	524°
à	5	»	600
à	2,8	»	700
à	2,23	»	846
à	2,2	»	1040

La densité 6,6 correspond à une molécule formée de 6 atomes ; le soufre correspondrait donc sous cet état à l'ozone ; à température plus élevée, la molécule ne contiendrait plus que 2 atomes.

La densité de vapeur de l'eau prise à la pression atmosphérique à

des températures voisines de 100° s'élève jusqu'à 0,645; elle diminue régulièrement lorsque la température s'élève; mais déjà, à partir de 125°, on trouve le nombre 0,625, dont les deux premières décimales sont celles qu'on emploie dans les calculs. On trouve :

A 130°.........	0,621	A 200°.........	0,6192
160°.........	0,6198	250°.........	0,6182

Les densités en général tendent donc, lorsque la température s'élève ou bien lorsque la pression diminue, vers une valeur plus faible qui devient rapidement constante; on lui donne le nom de *densité limite*. C'est la valeur que prend la densité lorsque la vapeur est assez éloignée de son point de saturation pour qu'elle puisse être considérée comme suivant à peu près les lois de Mariotte et de Gay-Lussac.

Il ne suffira donc pas d'une seule mesure pour déterminer une densité de vapeur; on en devra faire une série à des températures de plus en plus élevées ou à des pressions de plus en plus faibles, dans des conditions où il n'y ait ni dissociation ni décomposition, jusqu'à ce que plusieurs expériences consécutives aient montré, par l'invariabilité des résultats, qu'on a atteint la *densité limite* qui est celle qui doit figurer dans les Tables de densités.

295. — DENSITÉ DES VAPEURS SATURÉES.

La mesure des densités des vapeurs saturées conduit au calcul des volumes spécifiques des vapeurs saturées et offre un grand intérêt à cause de l'usage qu'on en peut faire dans un grand nombre d'équations de la Thermodynamique. MM. Fairbairn et Tait ont déterminé la densité de la vapeur d'eau saturée et la loi de dilatation de la même vapeur surchauffée à un grand nombre de températures.

Ils introduisent un poids connu d'eau dans une capacité vide déterminée et mesurent exactement la température à laquelle la totalité de l'eau est vaporisée, puis ils observent les changements de pression qui résultent d'une élévation ultérieure de température, le volume occupé par la vapeur demeurant sensiblement constant. Ils peuvent ainsi mesurer la densité de la vapeur saturée et la dilatation de cette vapeur.

L'eau se réduit en vapeur dans un ballon A (*fig.* 266) dont le col renversé est ouvert dans du mercure qui remplit le col d'un second ballon B enveloppant complètement le premier. Une couche épaisse

d'eau maintient l'espace B toujours saturé à toute température; un manomètre M indique la tension maxima de cette vapeur, et la moindre différence de pression entre A et B est mise en évidence par une dénivellation du mercure en *d*.

Fig. 266.



Aussi longtemps que la totalité de l'eau du récipient A n'est pas vaporisée, la pression est la même en A et en B, puisque les températures y sont égales; le mercure reste en équilibre à la même hauteur dans le siphon *d*. A l'instant où la vaporisation est complète, le mercure commence à s'élever dans le tube intérieur; la vapeur de B reste saturée, la vapeur de A devient surchauffée, et la différence de niveaux du mercure fait connaître la différence entre les pressions de ces deux vapeurs à la même température.

A l'instant précis où commence la dénivellation, on possède tous les éléments nécessaires au calcul de la densité de la vapeur saturée, c'est-à-dire son poids (poids de l'eau introduite en A), son volume (volume de A à t^o), sa pression mesurée en M ou donnée par les Tables de tension maxima de la vapeur d'eau à t^o, et enfin la température t donnée par des thermomètres plongés dans la vapeur et corrigés de l'influence de la pression.

Les expériences ont montré que la densité de la vapeur saturée, qui augmente avec la température, est constamment supérieure à celle qu'on déduirait de l'application des lois de Mariotte et de Gay-Lussac.

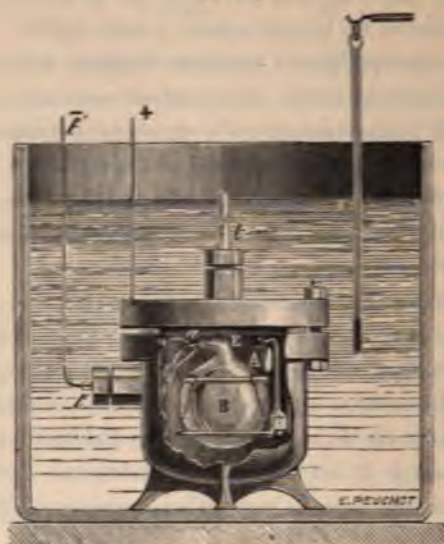
Quant au coefficient de dilatation, il est très grand au voisinage de la température de saturation et diminue avec une grande rapidité aussitôt qu'on s'élève au-dessus de cette température.

Les expériences de M. Perot sur le même sujet sont faites en isolant dans une atmosphère de vapeur saturée, en présence d'une quantité finie de liquide, un certain volume et mesurant la masse de la vapeur qui s'y trouve contenue.

Dans un espace E vide d'air se trouve placé un ballon B, également vide, que l'on peut fermer à un moment donné (*fig.* 267). Imaginons que l'on produise dans cet espace une atmosphère de la vapeur saturée d'un liquide à une température connue; le ballon se remplira de vapeur saturée. Si alors on le ferme, on pourra, par des pesées, déterminer la masse du corps qu'il contient et en déduire le poids du centimètre cube de la vapeur et par suite son volume spécifique.

Le ballon, analogue à un ballon à densité B, est taré et placé dans la chaudière E, fermée, et dans laquelle on fait le vide par le tube t. Une ampoule A renfermant le liquide en excès crève pendant le chauffage et remplit l'espace, y compris le ballon, de vapeur saturée

Fig. 267.



à la température constante que l'on a soin de maintenir. Pour fermer le ballon B, on fait passer en ab, au moyen d'un fil isolé, le courant d'une petite machine qui fond le tube effilé du ballon à densité. L'opération se termine comme les expériences de Dumas sur la vapeur sèche.

M. Perot s'est servi des nombres qu'il a trouvés pour calculer, à l'aide de la formule de Clapeyron, l'équivalent mécanique de la chaleur, ce qui l'a conduit au nombre 424,63.

CHAPITRE VIII.

LIQUÉFACTION DES GAZ.

296. — PREMIÈRES EXPÉRIENCES.

Van Marum est le premier physicien qui ait liquéfié un gaz : l'observation qu'il fit de ce phénomène fut accidentelle : c'est pendant qu'il essayait de vérifier la loi de Mariotte sur le gaz ammoniac qu'il vit brusquement ce gaz changer d'état sous l'effet d'une pression de 6^{atm} et devenir un liquide transparent.

Monge et Clouet condensèrent l'acide sulfureux en le faisant passer dans un tube refroidi par un mélange de glace et de sel marin ; Guyton de Morveau réalisa dans les mêmes conditions la liquéfaction du gaz ammoniac par l'effet du froid seul en employant un mélange de neige et de chlorure de calcium.

D'abord ces résultats restèrent isolés, et aucune conclusion générale n'en fut tirée relativement à la possibilité de faire passer tous les gaz à l'état liquide, avant la célèbre prédiction de Lavoisier que nous avons déjà citée.

Ce ne fut que longtemps après qu'elle reçut un commencement de vérification, lors de la publication, en 1823, du premier Mémoire de Faraday sur la liquéfaction des gaz.

Première méthode de Faraday. — Ce fut sous l'inspiration de Davy que Faraday, étudiant l'action de la chaleur sur l'hydrate de chlore, liquéfia ce gaz par une méthode ingénieuse et des plus fécondes puisqu'elle lui permit, dans la même année, de réussir à liquéfier un nombre considérable de substances dont l'état habituel est l'état gazeux.

L'appareil de Faraday est un tube à parois résistantes, recourbé (*fig.* 268), dans l'une des branches duquel on place l'hydrate de

chlore bien desséché. Le tube étant scellé à la lampe, il chauffa la branche qui contenait l'hydrate et refroidit l'autre; il vit alors distiller un liquide jaune verdâtre et n'eut pas de peine à démontrer que c'était du chlore liquide.

Il vérifia en effet que, si dans un long tube résistant, plein de

Fig. 268.



chlore sec, on exerçait une pression à l'aide de la machine de compression et par l'intermédiaire d'air sec, on obtenait aux dépens du gaz le même liquide jaune. Cette seconde méthode appliquée dans tous les cas lui permettait de connaître la pression à laquelle la liquéfaction s'effectuait à une température donnée.

La théorie de l'expérience de Faraday est des plus simples. Si l'on enferme, dans un tube étroit et résistant, d'une façon générale, des substances capables, par leur réaction chimique ou par l'action de la chaleur, de dégager un gaz, celui-ci devra nécessairement, à mesure qu'il se dégagera, acquérir des pressions de plus en plus élevées, suffisantes le plus souvent pour amener sa liquéfaction; le changement d'état sera d'ailleurs facilité si l'on a soin de refroidir une région du tube, dans laquelle, en raison du principe de Watt, le liquide formé se réunira par distillation.

Faraday appliqua sa méthode à plusieurs gaz et nous résumons ses expériences et les résultats qu'il obtint dans le Tableau suivant :

Gaz liquéfiés.	Substances enfermées dans le tube.	Températures.	Pressions en atmosphères.
SO^2	Hg et SO^4H^2	17,2°	2
H^2S	FeS et HCl	10	17
CO^2	CO^3AzH^4 et SO^4H^2	0	36
Az^2O	AzO^3, AzH^4	7,2	50
CAz	$Hg(CAz)^2$	7,2	3,6 à 3,7
AzH^3	$AgCl + 3AzH^3$	10	6,5
HCl	AzH^4Cl et SO^4H^2	10	40
Cl	$Cl^2 + 8H^2O$	15,5	4

Pendant plusieurs années, après ces remarquables travaux, on chercha non pas à en étendre les résultats à d'autres gaz, mais à étudier le nouveau domaine que l'on venait de conquérir. Dès 1824, Bussy liquéfiant l'acide sulfureux en grande masse étudia d'une façon fort complète les propriétés de ce nouveau liquide, fixa son point l'ébullition à — 10° sous la pression atmosphérique, sa densité 1,45, et montra que par son évaporation rapide dans le vide on pouvait obtenir une température de — 68° et congeler le mercure.

Vers 1835, Thilorier imagina de construire en métal un véritable ube de Faraday à deux branches de grande capacité. C'est l'appareil ès connu destiné à la liquéfaction de l'acide carbonique; il observa solidification de ce liquide par sa détente dans l'air, il constata sa ande dilatation. Natterer et Bianchi construisirent des pompes pirantes et foulantes spécialement destinées à liquéfier les gaz en ande masse et en particulier le protoxyde d'azote.

Deuxième méthode de Faraday. — Dans une deuxième série expériences faites en 1845, Faraday chercha à soumettre les gaz en ême temps à une pression considérable et à une température très sse.

Pour obtenir la pression, il employait deux pompes accouplées : la emière comprimant les gaz desséchés entre 10^{atm} et 20^{atm} les chassait ns la seconde, qui les comprimait à son tour jusqu'à 40^{atm} au bein dans les tubes en verre où se faisait l'observation. Ces tubes ndensateurs étaient en verre vert à bouteille de $4^{mm},5$ à $6^{mm},7$ de amètre extérieur et de $0^{mm},7$ à $0^{mm},9$ d'épaisseur; les uns, placés rizontalement, étaient munis d'une courbure qui leur permettait plonger dans le mélange réfrigérant; les autres, disposés en siphon nversé, pouvaient aussi être refroidis dans la partie courbe. Dans

la partie droite du tube courbé, on introduisait de petits manomètres à air comprimés gradués (*fig.* 269).

Fig. 269.



Pour soumettre ces tubes au plus grand froid possible, il employait le mélange dit *de Thilorier* composé d'acide carbonique solide et d'éther; son évaporation à l'air libre étant, dans certains cas, jugée insuffisante, on la produisait sous le récipient de la machine pneumatique en y maintenant un vide continuel et l'on abaissait la température dans le voisinage de — 110°.

Les résultats obtenus par Faraday sont résumés dans le Tableau suivant; nous y avons inscrit les températures de solidification et la tension de vapeur du solide à cette température, et aussi les tensions de vapeur de quelques liquides à 0° :

Substances.	État.	Températures.	Pressions en atmosphères.
		°	
C^2H^4	Liquide incolore.	»	»
HI........	Solide transparent.	— 50	1
	Liquide incolore.	0	3,97
HBr......	Solide transparent.	»	»
	Liquide incolore.	»	»
SiF^4......	Liquide incolore.	—110	9
PhH^3.....	Liquide incolore.	»	»
BF^3	Liquide incolore.	»	»
HCl	Liquide incolore.	0	26
SO^2.......	Liquide incolore.	0	1,5
	Solide cristallin.	— 76	»
H^2S	Solide cristallin.	— 85	1,8
	Liquide.	0	10
CO^2.......	Solide incolore.	— 57	5,3
	Liquide.	0	38,5
Az^2O	Solide cristallin.	—100	»
	Liquide.	0	32
Cy........	Solide.	— 35	»
AzH^3	Solide cristallin.	— 77	»
	Liquide incolore.	0	4,44
AsH^3	Liquide.	0	8,95

Les gaz suivants ne donnèrent aucun indice de liquéfaction à — 110°, même à des pressions variant de 27^{atm} à 50^{atm} :

L'hydrogène.	Le bioxyde d'azote.
L'oxygène.	L'oxyde de carbone.
L'azote.	Le gaz d'éclairage.

297. — INFLUENCE DE LA PRESSION

Ces expériences confirmaient des essais faits par Aimé, en 1843, dans lesquels il avait tenté de liquéfier les gaz par la pression seule; des tubes contenant les gaz étaient descendus dans la mer, la pression était transmise par du mercure; on soumit ainsi les gaz à des pressions qui furent portées jusqu'à 220^{atm} sans pouvoir constater une contraction brusque, indice d'une liquéfaction.

M. Berthelot était conduit, en 1850, à admettre ces mêmes conclusions par une série d'expériences dans lesquelles il avait cherché à liquéfier les gaz par la pression seule. Dans des tubes à parois très résistantes ayant la forme d'un thermomètre, c'est-à-dire présentant une partie large surmontée d'une tige capillaire, il enfermait du mercure, et dans le tube capillaire le gaz qu'il tentait de liquéfier. En chauffant dans des bains convenables le réservoir à mercure, la dilatation de ce liquide déterminait une compression considérable du gaz réduit à ne plus occuper qu'un espace très petit. L'oxygène, en particulier, fut porté dans cet appareil à près de 800^{atm} sans présenter de traces de liquéfaction.

298. — POINT CRITIQUE. — EXPÉRIENCES DE CAGNIARD DE LA TOUR.

En 1822, Cagniard de la Tour, chauffant en vase clos divers liquides, observa qu'on pouvait les transformer totalement en vapeur dans un volume qui n'était que deux ou trois fois supérieur à celui occupé par le liquide à la température ordinaire.

Un tube de verre étant rempli aux deux cinquièmes d'alcool fut chauffé; la mobilité du liquide devint extrême et, après être parvenu à peu près au double de son volume primitif, le liquide disparut complètement, se convertissant en une vapeur tellement transparente que le tube semblait vide; en le laissant refroidir, il s'y forma un nuage très épais, et le liquide reparut dans son premier état. L'essence de pétrole, l'éther donnèrent des résultats analogues, mais purent se vaporiser dans des espaces encore moindres.

Cagniard de la Tour disposa un appareil lui permettant de mesurer les températures et les pressions auxquelles ce phénomène se produisait. C'est une sorte de baromètre à siphon, formé de deux tubes soudés; l'un à 1^{mm}, l'autre $4^{mm},25$ de diamètre inférieur (*fig.* 270).

Fig. 270.



La courte branche est à moitié pleine du liquide sur lequel on veut opérer; en BCDE, le tube est occupé par du mercure, et, en E, se trouve de l'air qui sert de manomètre à air comprimé. Cet appareil entièrement clos fut chauffé dans un bain d'huile et donna les résultats suivants :

	Température de disparition.	Pression.	Vol. initial du liquide.	Vol. de la vapeur.
	°	atm		
Éther	150	37,5	7	20
Alcool............	»	119	1	3
Sulfure de carbone .	220	78	8	20

Cagniard de la Tour ne tira pas de conséquences de ses expériences; ce ne fut qu'en 1845 que Faraday chercha à en faire usage pour expliquer l'insuccès des expériences dans lesquelles il avait cherché à liquéfier les gaz dits *permanents* :

« M. Cagniard de la Tour, dit-il, a montré qu'à une certaine température et sous une pression suffisante un liquide devenait un gaz transparent sans changer de volume. A cette température ou à une autre un peu supérieure, il n'est pas vraisemblable qu'aucune augmentation de pression, à moins qu'elle ne soit énorme, puisse liquéfier le gaz. Maintenant la température de $-110°$ est probablement pour l'hydrogène au-dessus de ce degré, et peut-être en est-il de même pour l'azote et l'oxygène; et alors il ne faut pas s'attendre à ce qu'aucune pression, excepté celle qu'accompagnerait un froid plus intense encore que tout ce qu'on a pu produire, puisse leur faire quitter leur état gazeux. »

Ainsi Faraday conclut de ses expériences et de la discussion de toutes celles qui ont été faites jusque-là, que ces gaz permanents ne perdront probablement jamais leur état gazeux aux températures ordinaires.

Drion, en 1845, compléta les résultats observés par Cagniard de la Tour; il observa des phénomènes identiques en opérant sur l'anhy-

dride sulfureux, l'éther éthylchlorhydrique, l'éther ordinaire, et fixa à 157°, 184° et 190°,5 les températures auxquelles se produisait la disparition du ménisque ou la conversion totale en vapeur.

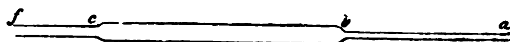
299. — EXPÉRIENCES D'ANDREWS.

Dans ses premières expériences, Andrews soumit, en 1861, les gaz permanents à des pressions énormes et aux basses températures que permet d'obtenir le mélange Thilorier, et réduisit leur volume à moins de $\frac{1}{500}$, sans qu'aucun d'eux montrât l'apparence de liquéfaction. Puis il observa sur l'anhydride carbonique le phénomène de Cagniard de la Tour; l'ayant liquéfié, puis ayant élevé la température à 31°, la surface de démarcation entre le liquide et le gaz s'effaça peu à peu, perdit sa courbure et enfin disparut. L'intérieur du tube se trouva rempli d'un fluide homogène qui, par diminution brusque de pression ou abaissement de température, présenta des stries mouvantes et ondoyantes dans toute la masse; au-dessus de 31°, il ne put arriver à séparer la matière en deux formes distinctes, même avec des pressions de 300^{atm} à 400^{atm}.

Ce fut là le point de départ de ses recherches, qui le conduisirent à la définition de la *température* ou du *point critique*.

L'appareil qui servit à ces recherches est construit de la façon suivante : on fait passer un courant de gaz carbonique sec dans un tube capillaire de *a* en *b* et soigneusement calibré au mercure (*fig.* 271) d'un diamètre de $2^{mm},50$ de *b* en *c*, et de $1^{m},25$ de *c* en *f*.

Fig. 271.



Au bout de 24 heures, on ferme *a* à la lampe et, plongeant *f* dans du mercure, on isole le gaz carbonique en faisant, par des variations convenables de température et de pression, pénétrer du mercure en *fc*, puis jusque dans le tube large. On coupe alors le tube vers *c* et on le mastique solidement dans une monture métallique C (*fig.* 272) qui est reliée à un tube de cuivre très solide par des boulons MN; la jonction est rendue imperméable par des rondelles en cuir interposées. La pièce inférieure F porte une vis d'acier qui traverse une boîte à étoupes ne laissant point de fuite, même à 400^{atm}.

Ce tube est rempli d'eau avant la fermeture, et l'on y obtient la

pression en y faisant pénétrer la vis V; l'eau chasse le mercure qui comprime à son tour le gaz, et cela jusque dans le tube capillaire.

Le tube capillaire est entouré d'une caisse métallique rectangulaire, fermée sur deux faces opposées par des glaces à faces parallèles; un courant d'eau permet d'y maintenir une température quelconque. Le corps de l'appareil est enfermé dans un second vase plein d'eau, à la température de la salle d'expérience.

Fig. 272.



Un deuxième tube pareillement construit contient de l'air au lieu d'anhydride carbonique; les tubes en cuivre sont reliés par une tubulure, de sorte que la pression à laquelle sont soumis les deux gaz est la même. L'appareil à air sert de manomètre, sans qu'il soit tenu compte des irrégularités de la loi de Mariotte.

Andrews notait dans chaque expérience :

1° Le rapport δ entre le volume de l'air après et avant la compression;

2° Le rapport correspondant ε pour l'anhydride carbonique;

3° Les températures t et t' de l'air et de l'anhydride carbonique;

4° Enfin, le nombre l de volumes que 17000 volumes d'anhydride carbonique à 0° et 760mm de pression occuperaient à la température à laquelle l'observation a été faite sous la pression indiquée par le tube à air.

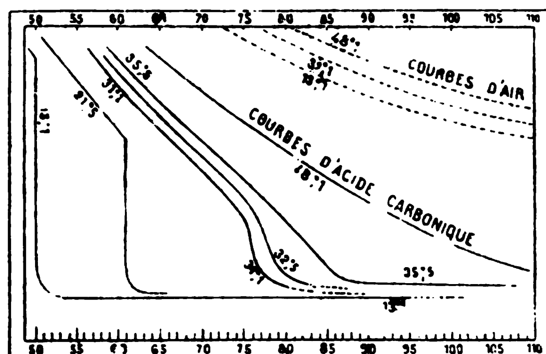
Il construisait alors une courbe où les pressions en atmosphères étaient portées en abscisses et les valeurs l en ordonnées (*fig.* 273).

Les expériences furent faites entre 13° et 48°, et sont représentées par les courbes de la figure.

A 13°, la liquéfaction commence sous la pression de $48^{atm},89$; à cet instant, la pression n'aurait pas dû changer jusqu'à la fin de la liquéfaction : il fallut cependant la porter jusqu'à $50^{atm},4$ pour faire disparaître la totalité du gaz. Cette anomalie apparente tient à la pré-

sence d'une trace d'air (environ $\frac{1}{500}$) mélangée à l'anhydride carbonique; cette petite quantité d'air trouble la liquéfaction d'une manière marquée lorsque la presque totalité de l'anhydride carbonique est liquéfiée et que, par conséquent, le volume de l'air par rapport à

Fig. 273.



celui du gaz non encore condensé est considérable : elle finit par se dissoudre complètement. Si l'anhydride carbonique avait été pur, la partie de la courbe qui représente le passage de l'état gazeux à l'état liquide, pour la température 13°,1, aurait été sans doute, comme dans la figure, une ligne droite parallèle à l'axe des pressions.

La courbe qui représente les résultats obtenus à 21°,5 s'accorde dans sa forme générale avec la précédente; la liquéfaction se produit vers 60^{atm}.

La représentation des expériences de la série suivante qui furent effectuées à 31°,1 diffère d'une manière frappante des courbes précédentes. On peut prendre comme comparaison les lignes pointées de cette figure qui représentent une partie des courbes que l'on obtiendrait avec l'air (supposé pris sous le même volume que l'acide carbonique à 0° et 760^{mm} de pression) aux températures 13°,1, 31°,1, 48°,1.

Le volume de l'anhydride carbonique à 31°,1 diminue régulièrement, mais plus vite que ne l'indiquerait la loi de Mariotte jusqu'à 73^{atm}. Lorsque la pression passe à 75^{atm} le volume se réduit à peu près à la moitié; la descente n'est cependant pas abrupte comme dans le cas de la formation du liquide à des températures inférieures; à aucune période de cette descente il n'y a apparence de liquide dans le tube; au-dessus de 77^{atm} la compressibilité diminue.

La courbe à 32°,5 ressemble beaucoup à la précédente, cependant

la descente est encore moins abrupte ; elle l'est beaucoup moins encore à 35°,5.

A 48°, les phénomènes changent encore d'aspect. La chute que l'on observe aux températures inférieures a presque tout à fait disparu, et la courbe se rapproche par sa forme de celle des gaz parfaits. Cependant la compression est beaucoup plus rapide et vers 110^{atm} l'anhydride carbonique se rapproche rapidement du volume qu'occuperait ce gaz s'il provenait directement de la dilatation du liquide.

L'anhydride carbonique peut prendre l'état liquide sous l'effet de la pression jusqu'à 30°,92 ; c'est là ce qu'Andrews appelle le *point critique*.

Bien qu'à 31°,1, par exemple, on puisse encore observer des chutes assez brusques de volume, il ne se produit néanmoins aucune séparation de l'anhydride carbonique en deux états distincts de la matière; si l'on fait varier la pression ou la température au-dessus de 30°,92 les grands changements de densité près de ce point critique produisent des mouvements ondulatoires analogues (sous une forme exagérée) à ce que l'on voit pendant le mélange de deux liquides de densités différentes, ou quand des colonnes d'air chauffées montent à travers des couches plus froides. Au-dessous de 30°,92 il est facile de distinguer un ménisque séparant le liquide de sa vapeur; au-dessus on ne peut découvrir aucune hétérogénéité dans l'anhydride carbonique.

Ces propriétés se retrouvent avec d'autres gaz : protoxyde d'azote, gaz chlorhydrique, ammoniac, éther, sulfure de carbone; mais les températures critiques et les pressions correspondantes varient avec la nature de la substance.

Andrews proposa alors de modifier la distinction établie entre les gaz et les vapeurs : les premiers proviennent de liquides dont le point d'ébullition, sous la pression atmosphérique, est inférieur à la température ordinaire de l'atmosphère; les secondes, de liquides qui bouillent à une température supérieure; le point critique fournit un moyen plus scientifique de distinguer une vapeur d'un gaz. Toute substance serait une vapeur au-dessous de son point critique, un gaz au delà; d'après cette définition, une vapeur peut se changer en liquide sous l'effet de la pression seule; il n'en serait pas de même d'un gaz. L'anhydride carbonique, vapeur jusqu'à 31°, ne deviendrait réellement un gaz qu'au-dessus de cette température.

Cette définition n'a pour nous qu'un avantage, celui de préciser sous une forme des plus simples les conditions dans lesquelles il a

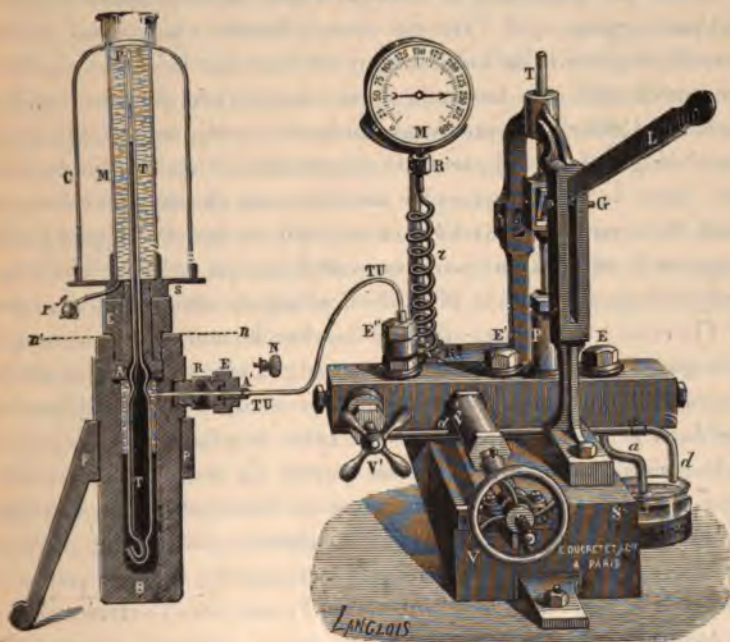
fallu se placer pour liquéfier les gaz permanents. Ces conditions ont été réalisées vers la fin de 1877 par M. Cailletet qui obtint les gaz permanents sous forme de brouillard, puis par d'autres physiciens, en particulier par Wroblewski et Olzewski qui, en suivant la même voie, condensèrent ces gaz à l'état de liquides statiques.

300. — EXPÉRIENCES DE M. CAILLETET.

L'appareil de M. Cailletet comprend deux parties essentielles, une pompe de compression et le bloc laboratoire (*fig.* 274).

L'appareil de compression est une pompe aspirante et foulante dont

Fig. 274.



e piston plongeur P est mis en mouvement par un levier L et permet 'atteindre une pression de 1000^{atm} que mesure un manomètre M. Un olant V actionne un piston plongeur P′ à l'aide duquel on peut faire arier lentement et dans un sens convenable la pression ; un second olant V′ commande un robinet métallique à pointe à l'aide duquel n peut, en laissant brusquement écouler l'eau par le tube *d*, supprimer immédiatement la pression.

Un tube de jonction TU en acier flexible peut réunir cette pompe au bloc; celui-ci est un cylindre en acier à parois très résistantes B fermé par le bas, et qui porte à sa partie supérieure un écrou E' percé suivant son axe d'une ouverture cylindrique; ce bloc est plein de mercure.

Le réservoir dans lequel doit être liquéfié le gaz est en verre; il est formé de deux tubes soudés bout à bout : l'un est capillaire et à parois très épaisses, l'autre est large et de parois minces; ce dernier est terminé à sa partie inférieure par un tube recourbé; sur ce double tube est mastiquée une monture métallique A. Ces deux tubes étant ouverts à leurs extrémités libres, on les dessèche; on fait passer un globule de mercure dans le plus large des deux, puis on fait traverser ce réservoir par le gaz pur et sec sur lequel on se propose d'opérer : quand on suppose que l'air est complètement chassé, on redresse l'appareil; le globule de mercure, en tombant sur la partie coudée, la ferme; on chauffe à la lampe la partie supérieure du tube capillaire et on la fond pour le fermer sans diminuer sa résistance. On a ainsi enfermé le gaz dans l'appareil de liquéfaction; on le fait alors descendre dans le bloc, l'excès de mercure est chassé par l'ouverture latérale B, et en abaissant l'écrou on obtient une fermeture parfaite de l'appareil en écrasant par l'intermédiaire de cuirs la pièce A sur un rebord ménagé dans le bloc. Si l'on injecte alors de l'eau par le tube TU relié à la pompe, elle fera monter le mercure dans le réservoir à gaz, et, si la pression est assez grande, le mercure arrivant jusqu'en T, le gaz sera réduit à ne plus occuper qu'un volume très faible dans la partie supérieure du tube capillaire. On peut comprendre maintenant pourquoi cette partie du réservoir en verre est à paroi épaisse, puisqu'elle supporte de l'intérieur vers l'extérieur une énorme pression; pourquoi, au contraire, la partie inférieure peut être en verre mince, puisqu'elle supporte sur ses parois des pressions dirigées l'une vers l'intérieur, l'autre vers l'extérieur, et qui sont égales.

Les premiers essais de liquéfaction des gaz réputés permanents furent faits avec cet appareil en novembre 1877 : les gaz résistèrent à l'effet des pressions les plus grandes, même lorsqu'on les eut refroidis à environ 30° au-dessous de zéro. M. Cailletet démontra cependant que ces gaz pouvaient passer à l'état liquide pendant un temps, il est vrai, infiniment court; pour cela, l'oxygène et l'oxyde de carbone furent portés à une pression de 300^{atm} et maintenus à $-30°$, puis brusquement, en tournant le volant V', on détermina une détente

qui, comme nous l'avons vu, produisait un abaissement énorme de la température. Sous l'effet de ce refroidissement, le tube d'observation se remplit d'un brouillard épais, indice certain d'une liquéfaction, sinon d'une solidification momentanée (2 décembre). Dans le courant du même mois, l'azote, l'air et enfin l'hydrogène présentèrent dans des expériences analogues des signes de condensation.

301. — DERNIÈRES EXPÉRIENCES.

Dans les années suivantes, M. Cailletet liquéfie l'éthylène en grandes quantités à l'aide d'une pompe de compression spéciale (*Cf.* **132**, p. 219), puis ouvrant le réservoir qui contient le liquide, projette sur le tube capillaire de l'appareil le jet mélangé de vapeur et de liquide fortement refroidi par la détente. L'oxygène, comprimé à 300^{atm} et ainsi refroidi, est détendu; une ébullition tumultueuse se produit et du liquide ruisselle sur les parois pour disparaître bientôt.

Quelque temps après, à l'aide du même appareil, MM. Hautefeuille et Chappuis liquéfient l'ozone, sous forme d'un liquide bleu, qui se réunit dans la pointe recourbée du tube capillaire.

En plongeant le tube à liquéfaction dans une éprouvette où s'évaporait de l'éthylène liquide sous une pression de 25^{mm} et ne produisant qu'une détente partielle de 300^{atm} à 100^{atm}, von Wroblewski réalisa la liquéfaction complète de l'oxygène.

L'oxygène se liquéfie facilement à la température du formène bouillant sous la pression atmosphérique ou de l'éthylène dont on provoque l'ébullition rapide en y faisant barboter un courant d'hydrogène sec, refroidi à $-70°$ dans un serpentin maintenu à cette température par du chlorure de méthyle bouillant (Cailletet).

Olszewski solidifia l'éthylène dans l'oxygène bouillant, l'azote en l'évaporant sous pression réduite (60^{mm}); le formène, le bioxyde d'azote.

Ces divers procédés n'ont plus aujourd'hui qu'un intérêt historique, considérable, d'ailleurs, car ils donnent un bel exemple de recherches conduites systématiquement, où l'expérience et la théorie se prêtent un mutuel appui.

Actuellement la liquéfaction des gaz permanents est devenue une opération industrielle courante et on liquéfie l'air, l'azote, l'oxygène, non plus par gouttes, mais par mètres cubes.

Ce sont les travaux de Hampson, de Linde, de Dewar, de Claude, qui ont le plus contribué à ces beaux résultats.

Le progrès essentiel que marquent les appareils actuels réside dans l'application du principe fécond de la *régénération,* introduit en même temps, par Hampson et Linde, mais indépendamment l'un de l'autre. Il consiste, en gros, à utiliser le gaz déjà refroidi et détendu, à refroidir les nouvelles masses de gaz comprimé avant leur détente. La température initiale de ce dernier diminue donc de plus en plus, par suite la température qu'il atteint par la détente, qui ne tarde pas à devenir inférieure à la température d'ébullition : la liquéfaction se produit dès lors d'une manière continue.

L'élément essentiel du régénérateur est un serpentin à deux tubes concentriques; le gaz comprimé arrive par le serpentin intérieur et se détend à l'extrémité de ce tube intérieur dans le récipient à liquéfaction; le gaz détendu et refroidi sort par l'espace annulaire compris entre les deux tubes du serpentin et circule en sens contraire du gaz comprimé, ce qui assure l'échange complet de températures.

Appareil de Hampson. — L'appareil de Hampson a été construit principalement en vue de la liquéfaction de l'oxygène. Ce gaz est enfermé dans une bouteille en fer; au sortir de cette bouteille il passe dans le régénérateur refroidi par de l'anhydride carbonique s'évaporant sous pression réduite. Le même appareil peut être associé à un compresseur et le réfrigérant auxiliaire devient inutile comme dans l'appareil de Linde, que nous allons décrire.

Appareil de Linde. — Linde utilise, pour refroidir l'air, l'abaissement de température provoqué par une détente sans travail extérieur. D'après les expériences de Joule, si le gaz se détend dans ces conditions de la pression p_2^{atm} à la pression p_1, l'abaissement de température θ obtenu, lorsque le gaz est primitivement à la température absolue T, est donné par la formule :

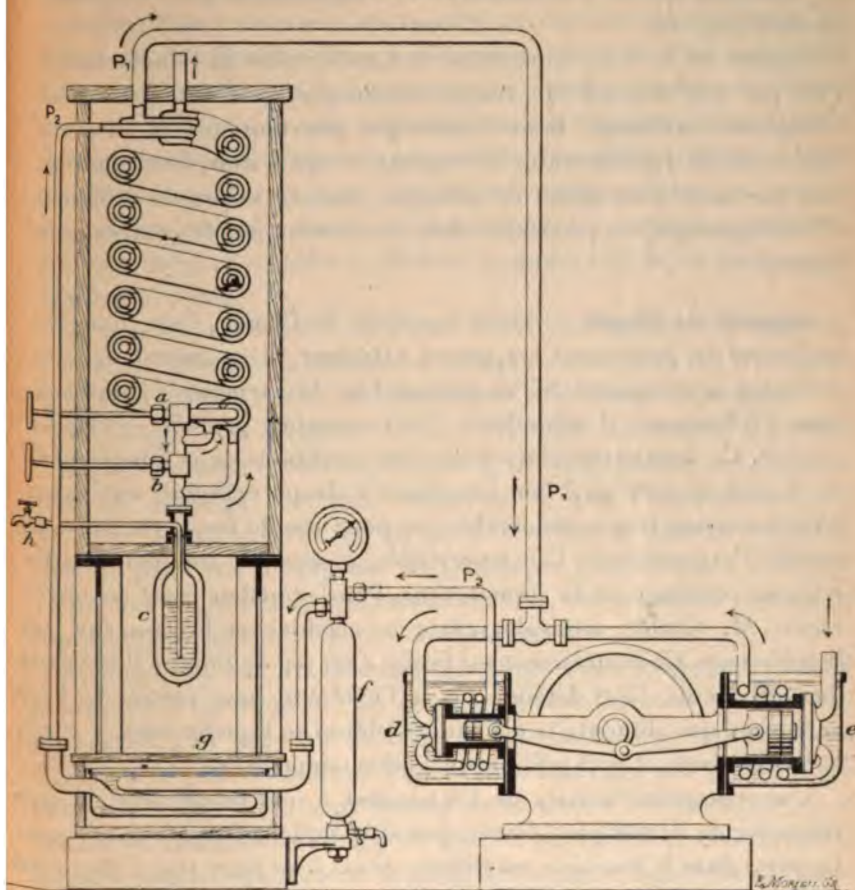
$$\theta = n(p_2 - p_1)\left(\frac{273}{T}\right)^2,$$

n étant un coefficient qui dépend de la nature du gaz et est égal pour l'air à 0,276.

Un compresseur à deux cylindres (*fig.* 275) puise de l'air dans l'atmosphère, le comprime à 16^{atm}, puis dans le second cylindre de 16^{atm} à 200^{atm} environ. Les cylindres sont entourés d'eau froide, pour empêcher l'air de s'échauffer par la compression. L'air comprimé passe ensuite dans un cylindre f où il laisse une grande partie de la vapeur d'eau qu'il renferme, puis dans un réfrigérant g entouré de

glace et de sel où il achève de se dessécher. Il arrive ensuite dans le serpentin intérieur du régénérateur à l'extrémité duquel il se détend par l'ouverture *a*, jusqu'à 16atm, s'écoule par l'espace annulaire du

Fig. 275.



serpentin et revient par le tube P_1P_1 au tube qui fait communiquer les deux cylindres du compresseur.

Le serpentin est enfermé dans un cylindre en bois rempli de matières calorifuges, pour éviter le réchauffement par l'atmosphère ambiante.

La température du gaz détendu s'abaisse progressivement et quand elle a atteint la valeur qui correspond à l'ébullition sous la pression de 16atm, la liquéfaction se produit et le liquide se rassemble dans le

fond du récipient c, d'où on l'extrait par le siphon à robinet h.

En limitant la détente à 16^{atm}, on réduit notablement la dépense de travail nécessaire à la compression, travail qui dépend du rapport $\frac{p_2}{p_1}$ et beaucoup moins l'abaissement de température qui est proportionnel à $p_2 - p_1$.

Comme on le voit, la machine de Linde réalise la liquéfaction de l'air par une dépense de travail mécanique, sans intervention de réfrigérant auxiliaire. Il ne semble pas pourtant que ce dispositif ingénieux ait justifié toutes les espérances qu'il avait fait concevoir, non par suite d'un défaut de principe, mais en raison de difficultés d'ordre pratique, en particulier dans la construction de compresseurs appropriés.

Appareil de Claude. — Dans l'appareil de Claude, l'air comprimé se détend en produisant un travail extérieur, il se détend dans un moteur à air comprimé. Si l'on amenait l'air directement de la machine dans l'échangeur, il refroidirait l'air comprimé jusqu'à -130° ou -135°. Ce dernier est alors voisin des conditions de sa liquéfaction. Sa densité est telle qu'il faut introduire à chaque cylindrée une masse d'air beaucoup trop considérable, 90 pour 100 de trop : en outre, le travail d'expansion de l'air reste faible, à cause de son peu d'élasticité, au voisinage de la liquéfaction. Pour remédier à cet inconvénient, M. Claude intercale, entre la machine et l'échangeur, un liquéfacteur. Ce liquéfacteur est formé d'un jeu de tubes à l'intérieur duquel circule l'air détendu, et à l'extérieur une partie de l'air comprimé qui alimente la machine. Celui-ci se liquéfie vers -140°, et l'air détendu se réchauffe jusqu'à cette température.

L'air comprimé sortira de l'échangeur à une température d'une trentaine de degrés plus élevée que si le liquéfacteur n'existait pas. La perte dans la machine est réduite de 90 à 20 pour 100, l'élasticité de l'air et par suite son travail d'expansion sera plus grand, ainsi que le refroidissement dû à la détente. Aussi il suffira que la compression initiale soit de 40^{atm}.

Extraction de l'oxygène de l'air liquide. — Sous la pression ordinaire, l'oxygène bout à $-180^{\circ},5$, l'azote à -194°. Si donc on fait s'évaporer l'air liquide, ce sera l'azote qui s'évaporera d'abord et la température remontera progressivement au fur et à mesure du dégagement de ce gaz. Les dernières portions évaporées seront de l'oxygène pur. Mais ce procédé de séparation ne fournirait qu'un très

mauvais rendement. En effet, l'azote entraîne avec lui une proportion d'oxygène qui, de 7 pour 100 au début, atteint 30 pour 100 quand le liquide renferme 60 pour 100 d'oxygène.

Parkinson a amélioré énormément le rendement en récupérant le froid produit par l'évaporation de l'air liquide. Dans le récipient contenant l'air à évaporer, est installé un faisceau tubulaire avec un collecteur de liquide. Dans ce faisceau arrive de l'air comprimé à 3^{atm} ou 4^{atm}, refroidi à la température de liquéfaction dans un échangeur, où il circule en sens contraire des gaz vaporisés. Il se liquéfie dans le faisceau tubulaire et en quantité presque équivalente à celle qui s'est évaporée, presque équivalente parce que les gaz sortent toujours un peu plus froids de l'échangeur. La machine à détente a son rôle réduit à combler ce déchet, toujours très faible vis-à-vis de la quantité totale.

Ce procédé nécessite, comme on le voit, la liquéfaction *totale* de l'air, et, au début, le traitement d'un liquide à 21 pour 100 d'oxygène qui s'enrichit peu à peu, mais forcément avec pertes d'oxygène.

M. Claude s'est affranchi de cette nécessité par ce qu'il appelle la *liquéfaction avec retour en arrière*. L'air liquide donne par évaporation un mélange de même composition que l'atmosphère, soit 21 pour 100 d'oxygène et 79 pour 100 d'azote quand le liquide titre 48 pour 100 d'oxygène. M. Claude en conclut que si l'on provoque une liquéfaction progressive de l'air, les premières gouttes de liquide contiendront 48 pour 100 d'oxygène.

Si donc, au bas du faisceau tubulaire, l'air comprimé et froid commence à se liquéfier, les gouttes formées titreront 48 pour 100 d'oxygène, l'air appauvri s'élevant dans le faisceau s'y liquéfie en un liquide plus pauvre. Mais ce liquide retombant par son propre poids revient en arrière, en sens inverse du courant d'air ascendant, et se trouve en contact avec du gaz de plus en plus riche et avec lequel il ne peut être en équilibre : l'oxygène de ce gaz se liquéfiera et l'azote du liquide se vaporisera en partie. En définitive, on aura au bas du faisceau du liquide à 48 pour 100 qui, lui, est en équilibre avec le gaz. Ce liquide sera soumis ensuite à une rectification dans un appareil à plateaux tout à fait analogue à ceux qui servent au même usage dans la fabrication de l'alcool. En combinant cet appareil de rectification avec le procédé de retour en arrière, on peut extraire l'oxygène qui reste dans le gaz au sortir de la rectification (environ 7 pour 100) et obtenir ainsi d'une part l'oxygène, d'autre part l'azote, pratiquement purs (98 à 99 pour 100).

Actuellement (juin 1906) deux de ces appareils sont en fonctionnement et produisent, l'un 700^{m^3}, l'autre 1000^{m^3} d'oxygène en 24 heures. Le rendement est d'environ 1^{m^3} par cheval-heure.

Liquéfaction de l'hydrogène et de l'argon. — En refroidissant l'hydrogène dans l'air liquide et le faisant se détendre, Dewar, puis Travers et Olszewski ont liquéfié l'hydrogène : le liquide évaporé rapidement s'est solidifié.

L'argon a été également liquéfié et solidifié. Mais l'hélium a résisté jusqu'ici à toutes les tentatives, bien qu'on l'ait amené à une température de $-267°$, soit à 6° du zéro absolu.

Expériences aux basses températures. — La possibilité d'obtenir en grandes quantités les gaz liquéfiés a permis de réaliser des températures très basses et d'étudier les propriétés des corps à ces températures extrêmes.

Pour conserver pendant un certain temps les gaz liquéfiés, on les introduit dans des vases de verre à deux parois, entre lesquelles on a fait le vide le plus complet possible. On supprime ainsi les échanges de chaleur par convection. La protection est encore plus efficace quand on argente le verre à l'intérieur, à cause du faible pouvoir émissif de l'argent. La faible évaporation qui se produit suffit à maintenir le liquide à une température inférieure à sa température d'ébullition.

Aux températures voisines du point d'ébullition de l'air liquide, la plupart des liquides sont solidifiés (sauf l'éther de pétrole). On mesure ces températures à l'aide de couples thermo-électriques ou de résistances de platine (Voir *Électricité*).

302. — CONTINUITÉ DES ÉTATS LIQUIDES ET GAZEUX.

Considérons dans le diagramme d'Andrews une isotherme GABL construite pour la température t (*fig.* 276). L'ordonnée de la partie horizontale AB mesure la force élastique maximum f de la vapeur à la température t. Au point A, la vapeur est saturée et la liquéfaction commence : au point B la liquéfaction est complète : les abscisses des points A et B représentent respectivement les volumes spécifiques u' et u de la vapeur saturée et du liquide à la température t et sous la pression f.

Sous la pression f et pour une valeur v du volume représentée par l'abscisse d'un point M, nous avons un mélange de liquide et de vapeur :

soient x et y les fractions de la masse totale qui se trouvent sous ces deux états :

$$v = xu + yu'$$

ou

$$fM = x.fB + y.fA.$$

et d'ailleurs :

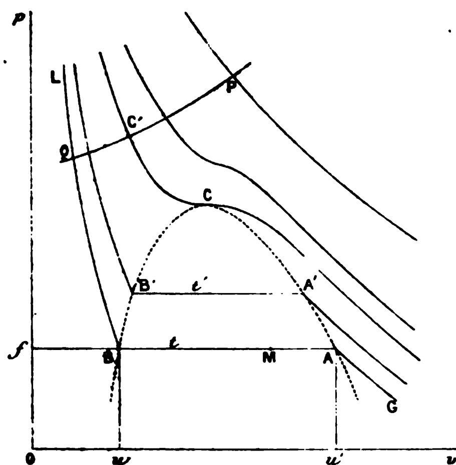
$$x + y = 1,$$

d'où

$$x = \frac{BM}{BA}, \qquad y = \frac{MA}{BA}, \qquad \frac{x}{y} = \frac{BM}{MA}.$$

A mesure que la température s'élève, le volume spécifique u du

Fig. 276.



liquide augmente, celui de la vapeur u' diminue : la longueur de la portion rectiligne diminue et les points A et B se rapprochent de plus en plus, jusqu'à ce que pour une valeur déterminée t_c de la température ces points se confondent en un seul K, où la courbe, devenue continue, présente un point d'inflexion avec une tangente horizontale.

Cette température t_c est la *température critique*, l'isotherme correspondante l'*isotherme critique*. L'ordonnée et l'abscisse du point K sont déterminées et mesurent la *pression critique* et le *volume critique*.

Traçons la courbe qui joint les points B, B', ..., C, ..., A', A. Cette courbe, appelée *courbe de saturation*, partage le plan en deux régions. A une pression et à une température représentées par un point situé

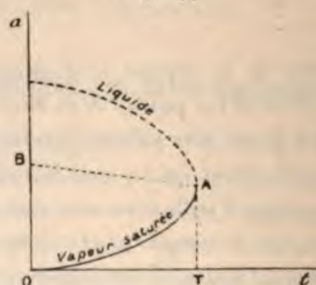
dans la région intérieure, en M par exemple, la substance existera sous les deux états et le volume est indéterminé entre les deux limites u et u'. Mais si la pression et la température ont leurs valeurs critiques, le volume a nécessairement aussi sa valeur critique, puisque la portion rectiligne de l'isotherme se réduit au point d'inflexion K.

En tout point de la région extérieure à la courbe de saturation, le volume sera complètement défini par la pression et la température, et le fluide ne se présentera jamais sous deux états distincts. Si nous faisons subir à ce fluide une série de transformations, représentées par une courbe telle que PC'Q, située tout entière en dehors de la courbe de saturation, le fluide passera totalement d'un état à l'autre en C', là où la courbe PC'Q traverse l'isotherme critique, sans qu'il se soit produit de liquéfaction proprement dite, caractérisée par la coexistence des deux états.

C'est ce qu'on exprime en disant que, dans toute la région extérieure à la courbe de saturation, il existe une continuité de l'état liquide et de l'état gazeux.

Courbe des densités. — D'après la définition que nous venons de donner de l'état critique, cet état de la matière est caractérisé par l'égalité du liquide et de la vapeur saturée. Si nous construisons les courbes dont les abscisses sont proportionnelles aux températures et les ordonnées aux densités de la matière sous ces deux formes, les deux arcs de courbe se raccorderont au point représentant la densité critique (inverse du volume critique) et en ce point admettront une tangente commune parallèle à l'axe des ordonnées (*fig.* 277). L'en-

Fig. 277.



semble de la courbe a l'allure d'une parabole et jouit d'une propriété essentielle :

Le diamètre conjugué des cordes parallèles à l'axe des ordonnées est une droite.

C'est la loi du diamètre rectiligne énoncée par MM. Cailletet et Mathias.

De plus, quand la matière possède un poids moléculaire indépendant de la température et de la pression, le rapport de la densité critique réelle Δ à la densité critique théorique, calculée par les lois de Mariotte et de Gay-Lussac, est 3,77.

Le diamètre rectiligne est toujours très peu incliné vers l'axe des abscisses positives : dans la plupart des cas, son coefficient angulaire est compris entre — 0,0005 et — 0,0023. Dans un même intervalle de températures la variation absolue de la densité du liquide est donc toujours plus grande que celle de la densité de sa vapeur saturée.

Quand la température décroît jusqu'à la température de solidification du liquide, la densité δ' de la vapeur saturée tend vers zéro, la densité δ du liquide augmente et tend vers le triple de la densité critique.

C'est la loi du tiers de la densité énoncée par M. Mathias.

Détermination expérimentale des constantes critiques. — 1° *Méthode des états saturés.* — Elle consiste à déterminer par l'expérience les densités du liquide et de la vapeur saturée, pour une série de températures s'approchant le plus possible de la température critique.

On introduit dans un tube gradué et calibré un poids connu P du fluide ; la température étant maintenue constante, on observe les volumes v et v' du liquide et de la vapeur saturée, ce qui donne une première relation :

$$(1) \qquad v\delta + v'\delta' = P.$$

Puis, en faisant varier le volume total, on fait se vaporiser un volume v_1 de liquide et l'on observe l'augmentation de volume v'_1 de la vapeur saturée ; on obtient la deuxième relation :

$$(2) \qquad \frac{v_1}{v'_1} = \frac{\delta'}{\delta}.$$

Les deux équations (1) et (2) permettent de calculer les densités δ et δ'.

Ce procédé, indiqué par M. Amagat et par M. Mathias, a été appliqué à plusieurs fluides par M. Sidney Young, dans un ensemble d'expériences extrêmement soignées.

Pour déterminer la température critique θ, M. Amagat construit la courbe des densités, après avoir poussé les expériences jusqu'à des

températures ne différant que de $0^\circ,3$ ou $0^\circ,4$ de la température critique.

Il trace le diamètre des cordes verticales et les coordonnées du point d'intersection de ce diamètre avec la courbe sont θ et Δ, la température et la densité critique.

La pression critique s'obtient par extrapolation, soit par la méthode graphique, à l'aide de la courbe des forces élastiques de la vapeur saturée, soit par la méthode algébrique à l'aide des formules empiriques représentant bien la variation de cette force élastique avec la température. M. S. Young emploie la formule à cinq constantes de Biot.

2° *Méthode optique*. — Elle consiste à déterminer la température à laquelle disparaît le ménisque de séparation entre le liquide et sa vapeur. On fait usage dans ce but des tubes de Natterer. Ce sont des tubes de verre cylindriques de faible diamètre, ne renfermant que du liquide et sa vapeur saturée. On a pris toutes les précautions pour éliminer tous les corps étrangers, en particulier l'air qui pourrait se trouver dissous dans le liquide.

Le tube étant scellé, le volume total de la masse fluide reste invariable, abstraction faite de la dilatation de l'enveloppe.

Il est indispensable de pouvoir porter le tube à une température exactement connue et qu'on puisse maintenir constante pendant un temps quelconque. De nombreux modèles d'étuves ont été imaginés : l'un des plus parfaits est celui de M. Gouy (*fig.* 278).

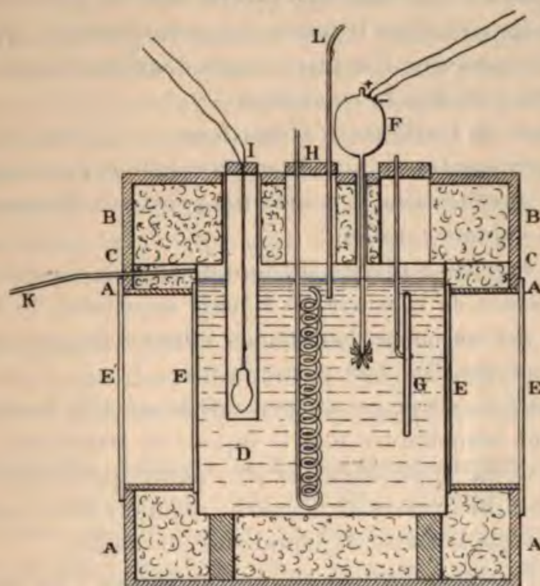
Il est constitué par un vase cylindrique en tôle D contenant environ 100^l d'eau ; il est percé de deux fenêtres hautes et étroites, fermées par des glaces E, larges de 6^{cm} environ. Ce vase est à l'intérieur d'une caisse en bois A, garnie de duvet d'eider ; vis-à-vis les fenêtres de D, la paroi de cette caisse est formée par des glaces de mêmes dimensions que les glaces E. Le couvercle B est lui-même rempli de duvet et une feuille de ouate fait la jonction avec la boîte pour éviter tout courant d'air. L'épaisseur du duvet est de 12^{cm} au moins et la protection calorifique est suffisante pour que le refroidissement ne dépasse pas $0^\circ,002$ par minute, quand la température du vase D est supérieure de 15° à la température ambiante.

Le couvercle B est traversé par plusieurs tubes de laiton, donnant passage à divers appareils ; F est un agitateur hélicoïdal mû par un moteur électrique et dont la vitesse est suffisante pour provoquer une agitation tumultueuse ; I est un tube de laiton fermé par le bas, qui renferme une lampe à incandescence, H est un thermomètre à alcool dont le niveau se déplace de $1^{mm},5$ pour une variation de $0^\circ,001$.

Tous ces appareils sont en dehors de la ligne de visée des fenêtres, sur laquelle se trouve seulement le tube de Natterer G.

La lampe à incandescence fournit la quantité de chaleur nécessaire pour compenser le refroidissement de l'eau. Le courant qui alimente cette lampe peut être interrompu par un relais que commande le thermomètre T fonctionnant comme régulateur. Grâce à des dispo-

Fig. 278.



sitions très ingénieuses, ce régulateur permet d'obtenir une température à $0^{\circ},0001$ près pourvu qu'elle ne varie pas trop vite. Quand on veut faire varier la température d'une manière notable, on introduit de l'eau chaude ou de l'eau froide en L.

La légitimité de la méthode optique a été beaucoup discutée, parce qu'il n'est pas démontré que la température à laquelle le ménisque disparaît soit identique à la température critique.

Des nombreuses recherches qui ont été effectuées sur ce sujet, il résulte que la température de disparition du ménisque dépend de la densité moyenne, c'est-à-dire du quotient de la masse totale du fluide par le volume total. Mais le ménisque disparaît à une température qui est toujours inférieure à la température critique : au moment de la disparition, la densité du liquide est encore supérieure à celle de la vapeur. La différence entre les températures est d'autant moindre

que la densité moyenne est plus voisine de la densité critique. Lorsque celles-ci sont égales, le ménisque disparaît au milieu du tube. On réalisera cette condition par des tâtonnements réguliers; en remplissant différents tubes de dimensions à peu près identiques, avec des densités moyennes différentes.

Pour noter avec précision la disparition du ménisque, M. Gouy observe la réflexion sur cette surface d'un rayon lumineux descendant. Ce rayon est reçu dans une lunette mise au point sur la surface liquide : on aperçoit dans la lunette un point brillant. Quand la surface libre du ménisque fait place à une zone de densité variable, le rayon réfléchi s'affaiblit brusquement.

3° *Méthode de Cailletet et Colardeau.* — Un tube d'acier reçoit des masses croissantes du liquide expérimenté et pour chaque valeur de la masse, on détermine la courbe des pressions obtenues quand on chauffe sous volume constant.

Tant que le tube renferme du liquide et de la vapeur, la pression est indépendante de la masse du liquide introduite. Si l'on reporte les courbes sur un même diagramme, elles se superposent donc en une courbe unique dans leur partie initiale.

Si la densité moyenne est un peu inférieure à la densité critique, à une certaine température tout le liquide se transforme en vapeur, et, à partir de là, la pression est plus petite que celle de la vapeur saturée : la courbe s'écarte de la courbe régulière de la vapeur saturée d'autant plus que la masse du liquide est plus faible.

Toutes ces courbes forment un pinceau partant d'un point unique: les coordonnées de ce point définissent la température et la pression critiques.

4° *Méthode de l'indice de réfraction.* — Cette méthode a été appliquée par M. J. Chappuis à l'anhydride carbonique. L'un des faisceaux d'un appareil interférentiel de Jamin traverse l'anhydride : l'indice reste constant tant que la température est supérieure à la température critique, et les franges sont immobiles. Mais, dès que cette température est atteinte, l'indice augmente rapidement et les franges se déplacent.

Autres propriétés de l'état critique. — Nous avons vu (n° 252) que la chaleur de vaporisation L d'un liquide est donnée par la formule

$$L = \frac{T}{J}(u' - u)\frac{dp}{dt}.$$

A la température critique,

$$u' = u;$$

et $\frac{dp}{dt}$ n'est pas infini ; donc

$$L = 0.$$

Ce résultat de la théorie a été confirmé par les expériences de M. Mathias.

Cette propriété pourrait servir de définition à l'état critique.

Le coefficient de compressibilité $\frac{dp}{dv}$ est nul à la température critique puisque l'isotherme critique a une tangente parallèle à l'axe des v : la compressibilité du fluide est infiniment grande. M. Gouy a montré que, grâce à cette circonstance, la simple action de la pesanteur peut produire, dans un tube d'une dizaine de centimètres de hauteur, porté d'une manière uniforme à la température critique, une différence de densité de 6 pour 100 entre le haut et le bas. Au niveau dans lequel existe la pression critique, une variation de hauteur de $0^{mm},5$ peut entraîner une variation de 1 pour 100 dans la densité.

La tension superficielle du liquide devient nulle à la température critique. Cette hypothèse, formulée par Frankenheim, puis par Mendeléjeff, a été vérifiée expérimentalement sur plusieurs liquides.

État critique des mélanges de fluides : liquéfaction des mélanges gazeux. — D'après Strauss, la température critique θ d'un mélange de deux fluides peut se calculer en fonction des températures critiques θ_1 et θ_2 des composants. Si α_1 et α_2 sont les proportions des deux fluides mélangés,

$$\theta = \frac{\alpha_1\theta_1 + \alpha_2\theta_2}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

Cette règle se vérifie bien pour un assez grand nombre de liquides, mais paraît être tout à fait en défaut quand la proportion de l'un des composants est très petite. La présence d'impuretés en faible quantité modifie la température critique beaucoup plus que ne l'indique cette règle.

Dans la liquéfaction des mélanges gazeux, on observe un phénomène curieux que Kuenen a appelé *condensation rétrograde*. En comprimant à température constante un mélange de 1^{vol} d'air et de 5^{vol} de gaz carbonique, M. Cailletet a constaté d'abord une liquéfaction partielle, puis, en augmentant davantage la pression, il vit le liquide diminuer de volume puis disparaître complètement. Cette condensation rétrograde ne s'observe qu'à des températures com-

prises entre deux limites θ' et θ'' : l'intervalle $\theta'' - \theta'$ peut être appelé l'*intervalle critique* du mélange.

En ajoutant à un gaz facilement liquéfiable un gaz réfractaire, on retarde sa liquéfaction. Un mélange de 1^{vol} d'anhydride carbonique et de 1^{vol} d'air ne présentait pas trace de liquéfaction à 0° sous la pression de 400^{atm}.

Inversement, en ajoutant à un gaz réfractaire un gaz facile à liquéfier, on accélère la liquéfaction.

Constantes critiques.

	θ.	π.	Δ.
Hélium	< −267°	»	»
Hydrogène	−241	19,40	0,043
Argon	−117,4	4,2	»
Azote	−145,0	33,6	0,299
Oxygène	−118,8	50,8	0,400
Chlore	+146,0	93,5	0,547
Brome	+302,2	»	»
Iode	+512,0	»	»
Eau	+365,0	200,5	»
Anhydride sulfureux	+155,4	78,9	0,520
Protoxyde d'azote	+ 38,8	77,5	0,454
Bioxyde d'azote	− 93,5	71,2	0,524
Oxyde de carbone	−139,5	35,5	0,328
Anhydride carbonique	+ 31,35	72,9	0,464
Sulfure de carbone	+273,05	72,87	0,4408
Acide chlorhydrique	− 52,0	83,0	0,462
Acide sulfhydrique	+100,0	90,0	»
Méthane	− 81,8	54,9	0,145
Pentane normal	+197,2	33,0	0,2324
Isopentane	+187,8	32,9	0,2344
Éthylène	+ 9,3	58	0,210
Acétylène	+ 37,0	68,0	»
Benzène	+288,5	47,89	0,3045
Toluène	+320,6	41,6	»
Naphtaline	+468,2	39,2	»
Chloroforme	+260,0	54,9	»
Fluorure de benzène	+286,55	44,61	0,3541
Alcool méthylique	+240,0	78,63	0,2722
Alcool éthylique	+243,1	62,96	0,2755
Phénol	+419	»	»
Éther	+194,4	35,60	0,2622
Formiate de méthyle	+214,0	59,25	0,3489
Formiate d'éthyle	+235,3	46,83	0,3232
Acétate de méthyle	+233,7	46,29	0,3252

	θ.	π.	Δ.
Acétate d'éthyle	+250°,1	38,00	0,3077
Aldéhyde méthylique (formol)	+223,6	»	»
Acétone	+254,4	»	»
Acide acétique	+321,6	57,1	0,3506
Ammoniaque	+131,0	113,0	0,239
Méthylamine	+155,0	72,0	0,252
Éthylamine	+177,0	66,0	0,253
Diméthylamine	+163,0	56,0	0,247
Diéthylamine	+216,0	40,0	0,251
Triméthylamine	+160,5	41,0	0,2395
Triéthylamine	+259,0	30,0	0,251
Aniline	+425,65	52,35	0,322
Cyanogène	+124,0	61,7	»

Températures d'ébullition et de solidification.

	Ébullition.		
	Température.	Pression.	Solidification.
Hydrogène	−252°,5	760mm	−258°
Air	−191,0	id.	»
Azote	−196 / −204	740 / 60	−210,5
Oxygène	−182,8 / −200,4	760 / 20	−227
Argon	−187,0	760	−190
Oxyde de carbone	−190	»	−207
Bioxyde d'azote	−150 env.	»	−160 env.
Éthylène	−102,5	»	−169
Alcool éthylique	+ 78,1	»	−130
Éther	+ 34,9	»	−117,6
Toluène	+110,0	»	− 94,2

303. — THÉORIE CINÉTIQUE DES GAZ.

Notions fondamentales. — La théorie cinétique des gaz dont la première idée appartient à Bernoulli a été développée surtout par Krönig, Clausius, Maxwell et Boltzmann.

L'idée fondamentale de Bernoulli est de considérer le gaz, non comme un milieu en équilibre statique, mais comme un système formé d'un nombre extrêmement grand de molécules très petites, toutes de même masse et de mêmes dimensions, soustraites à l'action de la pesanteur et se mouvant dans toutes les directions. Ces molécules n'exercent d'ailleurs aucune action les unes sur les autres, sauf

quand elles entrent en *collision*. Dans l'intervalle de deux collisions, la trajectoire de ces molécules est rectiligne et leur vitesse dépend de la nature du gaz et de la température.

Il est inutile d'insister sur l'arbitraire de telles hypothèses : la théorie cinétique des gaz est surtout une théorie mathématique. Son but est de chercher à déduire l'ensemble des propriétés qui caractérisent les gaz de quelques propriétés fondamentales établies par l'observation, après avoir défini le système de manière à satisfaire à ces conditions imposées par l'expérience.

En fait, les conclusions de la théorie ne sont pas toutes d'accord avec la réalité, ce qui l'avait fait tomber en défaveur. Elle a repris récemment un regain d'actualité, parce qu'on en a appliqué les définitions fondamentales et les procédés à l'étude d'autres phénomènes d'ordre électrique, et avec un certain succès (*voir* t. II).

Vitesse moyenne des molécules : trajet moyen. — La direction du mouvement des molécules change quand elle entre en collision avec une autre molécule ou avec une paroi solide. Nous supposerons qu'elles se comportent comme des corps parfaitement élastiques; c'est-à-dire que deux molécules qui se heurtent, ont, après la collision, simplement échangé leurs vitesses. Si la molécule heurte une paroi solide, elle prendra une vitesse symétrique de sa vitesse primitive par rapport à la normale à la paroi.

Nous n'avons aucune donnée sur la grandeur et la direction de la vitesse de chaque molécule.

Mais quels que soient ces éléments, il résulte, de l'hypothèse que nous venons de faire, que la *vitesse moyenne* u des molécules restera constante, si la température reste invariable.

La vitesse d'une molécule déterminée change à chaque collision, puisqu'elle l'échange avec celle de la molécule rencontrée. Mais comme le nombre des collisions qui se produisent dans un temps très court est très grand, nous admettrons que la *vitesse moyenne d'une molécule* pendant une seconde par exemple est également constante et égale à u.

On appelle *trajet* d'une molécule la longueur de l'élément rectiligne de sa trajectoire qu'elle parcourt entre deux collisions consécutives : cette longueur va changer à chaque collision : mais comme ces collisions se succèdent très rapidement, le trajet prendra dans un temps très court toutes les valeurs possibles : nous admettrons que le *trajet moyen* l est une constante pour un état déterminé du gaz.

Soit θ l'intervalle de temps *moyen* qui sépare deux collisions

$$\theta = \frac{l}{u}.$$

Le nombre des collisions qui se produira en une seconde sera

$$\frac{1}{\theta} = \frac{u}{l}.$$

Si le volume considéré renferme N molécules, on pourra calculer l'effet des collisions, comme s'il y avait

$$\frac{N}{\theta} = N\frac{u}{l}$$

molécules ne subissant qu'une collision par seconde.

Calcul de la pression : loi de Mariotte. — La pression sur une paroi solide résulte du choc des molécules contre cette paroi : elle est égale à la somme des quantités de mouvement que communiquent à la paroi les molécules pendant l'unité de temps.

Décomposons la vitesse de chaque molécule suivant trois axes rectangulaires : la moyenne des composantes sera la composante de la vitesse moyenne. Comme aucune direction n'est privilégiée, les trois composantes α, β, γ de la vitesse moyenne seront égales : d'où

$$u^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 3\alpha^2,$$

$$\alpha = \frac{u}{\sqrt{3}}.$$

Prenons l'un des axes normal à la paroi ; la composante parallèle à cet axe sera la seule dont il faudra tenir compte dans le calcul de la pression. Tout se passera comme si toutes les molécules venaient choquer la paroi avec une vitesse moyenne α.

Les molécules qui en une seconde pourront venir heurter la paroi sont contenues, au début de cet intervalle, dans un prisme ayant pour base la paroi et pour hauteur $\alpha = \frac{u}{\sqrt{3}}$. Si n est le nombre de molécules contenues dans l'unité de volume, ce prisme renfermera

$$n\frac{Su}{\sqrt{3}}$$

molécules : la quantité de mouvement que communiqueront ces molé-

cules à la paroi sera

$$nm\mathrm{S}\frac{u}{\sqrt{3}}\frac{u}{\sqrt{3}} = nm\mathrm{S}\frac{u^2}{3},$$

soit par unité de surface

$$\frac{nmu^2}{3},$$

si m est la masse d'une molécule : d'où

$$p = \frac{nmu^2}{3}.$$

Soit N le nombre de molécules contenues dans un volume v

$$pv = nv\frac{mu^2}{3} = \mathrm{N}m\frac{u^2}{3}.$$

A température constante, $u^2 =$ const. : donc

$$pv = \text{const.},$$

c'est la loi de Mariotte.

Vitesse moyenne des molécules des différents gaz. — Remarquons que nm est la densité absolue ρ du gaz sous la pression p. Donc

$$p = \rho\frac{u^2}{3},$$

$$u = \sqrt{\frac{3p}{\rho}}.$$

Effectuons le calcul pour l'air à 0° et sous la pression de 76^{cm} de mercure :

$$\rho = 0,001293,$$

$$p = 76 \times 13,6 \times 981,$$

$$u = \sqrt{\frac{3 \times 76 \times 13,6 \times 981}{0,001293}} = 4,85.10^4\,\frac{\text{cm}}{\text{sec}}.$$

Pour les autres gaz, on aura d'une manière générale, en appelant δ leur densité par rapport à l'air,

$$u = \sqrt{\frac{3p}{\rho\delta}} = 4,85.10^4\,\frac{\text{cm}}{\text{sec}}\sqrt{\frac{1}{\delta}}.$$

Quand la température s'élève la vitesse des molécules croît : nous admettrons qu'elle croît proportionnellement à la racine carrée de la température absolue (en d'autres termes que la température absolue

est proportionnelle à l'énergie cinétique moyenne des molécules : cf. (*Théorie mécanique de la chaleur*). Il viendra

$$pv = \frac{Nm}{3}\left(u\sqrt{\frac{T}{T_0}}\right)^2.$$

Voici les valeurs de la vitesse moyenne pour quelques gaz :

Gaz.	Densité.	Température. 0°.	100°.	200°.
Air..............	1,000	$4,85.10^4 \frac{cm}{sec}$	5,66	6,40
Hydrogène........	0,0692	18,43	21,53	24,24
Oxygène..........	1,1056	4,61	5,39	6,04
Gaz carbonique....	1,529	3,92	4,58	5,15

Chaleurs spécifiques d'un gaz. — La chaleur spécifique d'un gaz sous volume constant c sera l'équivalent de l'accroissement de l'énergie cinétique des molécules qui correspond à une élévation de température de 1°, par unité de masse.

La chaleur spécifique sous pression constante C sera égale à la précédente augmentée de la quantité de chaleur équivalente au travail extérieur.

Or, d'après ce qui précède, la force vive totale a pour valeur

$$\lambda = \frac{3}{2}pv = \frac{3}{2}RT = \frac{3}{2}J(C-c)T.$$

Si nous admettons que

$$C = \frac{d\lambda}{dt} = Jc,$$

il faut que

$$Jc = \frac{3}{2}J(C-c)$$

ou

$$\frac{C}{c} = \frac{5}{3} = 1,66.$$

Or, en général, ce rapport $\frac{C}{c}$ a une valeur voisine de 1,41 (air, azote, oxygène, hydrogène).

On n'a trouvé cette valeur 1,66 que pour la vapeur de mercure et la vapeur de zinc. Or, d'après les propriétés chimiques et la densité de ces vapeurs, elles sont définies monoatomiques. L'oxygène, l'azote, l'hydrogène sont diatomiques.

Pour les gaz polyatomiques, $\frac{C}{c}$ est encore plus petit et d'autant plus petit que la molécule est plus complexe.

Nous avons trouvé en Thermodynamique, que dans le cas d'un gaz parfait

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = Jc.$$

Lorsque $\frac{C}{c}$ est plus petit que 1,66, c'est que

$$\frac{d\lambda}{dt} < \frac{d\varepsilon}{dt}.$$

Nous en déduisons

$$\lambda < \varepsilon,$$

car au zéro absolu λ, ε sont nuls.

Par suite, l'énergie cinétique de *translation* des molécules ne représente pas toute l'énergie interne du gaz. Mais

$$\lambda = \frac{3}{2} J(C - c)T = \frac{3}{2} Jc(k - 1)T,$$

ou, en tenant compte de ce que

$$\mathcal{E} = JcT,$$

$$\lambda = \frac{3}{2}(k - 1)\mathcal{E}.$$

Quelle sera la signification de la différence

$$\mathcal{E} - \lambda = \mathcal{E}\left[1 - \frac{3}{2}(k - 1)\right] = \frac{3}{2}\left(\frac{5}{3} - k\right)\mathcal{E}\,?$$

Puisque cette différence s'annule lorsque la molécule est monoatomique et croît avec le nombre d'atomes contenus dans la molécule, nous considérerons cette expression comme représentant la somme des énergies *intra-moléculaires,* c'est-à-dire des énergies dues aux mouvements des atomes à l'intérieur de la molécule. Ces mouvements ne peuvent être que des mouvements de rotation ou de vibration. La molécule se conçoit alors sous la forme, non d'un système rigide, mais plutôt d'une sorte de constellation d'atomes qui se meuvent à l'intérieur d'un volume limité, qui représente le volume de la molécule.

Remarquons que le rapport de l'énergie de translation à l'énergie intramoléculaire serait, d'après les formules ci-dessus, indépendant de la température. En réalité, nous ne pouvons affirmer que k ne

dépende pas de la température, quoique dans le cas particulier de l'air les expériences semblent le vérifier.

Équations caractéristiques des fluides. — La théorie cinétique, réduite à la forme simple que nous venons d'exposer, nous a fait retrouver les lois des gaz parfaits. Mais les gaz réels ne suivent pas exactement ces lois. Aussi de nombreux physiciens ou mathématiciens se sont efforcés de compléter la théorie pour la mettre en meilleur accord avec la réalité.

Parmi les tentatives faites dans cette direction, celle de Van der Waals est l'une des plus intéressantes, notamment parce qu'elle a conduit à une notion nouvelle, celle des *états correspondants*.

Nous ne suivrons pas ici la théorie de Van der Waals dans tout son développement; nous nous bornerons à en signaler deux points principaux.

Nous avons admis, dans la théorie élémentaire, que les molécules gazeuses se réduisaient à des points matériels, n'exerçant l'un sur l'autre aucune attraction. Or, les molécules possèdent nécessairement un certain volume; en d'autres termes, chacune représente une région de l'espace dans laquelle d'autres molécules ne peuvent pénétrer. L'espace libre dans lequel les molécules gazeuses peuvent se mouvoir est donc plus petit que le volume total occupé par le gaz : il en résulte que les collisions avec les parois seront plus fréquentes que nous ne l'avons calculé et que la pression p sera plus grande que $\frac{RT}{v}$. D'après Van der Waals, il faut poser

$$p = \frac{RT}{v-b},$$

où b représente quatre fois le volume réel des molécules; on a appelé b le *covolume*. D'autre part, si les molécules gazeuses s'attirent mutuellement, la résultante de ces attractions sur une molécule qui vient heurter la paroi tend à diminuer la vitesse de cette molécule, par suite la quantité de mouvement qu'elle communique à la paroi, c'est-à-dire la pression. Or, cette attraction résultante doit être proportionnelle au nombre des molécules attirantes, c'est-à-dire à la densité du gaz; d'autre part, la diminution de pression doit être proportionnelle au nombre des collisions avec la paroi pendant l'unité de temps, donc proportionnelle aussi à la densité du gaz.

Cette diminution sera donc, en définitive, proportionnelle au carré de la densité ou au carré de l'inverse du volume.

L'équation caractéristique sera donc de la forme

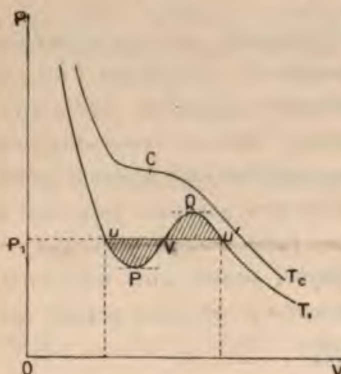
$$(1) \qquad \left(p - \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = \mathrm{RT}.$$

Le terme $\frac{a}{v^2}$ représente ce qu'on appelle la *pression interne;* sa signification est analogue à celle de la tension superficielle des liquides; c'est du reste le point de départ des calculs de Van der Waals.

Discussion de l'équation de Van der Waals. — Nous avons vu que l'équation de Van der Waals représentait d'une manière très satisfaisante la loi de compressibilité des gaz à température constante.

Van der Waals admet qu'elle doit représenter aussi la compressibilité du liquide. Mais il reste à l'interpréter dans le cas où le fluide est partie à l'état liquide, partie à l'état gazeux.

Fig. 279.



L'équation (1), dans laquelle nous faisons $T = \text{const.}$, est celle d'une courbe qui coïncide sensiblement avec l'isotherme d'Andrews, dans les régions relatives à l'état gazeux, à l'état liquide d'autre part. Mais, au-dessous de la température critique, les isothermes d'Andrews sont discontinues: la courbe de Van der Waals ne peut être que continue, puisqu'elle figure une équation algébrique. Son allure générale est représentée par la figure 279. En effet, si nous coupons la courbe par une droite parallèle à l'axe des abscisses v,

$$p = p_1,$$

les abscisses des points d'intersection seront les racines de l'équation du troisième degré

$$v^3 - \left(\frac{\mathrm{RT}_1}{p_1} + b\right)v^2 + \frac{a}{p}v - \frac{ab}{p} = 0.$$

Cette équation peut avoir une ou trois racines réelles. En discutant les conditions de réalité, on trouve que les trois racines ne peuvent être réelles que si T est inférieur à une certaine limite T_c.

Si $T = T_c$, les trois racines ne peuvent être réelles que pour une valeur déterminée p_c de p et sont alors égales. Ces valeurs T_c et p_c

sont la température et la pression critiques; la valeur commune des trois racines est le volume critique.

Ces racines satisfont alors aux conditions

$$v_1 + v_2 + v_3 = 3v_c = \frac{RT_c}{p_c} + b,$$

$$v_1v_2 + v_2v_3 + v_3v_1 = 3v_c^2 = \frac{a}{p_c},$$

$$v_1v_2v_3 = v_c^3 = \frac{ab}{p_c},$$

d'où

$$(2) \quad \begin{cases} v_c = 3b, \\ p_c = \frac{1}{27}\frac{a}{b^2}, \\ T_c = \frac{8}{27}\frac{a}{bR}. \end{cases}$$

Supposons que p_1 soit la force élastique maximum de la vapeur à la température T_1 : la droite $p = p_1$ coupera l'isotherme T_1 en deux points u, u', et la portion uu' fera partie de l'isotherme expérimentale; les abscisses des points u et u' seront la plus petite et la plus grande racine de l'équation de Van der Waals : elles représentent les volumes spécifiques du liquide et de la vapeur. Mais nous n'apercevons pas la signification de la troisième racine, abscisse du point v.

Bien avant les travaux de Van der Waals, James Thomson avait montré que s'il était possible de réaliser le passage continu de l'état liquide à l'état gazeux à une température constante, la courbe de transformation aurait la forme que présente l'isotherme théorique de Van der Waals. Mais on n'a pas réussi à réaliser ces transformations. D'ailleurs, les états du fluide représentés par les points compris entre les points P et Q où la tangente est horizontale ne peuvent qu'être instables, puisque le volume croîtrait en même temps que la pression.

Remarquons cependant qu'on connaît les états qui correspondent aux portions uP et Qu' de la courbe. En un point de uP, le fluide est à l'état liquide sous une pression inférieure à la force élastique maximum de sa vapeur : c'est un liquide surchauffé (expériences de Dufour, de Donny). En un point de Qu', le fluide est en vapeur, sous une pression plus grande que la force élastique maximum; c'est de la vapeur sursaturée (expériences de R. von Helmholtz).

Maxwell et Clausius ont démontré une propriété de la droite uu'

qui détermine sa position par rapport à l'isotherme. Imaginons qu'on fasse décrire au fluide le cycle isothermique $uPvQu'vu$. Ce cycle est réversible et, par suite, $\int \frac{d\varphi}{T} = 0$. Comme $T = \text{const.}$, il s'ensuit que

$$\int d\varphi = 0.$$

L'aire du cycle doit être nulle (algébriquement) : il faut donc que les deux aires uPv et vQu' soient équivalentes géométriquement.

États correspondants. — Les équations (2) peuvent s'écrire

$$b = \frac{1}{3} v_c,$$
$$a = 3 v_c^2 p_c,$$
$$RT_c = \frac{8}{3} p_c v_c.$$

Posons

$$p = \varepsilon p_c, \qquad v = n v_c, \qquad T = m T_c,$$

et substituons ces valeurs dans l'équation (1), il viendra

$$\left(\varepsilon + \frac{3}{n^2}\right)(3n - 1) = 8m.$$

Cette équation ne renferme plus aucune constante spécifique de la substance considérée. Elle est donc commune à tous les corps. Van der Waals a appelée *équation réduite* cette relation purement numérique : ε est la pression réduite, n le volume réduit, m la température réduite.

Il en résulte que des corps quelconques pris à une même température réduite, sous la même pression réduite, ont le même volume réduit.

On dit que les corps sont à des *états correspondants*. Si l'on construit les courbes ayant pour coordonnées la pression réduite et le volume réduit, on obtient, pour toutes les substances, les mêmes isothermes, chacune se rapportant à une même température réduite : M. Amagat a utilisé cette propriété pour vérifier expérimentalement la loi des états correspondants. Sur le diagramme des isothermes, le changement d'unité revient à un changement d'échelle sur l'axe des coordonnées. Par suite, en agrandissant ou en diminuant le dessin du réseau d'isothermes pour l'une des substances, tout en le laissant semblable à lui-même, on arrivera à le faire coïncider avec l'autre réseau si la loi des états correspondants est exacte. En fait, il a pu réaliser

des coïncidences remarquables entre les réseaux de l'anhydride carbonique, de l'air, de l'éther, de l'éthylène.

Mais quand on considère un grand nombre de substances, la loi ne s'accorde plus avec la réalité, surtout quand on considère des états éloignés du point critique.

Autres formes d'équations caractéristiques. — Nous avons pris comme exemple d'équation caractéristique des fluides celle de Van der Waals, parce qu'elle est la plus simple. Un grand nombre d'autres ont été proposées. Nous citerons seulement celles de Clausius :

$$\left[p + \frac{a}{T(v+c)^2}\right](v-b) = RT,$$

$$\left[p + \frac{AT^{-n} - B}{(v+c)^2}\right](v-b) = RT$$

et celle de M. Sarrau, qui en est une modification

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{Ca^{-T}}{(v+c)^2}.$$

Il convient de remarquer que la loi des états correspondants n'est pas liée à la forme particulière de l'équation de Van der Waals, mais que toute équation renfermant *trois* paramètres spécifiques de la substance conduit nécessairement à cette loi (Meslin).

304. — ÉQUILIBRE DES CORPS EN CONTACT. RÈGLE DES PHASES.

Les phénomènes de vaporisation et de fusion que nous avons étudiés précédemment ne constituent qu'un cas particulier d'un problème beaucoup plus général : celui des conditions d'équilibre d'un système de deux ou plusieurs formes de la matière, en contact les unes avec les autres.

Il faut entendre l'expression *forme de la matière* dans son sens le plus large : ces formes peuvent se différencier simplement par l'état physique (être une même substance à l'état solide, liquide, gazeux), être des états allotropiques ou polymorphiques d'un même élément ou composé chimique, ou des substances de composition chimique différente.

Malgré l'extrême diversité de ces phénomènes on possède aujourd'hui, grâce aux travaux de Gibbs, continués par un grand nombre de physiciens et de chimistes, une théorie d'ensemble, d'ailleurs fort

compliquée si l'on veut traiter le problème dans toute sa généralité. Aussi nous bornerons-nous à en exposer les principes essentiels.

Définitions. — Nous appellerons *système de corps en contact* ou simplement *système*, un ensemble de corps solides, liquides ou gazeux, occupant un volume v sous une pression commune p et une température commune T. Nous ne considérons ces systèmes que dans un état d'équilibre, c'est-à-dire qu'il ne doit s'y produire aucune transformation physique ou chimique, modifiant soit la nature des substances, soit leurs proportions relatives.

Comme exemple de pareils systèmes, nous pouvons prendre : un corps en partie solide, en partie fondu ; un corps en partie liquide, en partie vaporisé ; un corps solide en contact avec le même corps fondu et le même en vapeur ; les dissolutions ; les dissolutions en présence de la vapeur du dissolvant ou du corps dissous, un corps dissocié en présence des produits de la dissociation.

On appelle *phase* dans un système toute partie du système qu'on peut isoler par des moyens purement mécaniques. Un liquide et sa vapeur forment deux phases : de même deux liquides non miscibles en contact, un solide et sa vapeur, une dissolution saturée et le corps dissous en excès. Au contraire, un mélange de deux gaz ou de deux vapeurs ne constitue qu'une phase : de même une dissolution quelconque. La glace, l'eau et la vapeur d'eau forment un système à trois phases : aussi le carbonate de calcium, l'anhydride carbonique et la chaux.

Il est plus difficile de définir exactement ce qu'on doit entendre par *composants indépendants* du système. M. Duhem les définit ainsi :

Si l'on peut trouver n corps simples ou composés tels que :

1° En prenant des masses arbitraires $m_1, m_2, \ldots, m_n$ de ces corps, on forme un système de l'espèce étudiée ;

2° Un de ces systèmes déterminés correspond à des valeurs déterminées des masses $m_1, m_2, \ldots, m_n$ des corps $1, 2, \ldots, n$.

Ces corps forment les composants indépendants du système.

Par exemple, le système eau-vapeur d'eau comporte un seul composant H^2O ; le système carbonate de calcium-chaux-anhydride carbonique comprend deux composants CaO et CO^2.

En effet, à une température donnée les masses de l'eau et de la vapeur sont entièrement déterminées par la masse totale ; de même la masse de CO^3Ca est entièrement déterminée par celles de CaO et de CO^2.

Règle des phases. — Soient N le nombre des phases, n celui des composants indépendants :

1° Le nombre des phases peut surpasser celui des composants indépendants de deux unités au plus

$$N \leq n + 2.$$

2° La différence entre le nombre des phases et le nombre des composants indépendants augmenté de 2 représente le degré de liberté ou de variance du système, c'est-à-dire le nombre des variables qui peuvent recevoir des valeurs arbitraires

$$V = n + 2 - N.$$

Si

$$N = n + 2,$$

les valeurs de toutes les variables sont déterminées; le système est en équilibre absolu, la pression et la température sont déterminées. Le système est dit *invariant*.

Si

$$N = n + 1,$$

l'une des variables reste arbitraire; le système est dit *en équilibre complet* ou *univariant*. La température est déterminée quand on se donne la pression, et réciproquement.

Si

$$N = n$$

deux variables restent arbitraires; le système est *en équilibre incomplet* ou *divariant*.

On a donné de nombreuses démonstrations de cette règle des phases. Voici l'une des plus simples :

Le système sera en équilibre et nous supposons que chacun des composants se trouve dans toutes les phases. L'état du système est défini par la pression p, la température t et les concentrations de chacun des composants dans les diverses phases. Mais quand on connaît les concentrations d'un composant dans $(n-1)$ phases, la concentration de ce même composant dans la $n^{\text{ième}}$ phase est déterminée; il existera donc $(n-1)$ variables pour chaque phase, soit pour le système entier $N(n-1)$, auxquelles il faut ajouter la pression et la température, soit en tout

$$N(n-1)+2$$

variables pour définir l'état du système.

Or nous avons vu que, dans l'état d'équilibre, le potentiel thermodynamique de chaque composant doit être le même dans toutes les phases. En écrivant ces conditions, nous aurons

$$n(N-1)$$

équations.

Puisque les $[N(n-1)+2]$ variables sont liées par $n(N-1)$ équations, il en reste

$$V = N(n-1)+2-n(N-1)$$
$$= n+2-N$$

qui pourront prendre des valeurs arbitraires.

Comme V ne peut être négatif, puisque le nombre des équations ne saurait surpasser celui de variables, les propositions énoncées sont démontrées.

Dans le cas où p composants ne figureraient pas dans une phase, la variance reste la même. En effet, nous aurons alors $(N-1)$ phases à n composants et une phase à $(n-p)$ composants, le nombre des variables sera

$$(N-1)(n-1)+n-p-1+2 = N(n-1)+2-p$$

et celui des équations de condition

$$n(N-2)+n-p = n(N-1)-p.$$

Le nombre des variables et celui des conditions sont donc diminués l'un et l'autre de p et leur différence reste la même. Il en serait encore ainsi si un composant manquait dans n phases.

Application de la règle des phases à quelques exemples. — Considérons un système ne comprenant qu'un seul composant :

1° Le composant unique se trouve dans une seule phase

$$N = 1 = n,$$

le système doit être divariant. Effectivement, on peut donner à la pression et à la température d'un corps isolé, liquide ou gazeux telles valeurs que l'on veut.

2° Le composant unique se trouve dans deux phases,

$$N = 2, \quad n = 1,$$
$$V = 1,$$

le système est univariant. En effet, si un liquide est en présence de

sa vapeur, la pression est déterminée par la température ; elle est égale à la force élastique de la vapeur saturée.

3° Le composant unique se trouve dans trois phases,

$$N = 3, \quad n = 1,$$
$$V = 0.$$

le système est en équilibre complet. La pression et la température sont déterminées. On dit aussi que le système est en un point *triple*. Cette expression s'explique d'elle-même si nous nous reportons à la représentation graphique.

Considérons en particulier l'eau comme composant ; nous pouvons former trois systèmes à deux phases :

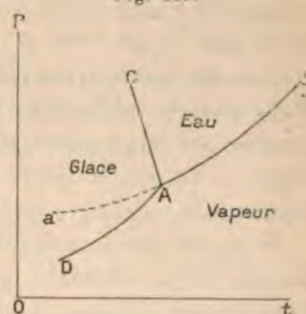
1. Eau-vapeur,
2. Eau-glace,
3. Glace-vapeur.

Chacun de ces systèmes est univariant et se trouve en équilibre quand la pression et la température sont liées par une certaine relation,

$$p_1 = f_1(t), \qquad p_2 = f_2(t), \qquad p_3 = f_3(t).$$

Construisons sur un même diagramme les courbes représentant ces fonctions : la première sera la courbe des pressions de la vapeur saturée, la courbe de vaporisation de l'eau ; la deuxième, la courbe de vaporisation de la glace ou de sublimation ; la troisième, la courbe de fusion de la glace (*fig.* 280).

Fig. 280.



Si les trois phases sont en contact, il est nécessaire, pour que le système soit en équilibre, que les trois phases soient en équilibre deux à deux. En d'autres termes, cet état d'équilibre ne peut être représenté que par un point commun aux trois courbes. La pression et la température correspondantes sont donc complètement déterminées.

Dans le cas de l'eau la température du point triple est un peu supérieure à 0° ; c'est, en effet, la température de fusion de l'eau sous la pression de sa vapeur saturée ($p' = 4^{mm},6$ de mercure ; $t' = +0°,0076$).

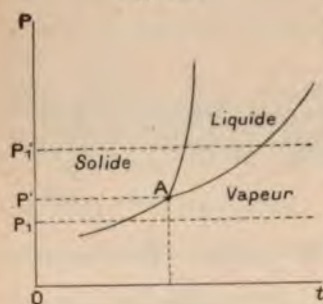
(Le prolongement en pointillé de la courbe de vaporisation de l'eau représente la pression de vapeur de l'eau en surfusion.)

Les courbes d'équilibre partagent le plan en trois régions. Dans la région BAC (c'est-à-dire sous les pressions et les températures qui représentent les coordonnées d'un point situé dans cette région du plan), l'eau est à l'état liquide; dans la région BAD elle est à l'état de vapeur; dans la région DAC, elle est à l'état de glace.

Nous obtiendrions des résultats analogues avec toute autre substance, susceptible de prendre les trois états physiques : seulement la disposition des courbes autour du point triple pourrait être différente.

A l'aide de ces courbes, il est possible de se rendre compte pourquoi un certain nombre de substances ne fondent pas en vase ouvert, c'est-à-dire sous la pression atmosphérique, mais se subliment, autrement dit passent directement de l'état solide à l'état de vapeur. Tels sont l'anhydride carbonique, l'arsenic, l'iode, etc.

Fig. 281.



Supposons que nous élevions la température du corps en maintenant la pression constante. Il passera par une série d'états que représente une droite parallèle à l'axe des abscisses $p = p_1$ (*fig.* 281).

On voit aisément que si p_1 est plus petit que la pression p' correspondant au point triple, la droite $p = p_1$ ne traverse pas la région du liquide : elle coupe seulement la courbe de sublimation; le corps passe de l'état solide à l'état de vapeur. Si la pression p' est supérieure à la pression atmosphérique, il en sera toujours ainsi quand on chauffera le corps en vase ouvert.

Si p_1 est plus grand que p', la droite $p = p_1$ traverse la région du liquide et la substance prend l'état liquide dans un intervalle de températures d'autant plus étendu que p est plus grand.

L'expérience justifie ces conclusions.

4° Le composant unique peut affecter quatre phases. Tel, par exemple, le soufre, qui peut se présenter à l'état gazeux, à l'état liquide et sous deux états solides, le soufre orthorhombique ou octaédrique et le soufre clinorhombique ou prismatique.

Ces quatre phases ne peuvent coexister dans un état d'équilibre, d'après la règle des phases.

L'étude de pareils systèmes devient fort compliquée.

Riecke a démontré qu'un seul composant pouvant affecter N phases

est susceptible de former au maximum

$$\frac{N(N-1)(N-2)}{1.2.3}$$

systèmes invariants ou points triples.

Dans le cas du soufre ($N=4$), il peut donc exister quatre points triples. La discussion complète montre que trois de ces états sont stables, le quatrième instable.

Expériences de Tammann. — Tammann a effectué une série d'expériences fort remarquables, dans lesquelles il a déterminé la pression et la température des points triples pour un certain nombre de substances, en particulier, le soufre, le phénol, le chlorure de phosphonium, l'azotate d'ammonium, l'iodure de méthylène.

Ce dernier est connu sous six phases : vapeur, liquide, solide sous quatre formes cristallines. D'après la formule de Riecke, il doit en résulter vingt points triples. Tammann a pu en déterminer six, dont deux correspondent à l'équilibre entre trois des phases cristallisées.

Malheureusement, on rencontre des difficultés presque insurmontables dans les recherches : les pressions correspondant aux points triples sont la plupart du temps supérieures à l'extrême limite des pressions que nos moyens actuels permettent de réaliser (Tammann est arrivé à 1000^{kg} par centimètre carré).

L'un des résultats les plus intéressants obtenus par ce physicien est la découverte de deux modifications de la glace, toutes deux plus denses que l'eau, qui se forment à très basse température sous une pression très élevée.

La règle des phases trouve un grand nombre d'applications dans l'étude des dissolutions.

305. — RELATIONS ENTRE LES PROPRIÉTÉS PHYSIQUES DES DISSOLUTIONS ET CELLES DU CORPS DISSOUS ET DU DISSOLVANT.

Les propriétés physiques du dissolvant sont plus ou moins modifiées par la présence du corps dissous.

On s'est efforcé de trouver des relations simples entre les propriétés de la dissolution, celles du corps dissous et du dissolvant et la concentration. Ces recherches ont conduit à quelques résultats intéressants, bien qu'on n'ait guère réussi à établir des lois à la fois simples et rigoureuses.

Densité. — Si l'on désigne par δ la densité de la dissolution, par δ' celle du dissolvant, par m la concentration, le quotient $\frac{\delta - \delta'}{m}$ est en général fonction de la concentration et la variation est d'autant plus prononcée que m est plus petit. Pour le sucre dissous dans l'eau, $\frac{\delta - 1}{m}$ est constant et sa valeur est telle qu'il n'y a ni contraction ni dilatation sensible provoquée par la dissolution.

Compressibilité. — La compressibilité des dissolutions aqueuses est plus grande que celle de l'eau : la différence qu'on a appelée *compressibilité saline* est proportionnelle à la concentration quand celle-ci est faible puis croît moins rapidement quand la concentration augmente.

Pour un même sel, elle est proportionnelle à la compressibilité du dissolvant. D'autre part, le produit de la compressibilité saline par le poids atomique du métal tend à devenir constant pour les sels d'un même acide, quand le poids moléculaire de celui-ci diminue, même pour les sels d'un même métal, le produit de cette compressibilité par le poids moléculaire de l'acide, quand le poids atomique du métal diminue.

Tension superficielle. — On a étudié surtout les dissolutions aqueuses. En désignant par A' la tension superficielle de la dissolution saline, par A celle de l'eau à la même température, par u le volume de 100^{mol} d'eau, v le volume de n molécules de sel dissoutes dans 100 parties d'eau, on a, d'après Sentis,

$$A' \sqrt[3]{\frac{v}{u}} = \frac{100 - n}{100} A + \Phi,$$

Φ représente l'action réciproque par unité de longueur des molécules de sel et des molécules d'eau.

Les expériences ont montré que Φ est, entre 0° et 25°, indépendant de la température, proportionnelle à n jusqu'à la solution la plus concentrée. Φ ne dépend pas de la nature du sel et est égal à autant de fois $0{,}78 \frac{\text{dyne}}{\text{cm}}$ que le sel comporte de radicaux. Quelques sels font exception cependant.

Forch, dans le cas des dissolutions de chlorure, de sulfate, d'azotate de sodium, d'acide phosphorique, de sucre ; Dorsey, pour les dissolutions de carbonate et de chlorure de sodium et de potassium,

de sulfate de zinc, ont trouvé que la tension superficielle est fonction linéaire de la concentration.

D'après Gradenwitz, le rapport $\frac{100}{m}\frac{\Delta A}{A}$ décroît d'abord assez rapidement, puis plus lentement quand la concentration m augmente : pour une même valeur de la concentration, ce rapport diffère d'un sel à l'autre.

Dilatation : maximum de densité. — De Coppet a trouvé que des substances de même constitution dissoutes dans l'eau produisent sensiblement le même abaissement moléculaire de la température du maximum de densité. (L'abaissement moléculaire est égal à l'abaissement observé, multiplié par le quotient du poids moléculaire par la concentration.)

Quelques corps font exception : ainsi quand on fait dissoudre dans l'eau des quantités croissantes d'alcool éthylique, la température du maximum de densité s'élève d'abord, passe par un maximum puis redescend de plus en plus vite.

Voici les valeurs de l'abaissement moléculaire trouvées par de Coppet, pour les haloïdes alcalins :

	Chlorure.	Bromure.	Iodure.
	°	°	°
Rubidium.........	11,7	13,2	15,6
Potassium........	11,6	12,8	15,4
Sodium...........	13,2	14,5	17,0
Lithium..........	6,0	7,0	8,3
Ammonium.......	7,2	8,7	11,1

Chaleur spécifique. — Diverses formules ont été proposées qui ne se vérifient que pour certains groupes de corps.

L'une de celles qui paraissent s'appliquer au plus grand nombre de corps (quatre-vingts environ), a été indiquée par M. Mathias.

En appelant γ la chaleur spécifique de la dissolution, c celle du dissolvant contenant 1^{mol} du corps dissous,

$$\gamma = \frac{a+n}{b+n}c$$

à partir d'une certaine limite inférieure de n. Cette limite est 25 ou 20, quelquefois 15 ou 10 pour les dissolutions aqueuses, plus faible pour les autres dissolutions.

306. — ABAISSEMENT DE LA TEMPÉRATURE DE CONGÉLATION.

La température de congélation d'une dissolution est plus basse que celle du dissolvant pur. La partie solidifiée est formée de dissolvant pur, sauf dans des cas particuliers. Par température de congélation d'une dissolution, il faut donc entendre la température à laquelle le dissolvant solidifié est en équilibre avec la dissolution.

Supposons qu'on refroidisse progressivement une dissolution : si la concentration est supérieure à la concentration de saturation à la température de congélation du dissolvant, le corps dissous se séparera partiellement de la dissolution avant que la congélation ne se produise. Si la concentration est inférieure à cette limite, la congélation du dissolvant se produira avant que le corps dissous se sépare. Enfin, quand on refroidira davantage, la dissolution se saturera et il se séparera un mélange de dissolvant et de corps dissous solides, la concentration et la température restant invariables : un pareil mélange est ce qu'on appelle un *cryohydrate* ou *cryosel*. De l'invariabilité de la température et de la composition des cryohydrates, on a voulu conclure que ces cryohydrates étaient des combinaisons chimiques. Rien n'autorise cette supposition et, en fait, l'examen microscopique a démontré que les cryohydrates étaient de simples mélanges.

Influence de la concentration. — Dès 1788, Blagden avait déduit d'expériences effectuées sur les dissolutions de sels dans l'eau que l'abaissement de la température de congélation est en général proportionnel à la concentration.

Plus tard (1861), Rüdorff trouva que la plupart des exceptions rentrent dans la loi générale, si l'on admet qu'il se forme dans la dissolution des hydrates définis et si l'on évalue la concentration, non pas d'après la masse du sel anhydre, mais d'après celle de l'hydrate, dissoute dans l'eau non combinée.

De Coppet compara l'abaissement moléculaire de différents sels : c'est-à-dire l'abaissement produit par une molécule-gramme du sel dissous dans 100 parties d'eau. Ces abaissements sont à très peu près égaux pour des sels de constitution chimique analogue.

Ces observations n'avaient guère dépassé la portée de remarques particulières. C'est à Raoult (1886-1901) que revient le mérite d'avoir établi les lois générales de ce phénomène, que mirent en évidence ses expériences sur les solutions non aqueuses, ou sur les solutions aqueuses de corps organiques neutres.

En portant en abscisses les abaissements de la température de congélation, en ordonnées les coefficients d'abaissement ou quotients de l'abaissement par la concentration, on obtient des droites un peu inclinées sur l'axe des abscisses. Pour les dissolutions dans l'eau des acides ou des sels organiques, la courbe se relève vers l'axe des ordonnées entre les abscisses 0°,5 et 0°. En prolongeant la partie rectiligne des courbes jusqu'à la rencontre de l'axe des ordonnées, l'ordonnée du point de rencontre représente ce que Raoult appelle le *coefficient d'abaissement à l'origine,* il le considère comme le coefficient qui correspondrait à une concentration nulle. On peut démontrer qu'il est indépendant de l'hydratation que peuvent subir les corps dissous.

De même le coefficient d'abaissement des dissolutions dans les dissolvants organiques (acide acétique, benzène, etc.) est aussi représenté par des droites, au moins entre les abaissements 0°,4 et + 4°.

Ces droites sont en général fort peu inclinées sur l'axe des abscisses, en sorte que, dans une première approximation, on peut regarder le coefficient d'abaissement comme constant : en d'autres termes, la loi de Blagden s'applique aux dissolutions étendues de composés organiques.

L'abaissement moléculaire K sera l'abaissement qui correspond à une concentration d'une molécule-gramme dans 100g du dissolvant.

Si C est l'abaissement observé avec une dissolution de concentration P, M le poids moléculaire de la substance dissoute,

$$K = \frac{CM}{P}.$$

Lois de Raoult. — 1° Dans un même dissolvant les abaissements moléculaires sont les mêmes pour toutes les substances organiques et en général pour toutes les substances qui n'y subissent ni concentration ni décomposition.

2° Les quotients de l'abaissement moléculaire d'un dissolvant, par le poids moléculaire de ce dissolvant, sont à peu près les mêmes, sauf pour l'eau.

Dissolvant.	Abaissement moléculaire.	Poids moléculaire.	Quotient.
Eau.................	18,5	18	1,02
Acide formique......	28	46	0,608
Acide acétique.......	39	60	0,650
Benzène.............	49	78	0,628
Nitrobenzène.........	70,5	123	0,600

Cette loi se vérifie moins exactement que la première, les quotients

de l'abaissement moléculaire par le poids moléculaire varient pour les divers dissolvants entre 0,41 et 0,79, sans qu'il apparaisse de relation entre cette variation et celle des poids moléculaires ou des abaissements eux-mêmes.

Détermination des poids moléculaires : cryoscopie. — La relation

$$K = C\frac{M}{P}$$

permet de calculer le poids moléculaire M d'une substance dissoute quand on a déterminé l'abaissement C correspondant à une concentration P et la constante K, par des expériences effectuées sur des substances de poids moléculaire connu : c'est la méthode de la *cryoscopie*.

307. — ABAISSEMENT DE LA FORCE ÉLASTIQUE DE LA VAPEUR SATURÉE.

La force élastique de la vapeur saturée f', en présence d'une dissolution, est toujours inférieure, si le corps dissous n'est pas volatil à la valeur f qui correspond au dissolvant pur.

Des mesures, très nombreuses cependant, faites de la force élastique de vapeur saturée des dissolutions, on n'avait pas réussi, avant Raoult, à tirer une loi simple. On s'attaquait au cas des dissolutions aqueuses, le plus compliqué de tous.

En étudiant les dissolutions dans les liquides organiques, éther, alcool, chloroforme, benzène, etc., Raoul parvint à établir les lois suivantes :

Lois de Raoult. — 1° Pour une même dissolution la diminution relative de la force élastique de la vapeur saturée

$$\frac{f - f'}{f}$$

est indépendante de la température. En réalité, comme le montrent la théorie et les expériences, cette diminution relative augmente un peu avec la température.

2° Pour une même substance dissoute dans un même dissolvant, la diminution relative est proportionnelle à la concentration. La *diminution relative moléculaire* A sera celle que présenterait une dissolution renfermant une molécule-gramme du corps dissous dans 100^g du dissolvant.

Si $f - f'$ est la diminution relative observée sur une dissolution de concentration P, M le poids moléculaire du corps dissous,

$$A = \frac{f - f'}{f} \frac{M}{P}.$$

3° Dans un même dissolvant la diminution relative moléculaire A est sensiblement indépendante de la substance dissoute.

4° La diminution relative moléculaire est à peu près proportionnelle au poids moléculaire du dissolvant.

Le Tableau ci-dessous donne les valeurs de la diminution relative moléculaire et du quotient de cette diminution par le poids moléculaire pour un certain nombre de dissolvants :

Dissolvants.	Poids moléculaire.	Diminution relative moléculaire.	Quotient.
Sulfure de carbone....	76	0,80	0,0105
Chloroforme..........	119,5	1,30	106
Benzène..............	78	0,83	101
Éther................	74	0,71	104
Acétone..............	58	0,59	103
Alcool méthylique.....	32	0,33	105
Alcool éthylique.......	46	0,47	101

La mesure des forces élastiques de vapeur saturée en présence des dissolutions est assez compliquée. Quand il s'agit de dissolutions étendues, on lui substitue la détermination plus aisée de la température d'ébullition.

Nous avons vu que la température d'ébullition est celle à laquelle la force élastique de la vapeur saturée devient égale à la pression extérieure. Une diminution de cette force élastique entraîne donc une élévation de la température d'ébullition ΔT.

La dissolution étant supposée étendue de manière que ΔT ne dépasse 1°, on aura

$$\frac{f - f'}{\Delta T} = \frac{df}{dT}$$

ou

$$\frac{f - f'}{f} = \frac{1}{f} \frac{df}{dT} \Delta T.$$

Les valeurs de f et de $\frac{df}{dT}$ [illegible] température d'ébullition [illegible]

Par conséquent [illegible] même

pression extérieure, l'élévation du point d'ébullition sera proportionnelle à la diminution relative de la force élastique de la vapeur.

Détermination des poids moléculaires : tonométrie et ébullioscopie. — La relation

$$A = \frac{f - f'}{f} \frac{M}{P}$$

ou

$$A = K \Delta T \frac{M}{T}$$

permet de calculer M quand les autres quantités sont connues. Si l'on a déterminé A par des expériences sur des corps de poids moléculaire connu, on pourra déterminer le poids moléculaire inconnu d'un autre corps : c'est la méthode de l'*ébullioscopie* ([1]).

308. — DIFFUSION.

Deux liquides miscibles mis en contact l'un avec l'autre se pénètrent peu à peu jusqu'à ce qu'ils forment un mélange homogène. On donne à ce phénomène le nom de *diffusion*. En particulier, l'un des corps peut être un liquide pur, l'autre une dissolution d'une substance quelconque dans ce liquide; la substance dissoute se répand peu à peu dans le dissolvant en excès.

Expériences de Graham. — Pour étudier la diffusion d'un corps dissous dans le dissolvant, Graham disposait au fond d'une grande éprouvette pleine d'eau un petit flacon contenant la dissolution. Au bout d'un temps connu, il enlevait le flacon et déterminait la quantité du corps dissous qui était sorti du flacon. Plus tard, il mettait les deux liquides en contact direct et, à des intervalles de temps égaux, prélevait à l'aide d'un siphon capillaire une prise d'essai à diverses hauteurs et déterminait la concentration. Il exprimait les résultats par le temps nécessaire pour que la concentration devînt la même à la même distance de la surface de séparation. Il trouva, par exemple,

---

([1]) Pour la description des appareils et de la technique expérimentale de l'ébullioscopie comme de la cryoscopie, nous renverrons le lecteur aux ouvrages spéciaux. *Voir* notamment :

Raoult, *Tonométrie*, vol. 8 de la collection. *Scientia*, série physique-mathématique. — Raoult, *Cryoscopie*, vol. 13 de la collection.

comme valeurs relatives de ces intervalles de temps :

Acide chlorhydrique (dissous dans l'eau)	....	1
Sel marin	»	2,3
Sucre	» ...	7
Albumine	»	49
Caramel	» ...	98

Coefficient de diffusion. — Considérons une dissolution et le dissolvant pur superposés et se diffusant l'un dans l'autre. Soit u la concentration dans le plan horizontal situé à une distance verticale z de la surface de séparation. La quantité dq de substance dissoute qui traverse pendant le temps dt une surface d'étendue s prise dans ce plan horizontal sera proportionnelle à s, à dt et à la variation $\frac{du}{dz}$ de la concentration

$$dq = -ks\frac{du}{dz}dt.$$

Nous mettons le signe — parce que la substance dissoute se déplace dans le sens des concentrations décroissantes. Le facteur k est le *coefficient de diffusion*; il caractérise la dissolution et son état physique. En unités C. G. S., k représente la quantité de grammes de matière dissoute qui traverse [illegible] une surface [illegible] de 1cm², quand la différence de concentration entre deux plans distants de 1cm est égale à l'unité.

Comme il est facile de le vérifier [illegible] k [illegible] du quotient d'une surface par un temps

$$[illegible]$$

D'après les expériences de Graham [illegible] les données suivantes :

Dissolvant.	Corps dissous.	Température.	k.
Eau.	Acide chlorhydrique	[illegible]	[illegible]
	Chlorure de sodium	[illegible]	[illegible]
		[illegible]	[illegible]
	Sucre	[illegible]	[illegible]
	Albumine	[illegible]	[illegible]
	Caramel	[illegible]	[illegible]

Graham reconnut que les substances qui se diffusent le plus rapidement sont les substances susceptibles de cristalliser ou les liquides; il leur donna le nom de *cristalloïdes*. [illegible] substances se diffusant

peu ou point, analogues à la colle, telles que la gomme, l'albumine, le caramel, la gélatine, le tannin, etc., il donna le nom de *colloïdes*. Les mélanges que forment les colloïdes avec les liquides ne sont pas, à proprement parler, des dissolutions, car leurs propriétés diffèrent beaucoup des propriétés caractérisant les dissolutions des cristalloïdes.

309. — OSMOSE.

La diffusion peut se produire non seulement quand les deux liquides sont en contact immédiat, mais aussi quand ils sont séparés par certains solides poreux : membranes animales ou végétales, terres poreuses, etc.

Ce phénomène a été découvert dès 1748 par l'abbé Nollet. Ayant plongé dans un vase plein d'eau une éprouvette remplie d'alcool et fermée par une vessie, il vit la vessie se gonfler peu à peu et constata que de l'eau avait pénétré dans l'éprouvette. Inversement, en mettant l'eau dans l'éprouvette et l'alcool à l'extérieur, il vit la vessie se creuser : l'eau sortant à travers la membrane. Cette observation passa inaperçue et le phénomène fut découvert plusieurs fois jusqu'en 1827, où Dutrochet en fit une étude un peu plus complète et lui donna le nom d'*osmose*.

Dutrochet reconnut que, en général, il se produit à travers la membrane deux courants en sens inverse, avec des vitesses différentes. Ces vitesses dépendent de la nature des liquides et de la nature de la membrane; leur ordre de grandeur relatif, pour deux liquides déterminés, peut varier aussi avec la membrane.

Lorsqu'on opère avec des dissolutions, les corps dissous traversent aussi la membrane, avec une vitesse qui dépend de la nature du corps dissous et pour un même corps de la concentration de la dissolution. D'une manière générale, les colloïdes ont une vitesse d'osmose presque négligeable vis-à-vis de celle des cristalloïdes.

Dialyse. — C'est sur cette propriété que Graham a fondé la méthode d'analyse par diffusion ou *dialyse*, pour séparer les cristalloïdes et les colloïdes.

Le dialyseur de Graham est formé par un vase peu profond, dont le fond est constitué par une feuille de papier parchemin, liée sur le bord de façon à obtenir une fermeture étanche. La dissolution, d'ordinaire dans l'eau, est versée dans ce vase, puis celui-ci plongé dans un vase plus grand contenant de l'eau.

Une application pratique importante est l'osmogène de Dubrunfaut, employé pour séparer par la dialyse les sels minéraux contenus dans les jus de betterave, qui empêchent la cristallisation du sucre. On fait circuler ces jus côte à côte avec un courant d'eau se déplaçant en sens contraire, en les séparant par des cadres de papier parchemin.

310. — MEMBRANES SEMI-PERMÉABLES. PRESSION OSMOTIQUE.

Les phénomènes d'osmose, dont l'intérêt paraissait devoir se limiter à la Physiologie, ont acquis une très grande importande dans la Physique, grâce à la découverte des membranes semi-perméables.

On désigne sous ce nom des membranes qui, séparant deux liquides ou deux dissolutions, ne laissent passer que l'un des liquides ou l'un des corps dissous, ou encore le dissolvant seulement à l'exclusion du corps dissous.

Telles sont les membranes que Traube a préparées par précipitation. Si l'on met en contact une dissolution de gélatine, par exemple, avec une dissolution de tannin, il se produit à la surface commune une mince couche de gélatine tannée; de même, avec une dissolution de sulfate de cuivre et une dissolution de ferrocyanure de potassium, une mince couche de ferrocyanure de cuivre.

Ces membranes sont imperméables pour les substances dissoutes, mais elles sont perméables à l'eau.

Par contact direct, on ne peut obtenir que des membranes de faible étendue et, en outre, très fragiles.

Pfeffer a tourné la difficulté en faisant se produire ces membranes à l'intérieur d'un vase de terre poreuse, qui sert de support, mais dont les pores sont assez grands pour ne pas agir sur la diffusion à travers la membrane. Les pores se ferment par de petites membranes dont l'ensemble se comporte comme une membrane de grande étendue.

Un vase de pile, soigneusement nettoyé, est rempli d'une dissolution étendue de sulfate de cuivre, puis plongé dans une dissolution étendue de ferrocyanure de potassium : les deux dissolutions pénètrent peu à peu dans la paroi et, par leur réaction mutuelle, forment la membrane. On vide le vase, on le lave, on y introduit la dissolution étudiée et on le ferme par un bouchon que traverse un tube faisant communiquer l'intérieur avec un manomètre; ensuite il est plongé dans l'eau pure.

On constate alors que le manomètre accuse une augmentation de pression croissant peu à peu jusqu'à une certaine limite qui reste ensuite invariable. Cet excès de pression représente ce qu'on a appelé la *pression osmotique*.

Tant que la pression à l'intérieur du vase est plus faible que la pression osmotique, de l'eau pénètre dans le vase à travers la membrane; si la pression intérieure est supérieure à la pression osmotique, l'eau sort du vase, et ces mouvements se continuent jusqu'à ce que l'équilibre soit rétabli.

La pression osmotique dépend de la nature de la substance dissoute, de la concentration de la dissolution et de la température, mais elle est indépendante de la nature de la membrane.

Considérons, en effet, un tube fermé par deux membranes semi-perméables A et B, entre lesquelles se trouve la dissolution, le reste du tube contenant de l'eau.

Supposons que la pression osmotique soit plus grande à travers A qu'à travers B, et soit p la valeur de cette dernière. Tant que la pression entre A et B sera inférieure à p, l'eau entrera dans la dissolution par les deux membranes. Quand la pression sera devenue égale à p, l'eau cessera de passer à travers B, mais continuera d'entrer par A. Si la pression devient supérieure à p, l'eau entrera par A, sortira par B, sans que la pression puisse atteindre la valeur de la pression osmotique qui correspond à A. Il se produira donc un mouvement continu de l'eau et un travail mécanique continu, ce qui est incompatible avec le second principe de la Thermodynamique.

La pression osmotique a donc la même valeur pour les deux membranes.

Variation de la pression osmotique avec la pression et la température. — D'après les expériences effectuées par Pfeffer avec les membranes de ferrocyanure de cuivre sur les dissolutions de sucre de canne, la pression osmotique est proportionnelle à la concentration et à la température absolue.

En désignant par n la concentration (nombre de grammes de sucre par 100^{g} de dissolution), par t la température centigrade, la formule

$$p = 0,642 \frac{\text{mégadynes}}{\text{cm}^2} n(1 + 0,00367t) \text{ atm.}$$

représente très exactement les résultats de l'expérience.

Le coefficient de température 0,00367 est égal au coefficient de

dilatation α des gaz. Si v est le volume occupé dans la dissolution n par m grammes de la substance dissoute

$$n = 100 \frac{m}{v}$$

et la formule peut s'écrire

$$pv = 0,642 \times 100 m 0,00367 \text{ T},$$

T étant la température absolue.

Faisons dans cette équation

$$p = 1, \qquad \text{T} = 273, \qquad m = \text{une molécule-gramme} = 342\,;$$

il vient

$$\begin{aligned} v &= 64,2 \times 0,00367 \times 273 \times 342 \\ &= 64,2 \times 342 = 21956 \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

C'est très sensiblement le volume occupé par une molécule d'un gaz dans les mêmes conditions de température et de pression (22, 231).

La pression osmotique serait donc égale à la pression que prendrait la substance dissoute si, réduite à l'état gazeux, elle occupait le même volume que la dissolution.

311. — THÉORIE DE VAN T' HOFF.

La généralisation de ce résultat est le point de départ de la théorie de Van t' Hoff.

Van t' Hoff admet que, dans tous les cas, la pression osmotique p d'une substance dissoute, le volume v de la dissolution et la température absolue T sont liés par l'équation

$$pv = \text{RT},$$

R étant un facteur qui ne dépend que de la nature de la substance dissoute.

Il a démontré par la théorie, en s'appuyant sur les propriétés des parois semi-perméables, que R a précisément la valeur correspondant au gaz.

Si l'on exprime la pression en $\frac{\text{mégadynes}}{\text{cm}^2}$, le volume en cm^3,

$$pv = 855 \text{ T},$$

pour une molécule-grammes d'une substance quelconque.

Supposons qu'une dissolution et le dissolvant pur soient séparés par une paroi semi-perméable.

On laisse pénétrer dans la dissolution le volume de dissolvant qui, au degré de concentration de cette dissolution, renferme une molécule de substance dissoute. Le travail effectué par la pression osmotique sera

$$\mathfrak{T} = p\,\Delta V.$$

Si nous supposons la dissolution en assez grande quantité pour que l'introduction de ce dissolvant ne fasse pas varier la concentration d'une manière sensible, p sera constant, ΔV sera le volume occupé par une molécule du corps dissous ; d'où

$$\mathfrak{T} = pv = 855\ T.$$

Si l'on exprime ce travail en calories, on a

$$\mathfrak{T} = \frac{855}{4,17}\,T = 205\ T,$$

en chiffres ronds 200 T.

Les vérifications directes sont peu nombreuses, à cause des difficultés que présentent les expériences sur les parois semi-perméables.

Mais on peut déduire de la théorie de Van t' Hoff nombre de conséquences plus accessibles au contrôle expérimental. Cette étude forme une notable partie de la branche des sciences physiques appelée aujourd'hui *Physicochimie*.

Nous ne pouvons entrer dans le détail des recherches fort étendues qui ont été effectuées sur ce sujet, et nous nous bornerons à quelques exemples.

Pression osmotique et abaissement de la pression de vapeur saturée. — Considérons une dissolution contenant n molécules de la substance dissoute dans N molécules du dissolvant et séparée du dissolvant par une paroi semi-perméable. Soient p la pression de vapeur saturée en présence du dissolvant pur, $p - \Delta p$, cette pression en présence de la dissolution.

Vaporisons au-dessus du dissolvant $\frac{N}{n}$ molécules, nous aurons à fournir une certaine quantité de chaleur Q, à la température T. La vapeur aura la pression p. Laissons-la se détendre à température constante, jusqu'à ce que sa pression soit $p - \Delta p$: elle effectuera un travail

$$855\,\frac{N}{m}\,T\,\frac{\Delta p}{p}.$$

Mettons la vapeur en contact avec la dissolution et liquéfions-la : elle dégagera une quantité de chaleur Q.

Enfin, ramenons le liquide obtenu dans le dissolvant à travers la paroi semi-perméable.

Si p est la pression osmotique, il faudra fournir pour cette opération un travail

$$PV,$$

V étant le volume occupé dans la dissolution par une molécule de la substance dissoute. Donc

$$PV = 855\,T.$$

Nous avons réalisé un cycle isotherme et réversible ; le travail total doit être nul : d'où

$$855\,T = 855\frac{N}{m}\,T\,\frac{\Delta p}{p},$$

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{N}{m}.$$

C'est le résultat trouvé expérimentalement par M. Raoult.

Pression osmotique et abaissement de la température de congélation. — Considérons la même dissolution que ci-dessus. Supposons que la température de congélation du dissolvant pur soit T et celle de la dissolution $T - \Delta T$.

Faisons congeler dans la dissolution $\frac{N}{n}$ molécules du dissolvant : nous supposons la masse de la dissolution assez grande pour que cette opération n'altère pas la concentration d'une manière sensible et, par suite, que la température reste invariable pendant la congélation. Si λ est la chaleur de fusion moléculaire du dissolvant, les $\frac{N}{m}$ molécules dégageront par leur solidification une quantité de chaleur

$$Q = \frac{N}{m}\lambda$$

à la température $T - \Delta T$.

Séparons la masse solidifiée de la dissolution, et portons-la à la température T : la quantité de chaleur à lui fournir est négligeable vis-à-vis de Q.

Faisons fondre le dissolvant solide au contact du dissolvant pur, à la température T, par conséquent. Il faudra lui fournir une quantité de chaleur Q.

Enfin, par la paroi semi-perméable, nous ramenons le dissolvant dans la dissolution; nous recueillerons un travail

$$\mathfrak{T} = 855\ T,$$

puisque cette masse de dissolvant contient dans la dissolution une molécule de la substance dissoute.

Nous aurons réalisé un cycle fermé réversible, dans lequel la quantité de chaleur a passé de la température T à la température $T - \Delta T$ en fournissant un travail $\mathfrak{T}$.

D'après le principe de Carnot

$$\mathfrak{T} = JQ\frac{\Delta T}{T},$$

d'où

$$855\ T = 4{,}17\frac{N}{n}\lambda\frac{\Delta T}{T},$$

$$\Delta T = \frac{855}{4{,}17}\frac{T^2}{\lambda}\frac{n}{N},$$

$$\Delta T = 205\frac{T^2}{\lambda}\frac{n}{N}.$$

Comme T et λ sont constants pour un même dissolvant, nous retrouvons encore le résultat déduit par Raoult de ses expériences, sans l'intervention d'aucune théorie.

De plus, cette relation renferme la chaleur de fusion moléculaire λ, ce qui donne lieu à une autre série de vérifications.

Électrolytes. — Lorsque la dissolution est un électrolyte, c'est-à-dire conduit le courant électrique, l'équation

$$pv = RT$$

est en défaut. On est obligé d'écrire

$$pv = i RT,$$

i étant un facteur plus grand que 1 et en général voisin de 2, pour les sels à acide fort et base forte.

Nous reviendrons sur ce point quand nous étudierons les propriétés électriques des dissolutions.



CHAPITRE IX.

CHALEURS DE VAPORISATION.

312. — CHALEUR LATENTE ; CHALEUR TOTALE.

Lorsque nous avons défini la chaleur nécessaire pour produire le phénomène de la fusion, nous aurions pu ne pas nous occuper de l'influence de la pression sur la valeur de cette constante, parce que la température de fusion peut être considérée comme invariable entre des limites très éloignées de la pression.

Il n'en est plus de même si nous considérons le passage de l'état liquide à l'état de vapeur ; ce changement d'état peut s'effectuer sous les pressions les plus différentes et à toutes les températures. Rien ne nous permet d'affirmer que la chaleur de vaporisation doive conserver la même valeur lorsque la pression et la température de vaporisation changent.

La chaleur latente de vaporisation ordinaire est celle qui correspond à la température d'ébullition normale du liquide, c'est-à-dire sous la pression atmosphérique. C'est de celle-là que l'on voudra parler, toutes les fois que le contraire ne sera pas spécifié.

D'une façon générale, on appelle *chaleur latente de vaporisation à t degrés* la quantité de chaleur qu'il faut fournir à l'unité de poids d'un liquide pour le transformer, à une température donnée t, en vapeur saturante ; nous la représenterons par la lettre l_t.

On fait aussi un fréquent usage d'une autre quantité que l'on désigne sous le nom de *chaleur totale de vaporisation ;* c'est la quantité de chaleur qu'il faut communiquer à l'unité de poids d'un liquide pris à o° pour le porter d'abord à la température t et le transformer ensuite en vapeur saturante à cette même température.

D'après cette définition, la chaleur totale de vaporisation à $t°$ que nous représenterons par λ_t est la somme de deux termes dont l'un est la chaleur latente à t degrés, l_t, et l'autre la chaleur sensible au ther-

momètre, qu'il faut dépenser pour élever l'unité de poids du liquide de o à t°, c'est-à-dire le produit de la chaleur spécifique moyenne C entre o et t, par le nombre t. On a ainsi

$$\lambda_t = l_t + Ct.$$

Dans le cas de l'eau en particulier, si l'on admet que C est constante et égale à l'unité, on voit que

$$\lambda_t = l_t + t.$$

En réalité on devrait considérer trois termes dont les deux premiers sont réunis sous le nom de *chaleur de vaporisation :*

1° Pendant la transformation, le changement de volume est accompagné d'un travail $\int p\,dv$; la pression P étant supposée constante si l'on désigne la variation de volume par V, la quantité de chaleur équivalente sera $\frac{1}{J}$PV.

2° Le changement d'état proprement dit est accompagné d'un travail interne, correspondant au déplacement relatif des molécules et proportionnel au changement de volume dv, $\int f\,dv$; la chaleur correspondante est $\frac{1}{J}\int f\,dv$.

3° Enfin le troisième terme représente la quantité de chaleur nécessaire pour faire passer l'eau de o à t degrés et devrait s'écrire

$$q = \int_0^t c\,dt.$$

Les principales expériences ont eu en vue la détermination de la chaleur latente de vaporisation de l'eau, et les plus importantes ont été faites par Despretz et par Regnault.

313. — APPAREIL DE DESPRETZ.

L'appareil de Despretz (*fig.* 282) comprenait une cornue de verre dont le col relevé s'adaptait au moyen d'un bouchon à l'orifice d'un serpentin plongé dans un calorimètre ; ce serpentin se terminait par une caisse dans laquelle se réunissait l'eau condensée.

Connaissant le poids M du calorimètre réduit en eau, t sa température initiale, θ sa température finale, on détermine d'autre part le

poids p d'eau condensée et la température T d'ébullition ; on écrit alors que la quantité de chaleur gagnée par le calorimètre est égale à la chaleur abandonnée par la vapeur pendant sa condensation augmentée de celle qu'a abandonnée l'eau lorsque sa température s'est

Fig. 282.



abaissée jusqu'à la température finale de l'expérience ; on écrit donc

$$M(\theta - t) = pl + p(T - \theta).$$

Quoique le col de la cornue soit incliné, il arrive qu'une portion de la vapeur se condense avant d'arriver au calorimètre ; elle y pénètre donc à l'état d'eau et ne lui cède plus que la quantité de chaleur représentée par le second terme du deuxième membre de l'équation précédente, terme qui est relativement faible à côté du produit pl ; l'erreur qui résulte de la condensation est donc considérable. D'autre part, la jonction entre le calorimètre et l'appareil à évaporation amène par conductibilité une quantité de chaleur qu'il est difficile d'apprécier. Despretz fut conduit par ces expériences à adopter, pour valeur de la chaleur totale, le nombre 640 ; de quelques expériences faites sous des pressions élevées, il crut pouvoir conclure que la chaleur totale de la vapeur croîtrait avec la température.

D'une façon générale, si l'on opère avec un liquide quelconque dont nous représentons la chaleur spécifique et la chaleur latente de vaporisation par c et l, et si l'expérience est faite de telle sorte que la vapeur soit surchauffée à τ degrés avant d'arriver au calorimètre,

l'équation des échanges de chaleur est plus complète et s'écrit, en désignant par C' la chaleur spécifique de la vapeur,

$$M(\theta - t) = pC'(\tau - T) + pl + pc(T - \theta).$$

Une série d'expériences exécutées avec un même liquide permettra de déterminer successivement les valeurs des coefficients c, l et C'.

314. — EXPÉRIENCES DE REGNAULT.

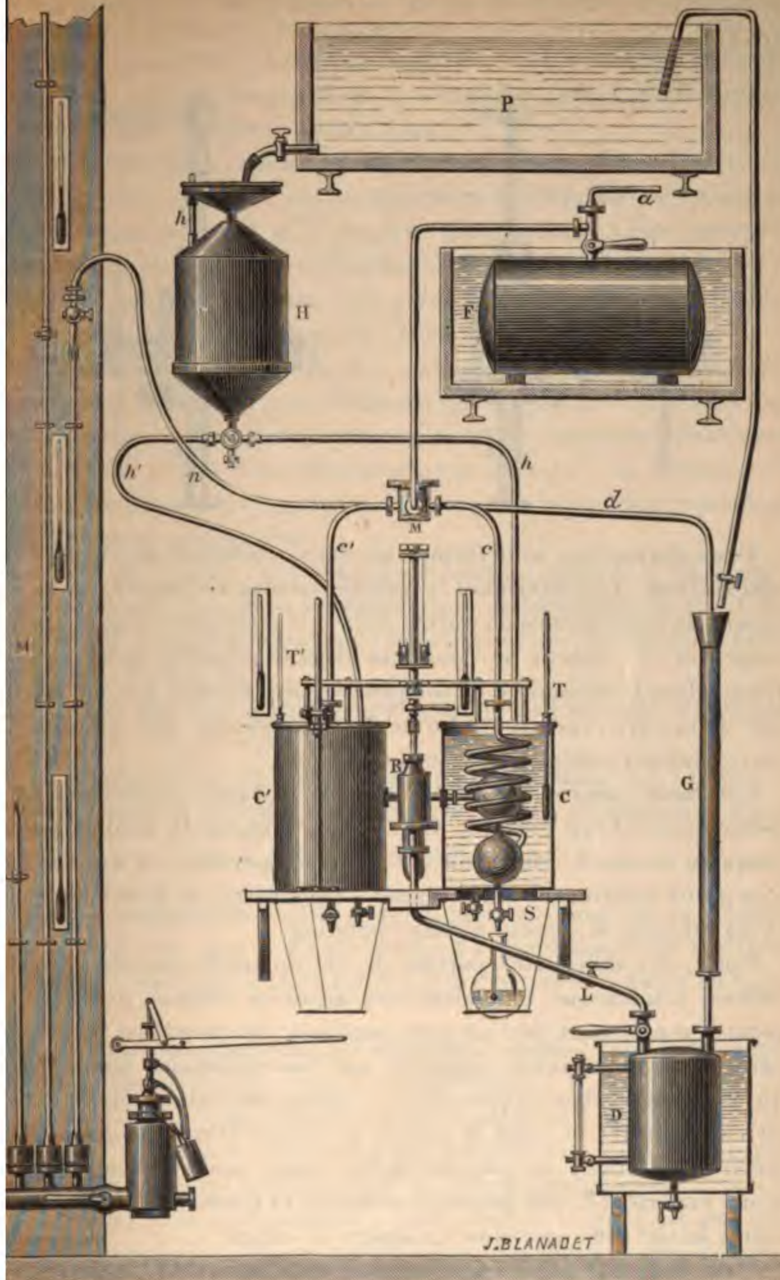
L'appareil de Regnault (*fig.* 283) comprend comme pièces essentielles un générateur à vapeur, qui peut être mis en relation par un robinet de distribution avec deux calorimètres théoriquement identiques ; et comme pièces accessoires, un condenseur, un réservoir à air faisant office d'atmosphère artificielle, une pompe foulante et un manomètre à air libre M.

La chaudière qui n'est pas figurée est une cuve en tôle de 12^{mm} de 300^{l} de capacité renfermant 150^{l} d'eau. La température à son intérieur est donnée par deux thermomètres à mercure soutenus dans des tubes de fer pleins de mercure et qui plongent l'un dans l'eau, l'autre dans la vapeur, et par un thermomètre à air ; le couvercle porte une tubulure qui reçoit un tube de cuivre destiné à conduire la vapeur au robinet distributeur R (*fig.* 283 *bis*). Pour que cette vapeur soit *sèche,* le tuyau ne s'arrête pas au couvercle, il descend dans la chaudière où, sous forme de serpentin, il fait deux tours présentant un développement de 4^{m} ; son orifice se trouve au milieu de la chambre à vapeur. Enfin, pour que la vapeur n'éprouve pas de condensation avant d'arriver aux calorimètres, le tube abducteur A est (*fig.* 283 *bis*) entouré d'un manchon B dans lequel circule de la vapeur qui, provenant de la même chaudière, possède la même température.

Le robinet de distribution permet d'envoyer la vapeur à l'un quelconque des deux calorimètres, ou au condenseur.

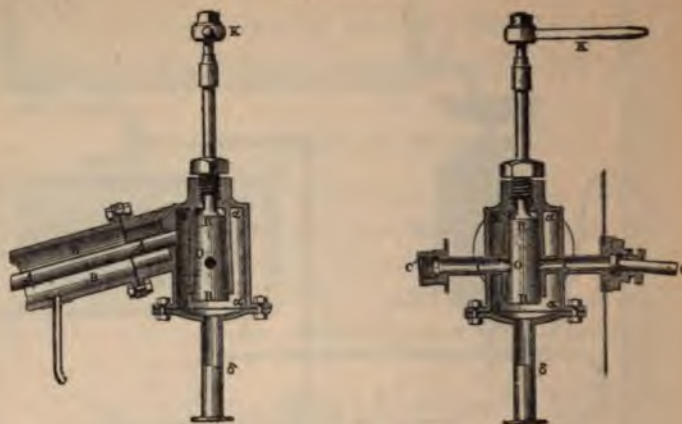
Les deux figures 283 *bis* permettent de comprendre sa construction : il se compose d'une caisse cylindrique $\alpha\alpha$ dans laquelle la vapeur sèche est amenée par le tube A, autour duquel on voit le manchon B ; à la paroi supérieure de cette caisse est soutenu un cylindre servant de boisseau à un robinet R qui a la forme d'une cloche et qui peut se manœuvrer à l'aide du levier K ; la caisse présente trois ouvertures, C, C' et δ ; les deux premières laissent passer des tubes qui, venant des calorimètres, s'ouvrent dans le cylindre intérieur et ne communiquent avec la caisse que si l'ouverture O que porte le robinet est

Fig. 283.



convenablement orientée ; le tube δ est directement ouvert dans la caisse et peut conduire la vapeur au condenseur D ; il porte un robinet L.

Fig. 283 *bis*.



Les calorimètres sont formés de deux cylindres en cuivre rouge, pleins d'eau ; ils renferment les condensateurs de vapeur qui se composent de deux boules en cuivre de 2^{mm} d'épaisseur surmontées d'un serpentin ; la vapeur se condense dans la première boule ; l'eau se réunit dans la seconde d'où on peut la faire écouler par un robinet ; des agitateurs rendent uniforme la température que mesurent les thermomètres plongés dans les vases C et C'.

Ces deux calorimètres sont chargés à chaque expérience d'une même masse d'eau mesurée dans le vase jaugeur H dont le volume, jusqu'au niveau h, est connu à chaque température et qui est muni, à sa partie inférieure, d'un robinet à trois voies ; le réservoir à eau P et les tubes h, h' servent à cette opération.

Enfin, les différentes parties de cet appareil, chaudière, calorimètres, condenseur, pouvaient être mises en relation avec un récipient F renfermant de l'air sous pression : la chaudière directement par le tube a, les autres appareils par l'intermédiaire d'une boîte M qui porte des tubes de jonction c, c' allant aux calorimètres, d allant au condenseur, et enfin le tube n qui réunit le tout au grand manomètre à air libre ; on pouvait établir ainsi, pendant toute la durée d'une expérience, une pression uniforme et constante dont le manomètre faisait avec précision connaître la valeur.

Pour faire une expérience, on comprime dans tout l'appareil, et en particulier dans le réservoir F, de l'air à une pression connue et l'on

fait bouillir l'eau de la chaudière en l'envoyant par le distributeur R directement au condenseur D ; toutes les parties de l'appareil s'échauffent et prennent une température stationnaire après environ quarante-cinq minutes ; la vapeur se forme sous pression constante et, par suite, à une température T constante, que l'on détermine d'ailleurs à l'aide du thermomètre à air.

On introduit dans chaque calorimètre la mesure d'eau froide, on fait marcher les agitateurs et l'on détermine la variation de température des thermomètres T et T′ pendant cinq minutes. Cette variation a une double cause : par conductibilité, il arrive de la chaleur de R à C et C′ ; par rayonnement, l'air étant plus chaud que les calorimètres, la température de ceux-ci s'élève.

On ouvre alors le robinet R pour envoyer la vapeur dans le calorimètre C dont la température s'élève de t_0 à t_1 ; on note le temps que dure l'expérience et les températures des deux calorimètres de minute en minute aux appels d'un chronomètre à sonnerie ; au moment où l'on vient de fermer R on note les variations de température pendant les cinq minutes qui suivent.

On recueille ensuite l'eau condensée dans les sphères et on la pèse ; soit p son poids ; on note sa température de façon que, si elle n'est pas égale à la température t_1 finale du calorimètre, on en puisse tenir compte dans les calculs.

On fait ensuite avec les mêmes précautions une seconde expérience analogue avec le calorimètre C′.

Si M représente la valeur en eau de l'un des calorimètres, l'équation d'où l'on pourrait déduire la chaleur latente de vaporisation serait

$$pL + pC(T - t_1) = MC'(t_1 - t_0).$$

C et C′ représentant les chaleurs spécifiques moyennes de l'eau entre t_1 et T d'une part, t_0 et t_1 d'autre part, et à condition de ne pas tenir compte des corrections à faire subir à la température t_1 finale du calorimètre.

Mais nous avons réuni tous les éléments destinés à cette correction ; voici comment Regnault pensait en faire usage : il estimait que, les deux calorimètres étant identiques au point de vue thermique, l'un servirait à l'expérience calorimétrique proprement dite, tandis que l'autre serait employé à déterminer les effets perturbateurs dus à la conductibilité et au rayonnement ; cette identité n'ayant pas été réalisée, il a dû calculer séparément les effets obtenus avec chaque calorimètre.

En appelant θ l'excès positif ou négatif de la température du calorimètre sur le milieu ambiant, la variation Δt du calorimètre en une minute est, d'après la loi de Newton, représentée par $A\theta$; d'autre part, en une minute, la quantité de chaleur amenée par conductibilité pour une différence constante entre la température de R et celle de C peut se représenter par une constante K ; on peut donc écrire

$$\Delta t = A\theta + K.$$

Les expériences faites pendant les cinq minutes avant et après l'expérience permettent de calculer les valeurs de A et de K qu'il convient d'employer pendant l'expérience.

L'expression $\Sigma\Delta t$ de tous les termes de correction pendant le temps de l'expérience proprement dite devra être retranchée de t_1 et l'on connaîtra alors la vraie température finale qu'aurait présentée le calorimètre si les causes de perturbation n'avaient pas existé.

315. — RÉSULTATS.

Les expériences faites sous la pression de l'atmosphère ont donné comme valeur moyenne de la chaleur totale le nombre 636,67.

Les expériences sous d'autres pressions ont été conduites jusqu'à 14^{atm}, pression qu'il ne fut pas possible de dépasser, à cause des fuites nombreuses qui se déclarèrent et mirent rapidement l'appareil hors d'usage.

Regnault chercha à relier ces résultats par une formule : désignant par λ_t la chaleur totale de vaporisation à t degrés, il est évident que, quelle que soit la loi qui relie ces chaleurs totales avec les températures, on peut toujours, dans les limites de ces expériences, développer numériquement cette loi suivant les puissances ascendantes de t et supposer qu'elle donne

$$\lambda_t = A + Bt + Ct^2 + \ldots.$$

La précision lui parut suffisante, au moyen d'une formule à deux termes, et ayant calculé les valeurs des constantes A et B au moyen des valeurs qu'il avait trouvées pour la chaleur totale aux températures de 100° et 195°, il établit la formule

$$\lambda_t = 606,5 + 0,305\,t,$$

qu'il vérifia et trouva exacte en la comparant aux résultats numériques de ces expériences depuis $+10°$ jusqu'à $+230°$.

Watt admettait que *la quantité de chaleur qu'il faut fournir à 1^kg d'un liquide à 0° pour le transformer en vapeur sous une pression quelconque est constante;* par conséquent, cette quantité serait toujours la même, quelle que soit la température de la vapeur, pourvu que celle-ci soit à l'état de saturation. Cette proposition est connue sous le nom de *loi de Watt* (1783).

Il est facile de voir qu'elle est en contradiction avec les expériences de Regnault ; la loi de Watt s'exprimerait en effet par la relation

$$\lambda = \mathrm{A};$$

or les valeurs de λ, loin d'être constantes, vont en augmentant d'une façon parfaitement régulière, lorsque la température s'élève.

Southern et Creighton, qui firent des expériences sur ce même sujet, en avaient conclu que *la chaleur latente de vaporisation, c'est-à-dire, la chaleur absorbée dans le passage de l'état liquide à l'état gazeux, est constante pour toutes les pressions, et que l'on obtient la chaleur totale en ajoutant à la chaleur latente constante le nombre qui représente la température de la vapeur.* Cette loi est connue sous le nom de *loi de Southern.*

Elle n'est pas plus exacte que la précédente ; si nous écrivons en effet que la chaleur totale λ_t est la somme de la chaleur latente L_t et de la chaleur sensible t indiquée par le thermomètre, nous voyons que

$$\lambda_t = 606,5 + 0,305\,t = L_t + t,$$

d'où l'on déduit

$$L_t = 606,5 - 0,695\,t.$$

La chaleur latente diminue donc avec la température au lieu de rester constante, et elle diminue plus vite que n'augmente le chaleur totale, ce qu'on peut exprimer en disant que la loi de Southern s'écarte encore davantage que la loi de Watt des résultats de l'expérience.

En réalité l'équation qui donne λ_t devrait être écrite

$$\lambda_t = 606,5 + 0,305\,t = L_t + t + 0,00002\,t^2 + 0,0000003\,t^3,$$

d'où l'on tirerait L_t ; mais l'équation simplifiée que nous avons donnée est le plus souvent utilisée dans les applications, concurremment avec l'équation proposée par Clausius

$$L_t = 607 - 0,708\,t.$$

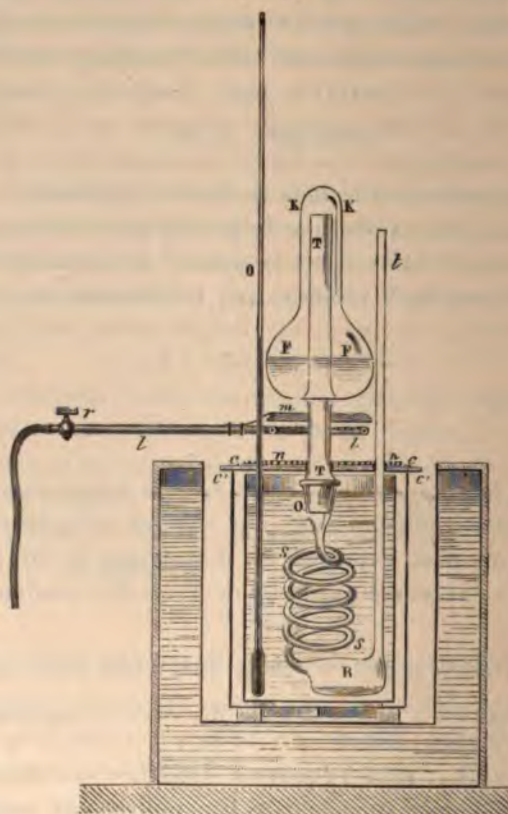
316. — APPAREIL DE M. BERTHELOT.

Dans les appareils précédents, la vapeur est transmise jusqu'au calorimètre, par un tube incliné, ce qui présente deux inconvénients : 1° on s'expose à condenser en partie la vapeur avant son arrivée dans le calorimètre ; 2° on peut échauffer le calorimètre par conductibilité métallique.

M. Berthelot a disposé un appareil dans lequel la vapeur maintenue sèche est précipitée *per descensum* au sein du calorimètre.

La figure 284 représente cet appareil entièrement en verre. FF est

Fig. 284.



une fiole de 100$^{cm^3}$ environ dont le col KK est fermé à la lampe, et dont le centre est traversé par un large tube vertical TT, soudé,

lequel descend à 35^{mm} ou 40^{mm} plus bas ; il s'ajuste avec un serpentin OSSR, plongé dans le calorimètre ; celui-ci est enfermé dans une première enceinte argentée, puis dans une double enceinte en ferblanc remplie d'eau.

Entre la fiole et le calorimètre on interpose une feuille mince de carton c et une plaque de bois c', servant d'écrans, percées pour le passage presque à frottement du tube T, une toile métallique n, une lampe circulaire l, interrompue sur une portion de sa circonférence pour le passage de T, enfin une toile métallique m.

Voici comment on procède : la fiole étant pesée d'abord seule, puis avec le liquide, et la lampe allumée dans une première période destinée à élever la température du liquide on note la marche du thermomètre calorimétrique ; la seconde période est celle de la distillation, qui dure de 2 à 4 minutes en déterminant une élévation de 3° à 4° du calorimètre pour un poids de liquide évaporé s'élevant à 20^{g} ou 30^{g}. On éteint alors le feu, on enlève la fiole, on la bouche, on la laisse refroidir, on la pèse ; ce qui donne le poids exact du liquide vaporisé.

On suit enfin la marche du thermomètre pendant une troisième période jusqu'à ce qu'elle soit devenue régulière.

On possède alors les données nécessaires au calcul de la chaleur latente de vaporisation si l'on connaît la chaleur spécifique du liquide sur lequel on a opéré.

M. Berthelot a employé cet appareil principalement à des mesures de chaleurs latentes de liquides organiques.

317. — CHALEUR LATENTE DE VAPORISATION DES GAZ LIQUÉFIÉS.

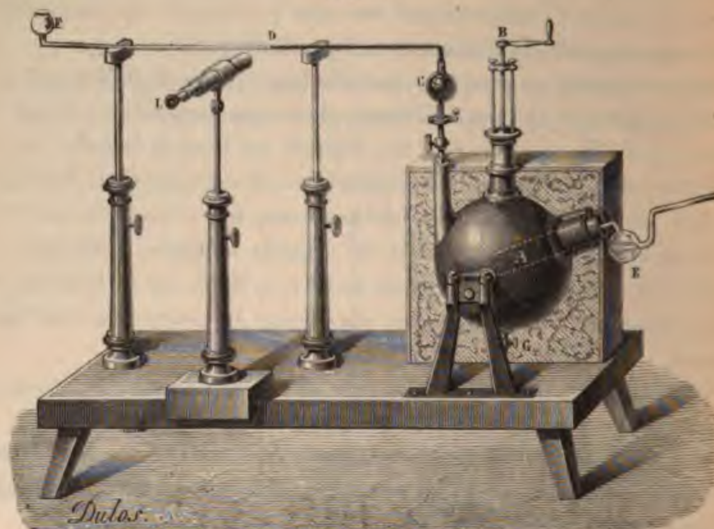
Les expériences sur ces substances présentent des difficultés spéciales qui proviennent de la nature même de ces liquides, des précautions qu'il y a à prendre dans leur manipulation et aussi de ce que l'ébullition est généralement accompagnée d'une détente de la vapeur produite, phénomène qui, tout aussi bien que l'évaporation, est accompagné d'une absorption de chaleur.

Les expériences les plus anciennes sont celles de Favre et Silbermann ; elles ont été exécutées à l'aide de leur calorimètre à mercure.

Cet appareil peut être comparé à un gros thermomètre dans le réservoir duquel seraient logés les corps qui dégagent ou absorbent la chaleur que l'on veut mesurer (*fig.* 285). Il est formé d'un réservoir sphérique en verre ou en fer, plein de mercure et présentant

trois orifices ; sur l'un est la tige du thermomètre : c'est un tube capillaire CD, destiné à mesurer les changements de volume du mercure du réservoir ; le niveau du mercure y est observé à la lunette. La tubulure supérieure reçoit un piston en acier mû par une vis B ; ce piston, en s'enfonçant ou en se relevant, permet d'amener l'extré-

Fig. 285.



mité de la colonne de mercure au zéro de la tige capillaire. Enfin la troisième ouverture porte un tube mince de fer ou de platine fermé à l'une de ses extrémités et qui constitue le *moufle* de l'appareil.

L'instrument est enveloppé dans une caisse en bois renfermant de l'ouate et qui protège la masse de mercure contre les variations brusques de la température ambiante.

Pour graduer cet appareil, on cherche directement la dilatation correspondant à une calorie ; dans ce but, on verse dans le moufle un poids p d'eau bouillante à température T ; elle se refroidit à une température finale t que l'on détermine ; le nombre de calories abandonnées est $p(T-t)$. En divisant par ce nombre la longueur n parcourue dans la tige par le mercure, le quotient exprimerait en millimètres le déplacement correspondant à une calorie dans l'appareil.

Dans les expériences sur l'ébullition des gaz liquéfiés, le corps liquide en expérience s'évaporait librement sous la pression atmosphérique, dans une éprouvette à serpentin plongée dans le moufle

du calorimètre ; le mercure rétrogradait dans le tube thermométrique et, quand la marche en était régulière, on visait le sommet du ménisque et l'on recueillait le gaz ; pour terminer l'expérience, on visait à un moment donné le ménisque et on laissait perdre le gaz. Le retrait de la colonne permettait de calculer le nombre de calories absorbées ; quant au poids du liquide évaporé, on pouvait le déduire du volume du gaz recueilli.

Cette méthode, caractérisée par l'absence de détente, fait connaître la chaleur latente de ces liquides à leur température d'ébullition normale sous la pression atmosphérique.

Plus récemment, cette même question a été reprise par M. James Chappuis, qui a mesuré les chaleurs latentes d'évaporation à 0° et sous la tension maxima de la vapeur à cette température ; l'appareil calorimétrique était le calorimètre à glace de Bunsen : il présentait cet avantage de permettre d'opérer à une température constante bien déterminée. L'expérience était d'ailleurs conduite de façon à éviter également de faire intervenir la détente de la vapeur dans l'expérience, toute correction provenant de ce phénomène étant par trop incertaine.

L'appareil à évaporation se composait d'un réservoir cylindrique en verre, surmonté d'un serpentin terminé par un robinet d'acier à pointe ; la variation de poids p de l'appareil, pendant une expérience, permettait de calculer le poids ϖ de liquide transformé en vapeur, par la relation

$$\varpi = p\,\frac{d\rho}{d\rho - d\nu},$$

$d\rho$ et $d\nu$ étant les poids de l'unité de volume du liquide et de la vapeur à 0° et sous la tension maxima correspondante. On trouve ainsi, pour les chaleurs latentes à 0° :

Chlorure de méthyle........	96,9 cal
Acide sulfureux.............	91,7
Acide carbonique...........	56,25

M. Mathias a étudié la variation de ces mêmes chaleurs de vaporisation jusqu'aux températures critiques.

Nous avons établi la relation

$$l = \frac{T}{J}(u' - u)\frac{dp}{dt}.$$

Elle montre que si la chaleur latente décroît lorsque la température

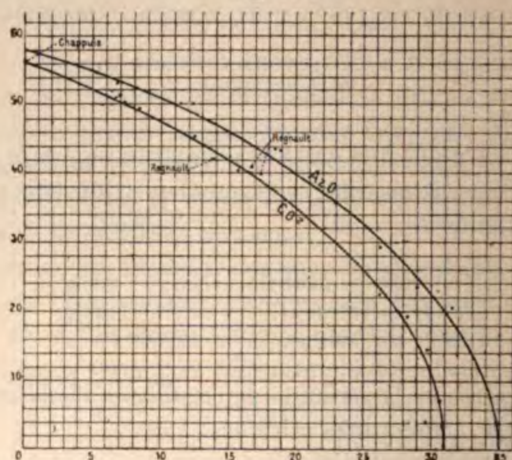
s'élève, elle ne peut s'annuler que lorsque $u' - u$ sera nul, c'est-à-dire, lorsque le liquide et la vapeur qui en provient auront même densité ; la température ainsi définie est la température critique.

Les expériences avaient pour but la vérification de cette conséquence théorique.

M. Mathias a employé le calorimètre à eau ; mais il a été conduit, comme on l'avait été dans les expériences précédentes, à rechercher une méthode où la température du calorimètre demeurât invariable pendant toute l'expérience. A cet effet, il compensait à chaque instant le refroidissement du calorimètre provenant de la vaporisation du liquide, au moyen d'une source de chaleur très exactement connue et qui est celle développée par la dilution dans l'eau du calorimètre d'un poids connu d'acide sulfurique concentré. Cette *méthode de zéro* avait été décrite par Hirn en 1854 et employée pour la première fois par M. d'Arsonval.

Les expériences de M. Mathias sur l'anhydride sulfureux, l'anhydride carbonique et le protoxyde d'azote l'ont conduit à vérifier l'exactitude de la formule de Clapeyron ; en construisant la courbe des chaleurs latentes qui a pour abscisses les températures et pour ordonnées les valeurs de l résultant de l'expérience, on voit que la tangente (*fig.* 286) à la courbe au point critique est perpendiculaire à l'axe

Fig. 286.



des abscisses. On est donc en droit de conclure que, au point critique, la chaleur latente est rigoureusement nulle, et, par suite à la même température, l'égalité $u = u'$ est aussi parfaitement rigoureuse.

318. — PRODUCTION DU FROID.

Toute évaporation, toute ébullition sera, d'après ce que nous venons de voir, accompagnée d'une absorption de chaleur.

L'expérience par laquelle Leslie, en 1810, est parvenu à congeler un globule d'eau par le froid que produit sa propre évaporation est des plus démonstratives. Sous la cloche d'une machine pneumatique, on place un cristallisoir renfermant de l'acide sulfurique concentré ; sur ses bords est soutenue une capsule contenant un peu d'eau ; si l'on vient à faire le vide, l'eau émet des vapeurs qui sont absorbées par l'acide sulfurique et le refroidissement est assez rapide pour que la température descendant au-dessous de zéro l'eau se congèle.

On fait dans l'industrie une application de ces mêmes principes à la fabrication de la glace. M. Carré a disposé une petite machine pneumatique reliée, d'une part, à un cylindre plein d'acide sulfurique dont la surface est renouvelée par des agitateurs, et, d'autre part, à une carafe renfermant de l'eau ; la congélation s'obtient rapidement et on la voit se produire dans l'eau en pleine ébullition.

Mais on s'adresse de préférence aux gaz liquéfiés ou aux liquides très volatils. Les appareils sont composés d'un système de tubes métalliques, plongés dans des cuves renfermant un liquide tel que de l'eau salée, de la glycérine, qui peuvent être refroidis au-dessous de zéro sans se congeler. Ces tubes renferment le liquide dont l'évaporation doit produire le froid et sont reliés avec une pompe aspirante et foulante : le vide y est fait, ce qui détermine une évaporation rapide ; les vapeurs sont refoulées dans des condenseurs, où elles sont ramenées à l'état liquide et d'où l'on peut les envoyer de nouveau dans les tubes à évaporation. De cette façon, on opère théoriquement toujours sur la même masse de liquide ; il n'y a de pertes que celles qui peuvent résulter des fuites. La dépense est donc réduite à la mise en marche de la machine à vapeur qui actionne les pompes ; la dépense qui correspond à une production de glace se chiffre donc par une combustion de houille.

M. Rizet emploie la vaporisation de l'éther sulfurique qui bout à $+37^\circ$; M. Ch. Tellier fait usage de l'éther méthylique qui bout à -31° ; M. R. Pictet évapore l'anhydride sulfureux qui bout à -10°. Dans les laboratoires, on emploie de préférence le chlorure de mé-

thyle ou le protoxyde d'azote suivant l'intensité des effets qu'on se propose d'obtenir.

L'ébullition de l'air liquide et celle de l'hydrogène liquide ont permis de réaliser les températures les plus basses qui aient été atteintes (— 267° C.).



PROPAGATION DE LA CHALEUR.

C'est un fait d'expérience que, lorsqu'on échauffe un corps à une empérature élevée et qu'on le place, soit dans un milieu dont la temérature est inférieure à la sienne, soit au contact de corps à des empératures plus basses, il se refroidit, il perd de la chaleur. Il n'y qu'un moyen d'expliquer cette perte de chaleur, c'est de supposer ue la chaleur du corps considéré a passé sur les corps voisins, soit ar contact immédiat, soit à distance. La propagation de la chaleur xiste donc ; si elle a lieu par contact, elle est lente : c'est la propaation *par conductibilité* ou *conduction*. Elle est infiniment plus pide, si elle a lieu à distance : on dit alors qu'elle se fait *par rayonement*.

La transmission par conductibilité s'effectue dans le cas des corps lides sans qu'il y ait modification des positions relatives des molélles ; si l'échange de chaleur a lieu entre fluides, il y a mélange : les ositions relatives des molécules qui échangent de la chaleur par ntact ne restent plus les mêmes ; enfin si l'échange se produit entre n corps solide et un fluide, les molécules de ce dernier se déplacent contact du solide, il y a *convection*.

CHAPITRE I.

RAYONNEMENT. — LOIS DU REFROIDISSEMENT.

319. — LOI DE NEWTON.

Les premières vues relatives à la perte de chaleur par rayonnement ou aux *lois de refroidissement* se trouvent dans les Opuscules de Newton, en 1701. Ce grand physicien admet, *a priori*, qu'un corps échauffé soumis à une cause constante de refroidissement, doit perdre, dans chaque instant, une quantité de chaleur proportionnelle à l'excès de sa température sur celle de l'air ambiant ; cette hypothèse le conduisit à cette conséquence que : *les excès doivent décroître en progression géométrique, quand les temps croissent en progression arithmétique*.

Soit en effet un corps de poids p, de chaleur spécifique c, placé dans une enceinte à température constante et plus basse ; supposons qu'au début de l'observation, au temps o, l'excès de la température du corps sur celle de l'enceinte étant représenté par A, au temps x, cet excès soit représenté par t, et soit $-dt$ l'abaissement de cet excès de température correspondant à un accroissement $+dx$ du temps.

La quantité dq de chaleur perdue pendant ce temps dx peut être exprimé par l'égalité

$$dq = -pc\, dt.$$

D'autre part, si nous appelons S l'étendue de la surface du corps, E un certain coefficient qui dépend de l'état de cette surface et du milieu ambiant, nous pourrons écrire que dq dépend d'une certaine fonction $f(t)$ de l'excès, ou

$$dq = \mathrm{SE}\, dx f(t);$$

l'hypothèse de Newton consiste à supposer que cette fonction, développée par rapport aux puissances croissantes de t, peut se réduire au terme du premier degré ; il est évident que cette hypothèse sera

d'autant plus probable que l'excès sera plus petit. Nous pouvons donc prévoir que la loi que nous en déduirons ne sera applicable que pour les faibles valeurs de l'excès. On a ainsi une seconde expression de dq :

$$dq = \mathrm{SE}\,t\,dx.$$

Pour un excès constant on voit que l'on a

$$Q = \mathrm{SE}\,tx;$$

la quantité de chaleur perdue est proportionnelle à la surface, au temps et à l'excès t.

En égalant les deux expressions de dq :

$$-pc\,dt = \mathrm{SE}\,t\,dx.$$

Le rapport

$$-\frac{dt}{dx} = \frac{\mathrm{SE}}{pc}t$$

prend le nom de *vitesse de refroidissement ;* on voit que cette vitesse est proportionnelle à l'excès t.

Cette relation peut s'écrire

$$\frac{dt}{t} = -\frac{\mathrm{SE}}{pc}dx$$

et, en intégrant,

$$\mathrm{Log}\,t = -\frac{\mathrm{SE}}{pc}x + \text{const}.$$

Remarquons, pour déterminer la constante, que l'on doit avoir en même temps

$$x = 0, \qquad t = \mathrm{A}.$$

On a donc

$$\mathrm{Log}\,t - \mathrm{Log}\,\mathrm{A} = -\frac{\mathrm{SE}}{pc}x,$$

ou

$$t = \mathrm{A}e^{\frac{\mathrm{SE}}{pc}x},$$

ce qui traduit analytiquement la loi de Newton que nous avons énoncée en langage ordinaire dès le début de cette étude.

Elle fut confirmée expérimentalement par Richmann, d'où le nom de *loi de Richmann* sous lequel elle est également connue.

Cependant, des expériences de Martine, remontant jusqu'au siècle dernier (1740), ont établi que cette loi approchée n'était applicable que pour des différences de température n'excédant pas 40° ou 50°;

Dalton, Delaroche prouvèrent que la température d'un corps qui se refroidit varie, toutes choses égales d'ailleurs, suivant une progression plus rapide que celle indiquée par la loi de Newton.

320. — RECHERCHES EXPÉRIMENTALES DE DULONG ET PETIT.

Dulong et Petit, en 1817, reprirent l'étude de cette question ; le Mémoire classique qu'ils publièrent sur ce sujet est des plus remarquables et nous le reproduirons presque entièrement : on y trouvera, en effet, un véritable modèle de recherches expérimentales.

Méthodes de calcul. — La loi de Newton ne se vérifiant pas exactement lorsque les excès sont supérieurs à 50° à 60°, Dulong et Petit se proposent de représenter la relation entre le temps x et les excès t par une formule plus complexe. La loi de Newton s'écrivant

$$t = A b^{-x},$$

ils se proposèrent d'employer la relation

$$(1) \qquad t = A b^{-\alpha x - \beta x^2}.$$

En déterminant les coefficients b, α et β par des séries d'expériences, on pourra calculer avec une grande approximation la valeur de x correspondant à un excès quelconque t, pourvu que cet excès soit compris dans la portion de la série qui a servi à l'interpolation.

Cette relation permet de déduire l'expression de la vitesse de refroidissement

$$(2) \qquad V = -\frac{dt}{dx} = \text{Log}\, b(\alpha + 2\beta x)t,$$

et, par conséquent, lorsqu'on aura calculé par la formule (1) la valeur de x correspondant à une valeur donnée de t, on pourra calculer V en substituant ces deux valeurs dans l'équation (2) en même temps que l'on donnera aux coefficients b, α et β, les valeurs qui conviennent. En réunissant ainsi un nombre considérable de ces valeurs de V, on pourra espérer en trouver la loi.

321. — EXPÉRIENCES PRÉLIMINAIRES.

Dulong et Petit font d'abord remarquer qu'il y a lieu de distinguer et, par conséquent, d'étudier successivement le refroidissement dans le vide, qui s'effectue entièrement par rayonnement, puis le refroidis-

sement dans l'air ou dans tout autre fluide qui s'effectue plus rapidement, la chaleur transportée dans le fluide par sa conductibilité s'ajoutant à celle que le rayonnement lui enlève. Ainsi, pour la première fois, le phénomène fut analysé ; la chaleur perdue par le corps exposé au refroidissement fut décomposée en *chaleur rayonnée* et *chaleur enlevée au contact* par l'air. La distinction était faite entre le *rayonnement* et le *pouvoir refroidissant* des gaz.

En second lieu, ils font observer que le cas le plus simple à étudier sera celui d'un corps dont on pourra supposer à chaque instant tous les points à la même température ; dans le cas d'un corps solide, la question est beaucoup plus compliquée, la marche du refroidissement comprend, en effet, un élément de plus, savoir, le mode de distribution intérieure de la chaleur qui est une fonction de la conductibilité. Les liquides s'imposaient donc par la nature même du problème.

Par des expériences préliminaires exécutées dans l'air, Dulong et Petit cherchèrent quelle influence peut avoir sur la loi du refroidissement total : 1° la masse du liquide ; 2° sa nature ; 3° la nature de la surface du vase thermométrique dans lequel les liquides seront nécessairement contenus ; 4° la forme de cette surface.

1° **Influence de la masse.** — Ils construisirent trois thermomètres à mercure A, B et C, dont les boules avaient 3^{cm}, 4^{cm} et 7^{cm} de diamètre, et calculèrent les vitesses de refroidissement pour chacun de ces appareils.

Les résultats sont résumés dans le Tableau suivant :

	Vitesses de refroidissement			Rapports	
Excès.	V_A.	V_B.	V_C.	$\frac{V_A}{V_B}$.	$\frac{V_A}{V_C}$.
°	°	°	°		
100............	18,92	8,97	5	2,11	3,78
80............	14,90	6,60	3,67	2,12	3,81
60............	9,58	4,56	2,52	2,10	3,80
40............	5,93	2,80	1,56	2,12	3,80
20............	2,75	1,30	0,73	2,11	3,77

On voit que la vitesse de refroidissement est d'autant plus rapide que le thermomètre est de plus faible masse ; mais, si l'on calcule les rapports $\frac{V_A}{V_B}$ et $\frac{V_A}{V_C}$, on voit que chacun d'eux est constant ; il en résulte que la vitesse de refroidissement varie dans tous les cas suivant la même loi, puisqu'on obtiendra les vitesses de refroidissement d'un thermomètre B en fonction des vitesses de refroidissement du

thermomètre A, en multipliant toutes celles-ci par un facteur constant.

2° **Influence de la nature du liquide.** — Les différents liquides sont, pour ces expériences, enfermés dans un matras en verre au centre duquel est un thermomètre à mercure ; les liquides soumis à la comparaison sont l'eau, l'alcool, l'acide sulfurique et le mercure :

	Vitesses de refroidissement				Rapports		
	V_1.	V_2.	V_3.	V_4.			
Excès.	Mercure.	Eau.	Alcool.	Ac. sulfurique.	$\frac{V_2}{V_1}$.	$\frac{V_3}{V_1}$.	$\frac{V_4}{V_1}$.
60°......	3°,03	1°,39	»	1°,97	0,458	»	0,650
50......	2,47	1,13	»	1,59	0,452	o	0,649
40......	1,88	0,85	1,50	1,22	0,450	0,798	0,646
30......	1,36	0,62	1,09	0,89	0,456	0,801	0,654
20......	0,87	»	0,69	»	»	0,794	»

Les rapports presque constants inscrits dans les dernières colonnes de ce Tableau nous montrent que la loi du refroidissement est sensiblement la même pour les quatre liquides comparés.

3° **Influence de la nature de la surface du vase.** — On a comparé le refroidissement de deux sphères, l'une en verre, l'autre en fer-blanc, toutes deux pleines d'eau :

	Vitesses de refroidissement.		
Excès.	Boule de verre.	Boule de fer-blanc.	Rapport.
60°...............	1°,39	0°,90	1°,54
50...............	1,13	0,73	1,55
40...............	0,85	0,54	1,57
30...............	0,62	0,38	1,63
20...............	0,37	0,21	1,76

Les rapports indiqués dans la dernière colonne ont varié toujours dans le même sens, et montrent que la loi du refroidissement est plus rapide pour la boule de fer-blanc que pour la boule de verre. Il semble donc que la loi du refroidissement change avec la nature de la surface; nous trouverons plus tard une explication très simple de ce fait.

4° **Influence de la forme du vase.** — Dulong et Petit terminèrent ces recherches préliminaires en examinant le refroidissement de l'eau dans trois vases de fer-blanc de même capacité ; le premier, V_1, sphérique ; le second, V_2, cylindrique, ayant une hauteur double du dia-

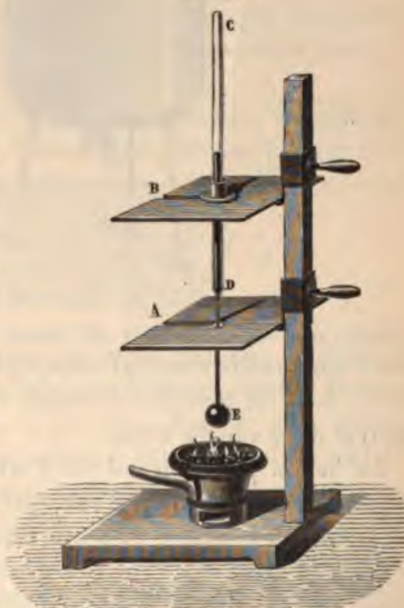
mètre de sa base ; et le troisième, V_3, cylindrique aussi, mais ayant une hauteur moitié de son diamètre :

Excès.	Vitesses de refroidissement V_1.	V_2.	V_3.	Rapports $\frac{V_2}{V_1}$.	$\frac{V_3}{V_1}$.
°	°	°	°		
60..............	0,90	1,11	1,01	1,23	1,12
50..............	0,73	0,89	0,80	1,22	1,10
40..............	0,54	0,66	0,60	1,22	1,11
30..............	0,38	0,47	0,43	1,23	1,13
20..............	0,21	0,26	0,23	1,24	1,10

La loi du refroidissement est donc la même pour les trois vases de formes différentes comme le montrent les rapports inscrits dans les dernières colonnes ; mais, de plus, les rapports trouvés entre les vitesses de refroidissement sont à peu près les mêmes que ceux qui existent entre les surfaces des trois vases, ainsi qu'on s'en assure aisément.

En résumé, la loi du refroidissement d'une masse liquide variable avec l'état de la surface qui lui sert d'enveloppe est néanmoins indépendante de la nature de ce liquide, de la forme et de la grandeur du vase qui le contient.

Fig. 287.



322. — APPAREILS.

L'appareil dont on suit le refroidissement est un thermomètre à mercure. Pour les températures élevées on employait un thermomètre dont le réservoir de 6^{cm} de diamètre contenait environ 1500^{g} de mercure ; pour les températures basses on se servait d'un thermomètre plus petit de 2^{cm} de diamètre, afin d'abréger les expériences. D'après les principes que nous venons d'établir, on pouvait déduire les vitesses de refroidissement du grand thermomètre à toutes les températures en multipliant celles observées avec le plus petit par un facteur constant, et inversement.

Entre le réservoir et la tige graduée (*fig.* 287) se trouvait un long tube capillaire destiné à empêcher des courants de liquide de s'établir entre la boule et la tige.

L'enceinte à température constante, dans laquelle ce thermomètre devait se refroidir, était formé d'un grand ballon de cuivre mince d'environ 30^{cm} de diamètre (*fig.* 288) dont les parois intérieures

Fig. 288.



étaient couvertes de noir de fumée ; il était soutenu par des traverses dans une grande cuve cylindrique en bois pleine d'eau, sorte de tonneau, dont on pouvait facilement élever la température en y faisant arriver de la vapeur d'eau.

Le ballon porte un col sur l'orifice duquel est une plaque percée de plusieurs trous ; l'un d'eux, qui est au milieu, permet de soutenir, à l'aide d'un bouchon et à une hauteur convenable, le thermomètre soumis à l'expérience ; les autres sont destinés à la circulation du gaz ; enfin sur ce col est fixée hermétiquement une sorte de cloche de verre qui entoure la tige du thermomètre. Une tubulure latérale à robinet met cette enceinte en relation par l'intermédiaire de tubes métalliques avec une machine pneumatique et des réservoirs à gaz.

Marche d'une expérience. — L'eau du tonneau étant portée à une température convenable que l'on maintenait par un courant de vapeur réglé à cet effet, on chauffait le thermomètre, en protégeant sa tige par des écrans en fer-blanc (*fig.* 287), presque jusqu'à la température d'ébullition du mercure ; puis on le transportait rapidement dans le ballon ; la tige capillaire était d'une telle longueur que la boule se trouvait au centre de l'enceinte.

On lutait les surfaces de contact, on fermait l'appareil et l'on faisait rapidement le vide ; si le refroidissement devait y être observé, il suffisait de fermer alors les robinets ; si le refroidissement devait être observé dans un gaz, on en remplissait plusieurs fois de suite l'enceinte, de façon à rendre la proportion d'air inappréciable.

On observait alors, à l'aide d'une montre à secondes et à des intervalles égaux, la température du thermomètre qui devait subir les corrections suivantes : 1° correction résultant de ce fait que la tige était à la température ambiante ; 2° correction ayant pour but de ramener les indications du thermomètre à mercure à celles du thermomètre à air ; 3° correction résultant de ce que le refroidissement du thermomètre est accéléré par la rentrée du mercure froid qui passe de la tige de l'instrument dans le réservoir ; le volume de ce mercure et sa température étant connus, on évaluait facilement cette dernière correction.

On appliquait alors, à la série de nombres ainsi obtenue, le mode de calcul que nous avons indiqué, et l'on en déduisait les valeurs des vitesses de refroidissement, que nous désignerons, dans la suite, sous le nom de *vitesses observées*.

323. — REFROIDISSEMENT DANS LE VIDE.

Ces expériences ne peuvent malheureusement pas être effectuées dans un vide absolu, mais bien dans une atmosphère gazeuse possédant une tension qui ne s'élevait, il est vrai, dans le plus grand nombre d'expériences, qu'à 2^{mm} ; les résultats étaient donc de ce fait affectés d'une faible erreur qu'il y avait cependant lieu de corriger. Il suffisait pour cela de diminuer les vitesses observées de la vitesse de refroidissement correspondant à la chaleur enlevée par l'air resté dans le ballon. Ce sont donc les expériences faites dans les gaz sous diverses pressions qui ont permis de calculer cette correction.

Les résultats des expériences faites en vue de déterminer la loi du refroidissement, c'est-à-dire l'influence de la température de l'en-

ceinte et de l'excès de température t du corps chaud sur l'enceinte sont résumés dans le Tableau ci-dessous.

Influence de la température θ de l'enceinte. — La seule inspection de ce Tableau permet d'énoncer la loi du refroidissement relative à la température θ de l'enceinte :

EXCÈS.	$\theta = 0$. $\overline{V}_1$		$\frac{V_2}{V_1}$.	$\theta = 20$. $\overline{V}_2$		$\frac{V_3}{V_2}$.	$\theta = 40$. $\overline{V}_3$		$\frac{V_4}{V_3}$.	$\theta = 60$. $\overline{V}_4$		$\frac{V_5}{V_4}$.	$\theta = 80$. $\overline{V}_5$	
	obs.	calc.		obs.	calc.		obs.	calc.		obs.	calc.		obs.	calc.
240°....	10,69	10,68	1,16	12,40	12,46	1,16	14,35	14,44	»	»	»	»	»	»
220....	8,81	8,89	1,18	10,41	10,36	1,15	11,98	12,06	»	»	»	»	»	»
200....	7,40	7,34	1,16	8,58	8,56	1,16	10,01	9,97	1,15	11,64	11,61	1,15	13,45	13,51
180....	6,10	6,03	1,15	7,04	7,01	1,16	8,20	8,17	1,16	9,55	9,52	1,15	11,05	11,09
160....	4,89	4,87	1,16	5,67	5,68	1,17	6,61	6,62	1,16	7,68	7,71	1,16	8,95	8,98
140....	3,88	3,89	1,17	4,57	4,54	1,16	5,32	5,29	1,15	6,14	6,16	1,17	7,19	7,18
120....	3,02	3,05	1,17	3,56	3,56	1,17	4,15	4,14	1,17	4,84	4,82	1,16	5,64	5,61
100....	2,30	2,33	1,18	2,74	2,72	1,15	3,16	3,17	1,16	3,68	3,69	1,17	4,29	4,30
80....	1,71	1,72	1,15	1,99	2,00	1,16	2,30	2,33	1,18	2,73	2,71	1,17	3,18	3,16
60....	»	»	»	1,40	1,38	1,16	1,62	1,61	1,16	1,88	1,87	1,15	2,17	2,18

La vitesse de refroidissement d'un thermomètre dans le vide pour un excès de température constant croît en progression géométrique, lorsque la température de l'enceinte croît en progression arithmétique. La raison de cette progression géométrique est la même, quel que soit l'excès considéré.

C'est ce que montre en effet la comparaison des valeurs de V_1, V_2, ..., contenues sur une même ligne horizontale et le calcul des rapports $\frac{V_2}{V_1}$, $\frac{V_3}{V_2}$, ... correspondants. Ces rapports sont constants, les vitesses croissent donc en progression géométrique quand les valeurs de θ : 0, 20, 40, ... croissent en progression arithmétique.

D'autre part le Tableau montre que, quel que soit l'excès, on trouve toujours le même rapport moyen 1,165, qui est la raison de la progression géométrique.

Représentons par $\varphi(t)$ la vitesse de refroidissement correspondant à un excès t, lorsque l'enceinte est à la température 0, et soit a la raison de la progression géométrique qui permettra de calculer les vitesses de refroidissement pour des températures de l'enceinte en

progression arithmétique :

$$0^\circ,\quad 20^\circ,\quad 40^\circ,\quad 60^\circ,\quad \ldots,\quad \theta^\circ.$$

Les valeurs correspondantes de la progression que forment les vitesses seront

$$a^0\varphi(t),\quad a^{20}\varphi(t),\quad a^{40}\varphi(t),\quad \ldots,\quad a^\theta\varphi(t).$$

La loi qui se rapporte à la variation de température de l'enceinte permet donc d'exprimer la vitesse de refroidissement par la formule

$$v = a^\theta\varphi(t).$$

La raison a de la progression est donnée dans le Tableau pour le thermomètre employé ; on a en effet

$$a = \sqrt[20]{1,165} = 1,0077.$$

Influence des excès t. — Dulong et Petit ne firent pas d'autres expériences pour trouver l'influence des excès t dans la loi du refroidissement.

Ils adoptèrent une théorie générale des échanges de chaleur qui est la suivante : en même temps que le corps chaud rayonne de la chaleur, et de ce fait en perd, l'enceinte, quoique plus froide, rayonne aussi de la chaleur vers le corps chaud, qui de ce fait en gagne, de sorte que la vitesse de refroidissement observée est en réalité la somme algébrique d'une *vitesse de perte de chaleur* par rayonnement et de ce que l'on pourrait appeler une *vitesse de gain de chaleur* sous l'action de l'enceinte.

Cette théorie admise, ils firent les deux hypothèses suivantes :

1° La vitesse avec laquelle la chaleur se perd est uniquement fonction de la température $\theta + t$ du thermomètre, et la vitesse avec laquelle la chaleur est gagnée fonction de la température θ de l'enceinte.

2° La forme de ces deux fonctions est la même.

On pourra donc représenter la vitesse de refroidissement par l'expression

$$v = F(\theta + t) - F(\theta),$$

et, d'après les expériences que nous avons décrites, on aura

$$v = F(t + \theta) - F(\theta) = \varphi(t)a^\theta.$$

Faisons $\theta = 0$,

$$F(t) - F(0) = \varphi(t)a^\theta,$$

et en retranchant

$$F(t+\theta)-F(\theta)-F(t)+F(o)=\varphi(t)(a^\theta-1).$$

Changeant θ en t et réciproquement,

$$F(t+\theta)-F(t)-F(\theta)+F(o)=\varphi(\theta)(a^t-1),$$

et en divisant membre à membre

$$\frac{\varphi(t)}{a^t-1}=\frac{\varphi(\theta)}{a^\theta-1}.$$

Désignons par m ce rapport constant, on voit que

$$\varphi(t)=m(a^t-1),$$

et, puisque

$$v=\varphi(t)a^\theta,$$

il en résulte que la loi des vitesses de refroidissement dans le vide s'exprime par la relation

$$(3)\qquad v=ma^\theta(a^t-1);$$

la température du corps étant $T=\theta+t$, cette équation peut s'écrire

$$v=m(a^T-a^\theta).$$

Pour vérifier l'exactitude des hypothèses qui ont permis d'établir cette loi, il ne restait plus qu'à comparer, aux différentes séries des *vitesses observées* contenues dans le Tableau, les valeurs des *vitesses calculées* pour les mêmes valeurs de t et de θ à l'aide de cette dernière formule. Cette comparaison, qui se trouve faite dans le Tableau précédent, conduit, comme on peut le voir, à des résultats très satisfaisants.

Influence de la nature de la surface. — Dulong et Petit recommencèrent alors dans le vide les expériences sur l'influence de la nature de la surface, en remplaçant la boule nue par une boule argentée, et constatèrent qu'il y avait proportionnalité dans les vitesses correspondant à des valeurs identiques de t et de θ, ce qui montre que la loi du refroidissement est la même ; la constante m change donc seule de valeur dans la formule que nous venons d'établir et qui représente bien la loi du refroidissement dans le vide pour une étendue de près de 300° de l'échelle thermométrique et pour tous les corps.

On peut déduire de l'expression de la vitesse de refroidissement dans le vide la relation qui lie la température aux temps. On a, en effet,

$$v = -\frac{dt}{dx} = ma^{\theta}(a^{t} - 1)$$

ou

$$dx = \frac{-dt}{ma^{\theta}(a^{t} - 1)},$$

et, en intégrant,

$$x = \frac{1}{ma^{\theta}\,\mathrm{Log}\,\alpha}\,\mathrm{Log}\,\frac{a^{t} - 1}{a^{t}} + \mathrm{const.}$$

324. — EXPÉRIENCES SUR LE REFROIDISSEMENT DANS L'AIR ET DANS LES GAZ.

Les lois du refroidissement dans le vide étant connues, rien n'est plus simple que de séparer du refroidissement total d'un corps environné d'air ou d'un autre gaz la portion de l'effet due au contact du fluide ; il suffit évidemment pour cela de retrancher, des vitesses de refroidissement réelles, celles qui auraient lieu si, toutes choses égales d'ailleurs, le corps était placé dans le vide. Cette soustraction peut aisément s'opérer, maintenant que nous avons une formule qui nous permet de calculer ces vitesses dans tous les cas. Nous pourrons donc déterminer le pouvoir refroidissant du gaz, tel qu'on l'observerait si le corps était privé de la faculté de rayonner.

Représentons par V la vitesse totale de refroidissement; par v et u les parties de cette vitesse dues au refroidissement dans le vide et au refroidissement par le gaz. On a

$$V = v + u.$$

Les formules (1) et (2) permettent de calculer V, la formule (3) donnera v, et l'on connaîtra par conséquent u.

Cette vitesse u peut dépendre : 1° de l'état de la surface du corps qui se refroidit; 2° de la température θ de l'enceinte ; 3° des pressions p du gaz ; 4° des excès t de la température du corps chaud sur l'enceinte ; enfin de la nature même du gaz.

Influence de la nature de la surface. — On observa la vitesse de refroidissement du même thermomètre à boule nue et à boule argentée sous la pression de 700^{mm} et à 20°.

Le Tableau suivant résume les expériences :

	Valeurs de u. Air.	
	Boule nue.	Boule argentée.
200°	5,48	5,43
180	4,75	4,79
160	4,17	4,19
140	3,51	3,52
120	2,90	2,88
100	2,27	2,32

Des expériences faites dans l'hydrogène donnèrent un résultat analogue.

On voit que les pertes de chaleur dues au contact d'un gaz sont indépendantes de la nature de la surface qui se refroidit ; il résulte donc des trois séries d'expériences faites sur ce sujet que V varie avec la nature de la surface uniquement parce que le coefficient m de v change, mais que les formes des fonctions v et u ne dépendent pas de cette variable.

Influence de la température θ de l'enceinte. — On fit ensuite varier la température du gaz en le laissant se dilater de façon qu'il conservât, dans chaque cas, la même pression de 720^{mm}.

On obtint avec l'air les résultats suivants :

	Valeurs de u aux températures de l'enceinte.			
Excès.	$\theta = 20$.	$\theta = 40$.	$\theta = 60$.	$\theta = 80$.
200°	5,48	5,46	»	»
180	4,75	4,70	4,79	»
160	4,17	4,16	4,20	4,13
140	3,51	3,55	3,55	3,49
120	2,90	2,90	2,91	2,88
100	2,27	2,28	2,24	2,25
80	1,77	1,73	1,71	1,78
60	1,23	1,19	1,18	1,20

Les vitesses de refroidissement restèrent les mêmes pour les mêmes excès, quelle que fût la température de l'enceinte.

Des expériences faites avec l'hydrogène, l'acide carbonique, conduisirent à des résultats analogues.

Ainsi le pouvoir refroidissant d'un gaz ne peut plus dépendre que de la nature du gaz, de sa pression et de l'excès t.

Influence de la pression. — Dulong et Petit, pour fixer l'influence de la pression dans la loi des vitesses u du refroidissement par les gaz, firent une série d'expériences, avec l'air d'abord, sous des pressions variant en progression arithmétique décroissante, dont le premier terme était 720^{mm} et la raison $\frac{1}{2}$.

Les résultats en sont résumés dans le Tableau suivant :

	Vitesses de refroidissement aux pressions					Rapport	
	720.	360.	180.	90.	45.		
Excès.	u_1.	u_2.	u_3.	u_4.	u_5.	$\frac{u_1}{u_2}$.	$\frac{u_4}{u_5}$.
200°.........	5,48	4,01	2,95	2,20	1,59	1,37	1,38
180.........	4,75	3,52	2,61	1,90	1,37	1,35	1,38
160.........	4,17	3,03	2,21	1,62	1,20	1,37	1,35
140.........	3,51	2,62	1,91	1,40	1,02	1,34	1,37
120.........	2,90	2,12	1,57	1,15	0,84	1,37	1,36
100.........	2,27	1,69	1,23	0,90	0,65	1,34	1,37
80.........	1,77	1,29	0,96	0,70	0,52	1,37	1,35
60.........	1,23	0,90	0,65	0,48	0,35	1,36	1,32

Nous n'avons reproduit que les valeurs des rapports $\frac{u_1}{u_2}$ et $\frac{u_4}{u_5}$ correspondant aux pressions extrêmes; les rapports intermédiaires restent, comme ceux-ci, constants.

Ce rapport reste constamment égal à la valeur moyenne 1,366, quelle que soit la pression de l'air. Il en résulte donc que, *lorsque la pression de l'air varie en progression géométrique, la vitesse de refroidissement varie aussi en progression géométrique*.

Cherchons l'expression analytique de cette loi : Soient u' et p' la plus petite vitesse et la plus faible pression, α et β les raisons des progressions géométriques que forment ces vitesses et ces pressions. Les termes de rang n sont donnés par les relations

$$p = p'\beta^n, \qquad u = u'\alpha^n;$$

prenons les logarithmes, il vient

$$\log\frac{u}{u'} = n\log\alpha, \qquad \log\frac{p}{p'} = n\log\beta.$$

Divisons membre à membre, n disparaît, et le rapport des logarithmes de α et de β étant constant, si nous le représentons par b, il vient

$$\frac{\log\frac{u}{u'}}{\log\frac{p}{p'}} = b,$$

ce qui peut s'écrire

$$u = \frac{u'}{(p')^b} p^b.$$

Le facteur constant $\frac{u'}{(p')^b}$ est fonction de l'excès et de la nature du gaz ; nous pouvons le représenter par $\varphi(G, t)$; la loi s'exprime alors par la relation

$$u = \varphi(G, t) p^b.$$

L'hydrogène, l'acide carbonique, soumis aux mêmes expériences, ont conduit à des résultats analogues ; les valeurs des raisons des progressions géométriques que formaient les vitesses étaient seules changées et, par conséquent, la valeur de b dans l'équation varie avec la nature du gaz.

On peut calculer facilement la valeur de cet exposant ; pour l'air, on a, en particulier,

$$b = \frac{\log \alpha}{\log \beta} = \frac{\log 1,366}{\log 2} = 0,45.$$

Les valeurs de cet exposant calculées de la même façon pour les autres gaz, on peut en dresser ainsi la liste :

Air	0,45
Hydrogène	0,38
Acide carbonique	0,517
Gaz oléfiant	0,501

Influence des excès t. — L'étude de ce cas a conduit Dulong et Petit à l'énoncé d'une loi analogue à la précédente, c'est-à-dire que la vitesse de refroidissement croît en progression géométrique lorsque les excès de température du corps croissent eux-mêmes en progression géométrique.

La forme de la fonction qui exprimera cette loi sera donc la même que dans le cas précédent et en désignant par c une constante, la loi de refroidissement s'écrira

$$(4) \qquad u = n p^b t^c,$$

n étant fonction de la nature du gaz.

L'exposant c se calculerait comme précédemment nous avons calculé b ; sa valeur a été trouvée égale à

$$c = 1,233 ;$$

elle est indépendante de la nature du gaz, tandis que la constante n en dépend.

Nous pouvons maintenant écrire l'expression de la vitesse de refroidissement totale V, puisque nous avons appris à former les deux termes v et u de cette fonction, qui se présente définitivement sous la forme

$$V = ma^{\theta}(a^{t}-1) + np^{b}t^{c}. \tag{5}$$

L'énoncé de cette loi en langage ordinaire est inutile autant que compliqué, l'énoncé mathématique (5) qu'en ont donné Dulong et Petit permet d'ailleurs d'en discuter toutes les conséquences.

Ce n'est du reste pas, comme les lois de Gay-Lussac ou de Mariotte, une loi naturelle, mais bien plutôt la représentation analytique la plus simple de faits expérimentaux observés dans des conditions particulières.

325. — REVISION DES LOIS DE DULONG ET PETIT.

En 1846, MM. de la Provostaye et Desains soumirent à une revision minutieuse le travail de Dulong et Petit. Leurs expériences furent exécutées, non plus dans une enceinte toujours la même, mais dans des sphères de 24^{cm} et 15^{cm}, puis dans des cylindres de 6^{cm} sur 20^{cm}, et la loi du refroidissement ne fut pas trouvée la même dans ces différentes enceintes.

Aux pressions élevées seulement, on la retrouve toujours telle que l'avaient énoncée Dulong et Petit ; mais, à partir d'une certaine valeur de la pression, le refroidissement s'en montra indépendant et cela dans des limites qui dépendent de l'enceinte (6^{mm} et $2^{mm},8$ pour la sphère de 24^{cm}, 70^{mm} et 15^{mm} pour le cylindre). Dans une expérience faite avec l'acide carbonique, le refroidissement a même augmenté, la température diminuant.

Des expériences de M. Witz, effectuées à des pressions supérieures à la pression atmosphérique, ont montré que, dans cette direction encore, on rencontrait, vers la pression de 1200^{mm}, une limite à la loi de Dulong et Petit, tout en restant à peu près dans les mêmes conditions expérimentales que ce physicien.

M. Crookes, dans ses recherches sur les propriétés des gaz très raréfiés, s'est occupé aussi de leur pouvoir refroidissant. Une boule de verre renfermant un thermomètre est plongée brusquement dans l'eau à $+50^{\circ}$; on observe, non plus le refroidissement, mais le ré-

chauffement du corps. Les résultats obtenus par M. Crookes montrent que, à des pressions de quelques millièmes de millimètre seulement, l'air possède encore un pouvoir refroidissant considérable.

MM. Jamin et Richard employèrent une méthode très différente des précédentes. Le corps soumis à l'expérience est un fil de platine placé au milieu d'un grand ballon de verre, échauffé par un courant électrique et observé dans un état stationnaire. Le gaz renfermé dans le ballon prend, sous l'influence de cet échauffement, un excès de température qui se traduit par une augmentation de pression. Des expériences préliminaires permettaient de déduire de cette augmentation de pression la quantité de chaleur que le gaz cédait à l'enceinte ou qu'il recevait du fil; la température de ce dernier se déduisait de sa résistance électrique. La pression du gaz a varié, dans ces expériences, de 815^{mm} à 74^{mm}; en supposant l'excès de température proportionnel à l'accroissement de résistance, ce qui, pour le platine, ne s'éloigne pas beaucoup de la vérité, on retrouve la formule $np^b t^c$ de Dulong et Petit, dans laquelle les coefficients ont les valeurs suivantes :

	Acide carbonique.	Air.	Hydrogène.
a..............	0,922	2,57	26,7
b..............	0,37	0,44	0,42
c..............	1,17	1,28	1,30

M. Ch. Rivière a employé une méthode analogue à cette dernière et a cherché surtout à opérer entre des limites beaucoup plus éloignées de température et de pression.

Il a pu estimer la quantité de chaleur perdue dans le vide absolu, dans des conditions expérimentales absolument différentes de celles où s'étaient placés Dulong et Petit.

La comparaison de ses résultats avec ceux que permet de calculer la formule

$$v = ma^{\theta}(a^t - 1)$$

est donnée dans le Tableau suivant :

Excès.	Quantités de chaleur observées.	Quantités de chaleur calculées.	Excès.	Quantités de chaleur observées.	Quantités de chaleur calculées.
0°.....	0	0	400°.....	1650	1613
50.....	37	36,7	500.....	3150	3565
100.....	92	90,7	600.....	5900	7768
150.....	170	170	700.....	10000	16820
200.....	279	286,2	800.....	15950	36310
250.....	442	456,8	900.....	24050	78280
300.....	690	707	1000.....	35000	168664

La seconde colonne contient les quantités de chaleur rayonnée observées; on a placé en regard les valeurs calculées de l'expression $ma^\theta(a^t - 1)$, a étant égal à 1,0077 et le coefficient constant ma^θ choisi de telle sorte que la valeur calculée fût égale à la valeur observée pour l'excès $t = 150°$.

On voit que la loi de Dulong et Petit suffit jusqu'à 400° environ; à partir de cet excès les nombres calculés à l'aide de leur formule croissent beaucoup trop vite.

L'étude du pouvoir refroidissant des gaz a conduit M. Rivière à faire sur la seconde partie du travail de Dulong et Petit des réserves analogues. La loi relative à l'influence de la pression et représentée par la formule

$$u = np^b t^c$$

se vérifie assez bien jusqu'à des pressions voisines de 3^{mm} au-dessous desquelles les quantités de chaleur décroissent plus vite que ne l'indiquerait une formule exponentielle.

D'autre part, la loi du refroidissement n'est pas indépendante de la température.

Enfin M. Rivière, en comparant entre elles les quantités de chaleur qu'enlèvent dans les mêmes conditions trois gaz : l'air, l'acide sulfureux et l'hydrogène, c'est-à-dire en évaluant leur pouvoir relatif, arrive à cette conclusion que, sous de très faibles pressions, il y a identité des pouvoirs refroidissants de ces gaz.

Toutes les recherches que nous avons citées et qui avaient en vue l'étude du pouvoir refroidissant des gaz ont été faites sans que leurs auteurs se soient préoccupés d'analyser le mécanisme du refroidissement par les gaz, et d'y distinguer, d'une part, la conductibilité pour la chaleur, analogue à celle des solides, et, d'autre part, le refroidissement qu'entraînent les courants gazeux, ces courants de convection qui prennent si facilement naissance dans les fluides, et qui rendent très délicate la séparation entre les deux effets simultanés de ces deux causes de refroidissement.

326. — FORMULES DE PÉCLET.

Le problème industriel qui se rattache à ces questions théoriques et qui se pose le plus souvent est le suivant : une canalisation maintenue à température constante rayonne de la chaleur dans une enceinte dont on désire maintenir également la température constante; c'est la méthode la plus ordinaire de chauffage.

Or les formules établies ne se prêtent pas directement au calcul des quantités de chaleur.

Désignons par q la perte de chaleur subie par un corps, par unité de surface et par unité de temps; et supposons le corps de poids P, de chaleur spécifique C et de surface S; la perte Q pendant le temps x peut s'exprimer par le produit qSx et aussi par le produit $PCVx$, V étant la vitesse de refroidissement constante, puisque t et θ sont invariables (rapport d'une différence de température à un temps); on peut donc écrire

$$Q = qSx = PCVx$$

et, d'après la formule de Dulong et Petit,

$$Q = qSx = PC[m a^{\theta}(a^{t} - 1) + n p^{b} t^{c}]x.$$

La formule

$$V = \frac{S}{PC} q$$

devant se vérifier pour toutes les valeurs de t et de θ, les coefficients m et n doivent être proportionnels à $\frac{S}{PC}$ et l'on doit pouvoir les écrire

$$m = \frac{S}{PC} A, \qquad n = \frac{S}{PC} B;$$

d'où

$$Q = S[A a^{\theta}(a^{t} - 1) + B p^{b} t^{c}]x.$$

Dulong et Petit n'ont pas fait connaître les valeurs absolues de A et de B. C'est Péclet qui les a déterminées par la méthode suivante :

Il laissait refroidir une sphère de laiton dont la surface était alternativement polie et couverte de noir de fumée; soient Q_1 et Q_2 des quantités totales de chaleur perdues pendant le même temps; elles se composent des quantités R_1 et R_2 de chaleur rayonnée et de la quantité F perdue par convection qui est la même dans les deux cas; on pourrait donc écrire

$$Q_1 = R_1 + F,$$
$$Q_2 = R_2 + F$$

et

$$Q_1 - Q_2 = R_1 - R_2.$$

Péclet comparait alors le rayonnement de ces mêmes surfaces de laiton poli ou couvert de noir de fumée, en recevant ce rayonnement

sur une pile thermo-électrique, ce qui lui donnait le rapport

$$\frac{R_2}{R_1} = 15,5.$$

Ce système d'équations résolu par rapport à R et F conduisit Péclet aux deux formules

$$R = Srt(1 + 0,0056t)x,$$
$$F = Sft(1 + 0,0075t)x,$$

dans lesquelles r et f sont les coefficients de radiation et de convection; d'où

$$Q = St[r(1 + 0,0056t) + f(1 + 0,0075t)]x.$$

Les résultats numériques auxquels conduit cette formule sont équivalents à ceux que donne la formule de Dulong et Petit si l'on pose, pour le cas d'une enceinte occupée par l'air à la pression ordinaire,

$$A = 124,72r \quad \text{et} \quad Bp^{0,45} = 0,552f;$$

l'équation s'écrit alors

$$Q = S[124,72ra^{\theta}(a^t - 1) + 0,552ft^{1,233}]x.$$

Les unités adoptées dans ces formules sont : le mètre carré, l'heure et la grande calorie.

Voici les valeurs du coefficient r pour quelques substances :

Argent poli	0,13	Fonte oxydée	3,36
Cuivre rouge	0,16	Pierre et plâtre	3,60
Laiton poli	0,24	Bois	3,60
Zinc	0,24	Peinture à l'huile	3,71
Charbon incandescent	0,30	Papier	3,77
Tôle polie	0,45	Étoffes	3,70
Tôle ordinaire	2,77	Noir de fumée	4,00
Verre	2,91	Eau	5,31
Fonte	3,17	Huile	7,24
Tôle oxydée	3,36		

Quant aux coefficients f de convection, ils dépendent de la forme du corps; de nombreuses expériences ont conduit Péclet aux formules suivantes :

Sphère de rayon ρ .... $f = 1,778 + \frac{0,13}{\rho}$

Cylindre horizontal à base circulaire de rayon ρ .... $f = 2,058 + \frac{0,0382}{\rho}$

Cylindre vertical de rayon ρ et de hauteur h .... $f = \left(0,726 + \frac{0,0345}{\sqrt{\rho}}\right)\left(2,43 + \frac{0,8758}{\sqrt{h}}\right)$

Surface plane verticale de hauteur h .... $f = 1,764 + \frac{0,635}{\sqrt{h}}$

Pour faciliter les calculs numériques, on transforme les formules de Dulong et Petit en posant

$$\mu t = 124,72 a^{\theta}(a^t - 1),$$
$$\nu t = 0,552 t^{1,233};$$

on a alors

$$Q = S(\mu r + \nu f) t x,$$

et en posant

$$\mu r + \nu f = h,$$

qu'on appelle le *coefficient de conductibilité extérieure*, on retrouve la formule de Newton

$$Q = h S t x,$$

qui exprime que la quantité de chaleur perdue est proportionnelle (pour $t =$ const.) à la surface S, à l'excès t et au temps x.

Mais, dans cette formule, h n'est une constante que si l'on a $t < 20°$; dans ce cas, μ et ν sont égaux à l'unité, et l'on a

$$h = r + f.$$

Mais, si l'excès t surpasse 20°, il faut alors calculer μ et ν, et l'on a dressé dans ce but des Tables qui donnent a^t, $124,72 \frac{a^t - 1}{t}$ et $0,552 t^{0,233}$ de 5° en 5°, puis de 10° en 10° jusqu'à 2000°.

327. — MÉTHODE DU REFROIDISSEMENT; APPLICATION DE LA LOI DE NEWTON A LA MESURE DES CHALEURS SPÉCIFIQUES.

Dulong et Petit ont fondé sur l'étude des lois du refroidissement et sur l'emploi de la formule

$$\frac{\operatorname{Log} A - \operatorname{Log} t}{SE} = \frac{x}{pc}$$

une méthode de détermination des chaleurs spécifiques dite *méthode du refroidissement*.

Si nous réalisons des conditions telles que le premier membre reste constant, dans des expériences comparatives faites avec diffé-

rentes substances de poids p_1, p_2, p_3 et de poids spécifique c_1, c_2, c_3, et si nous notons les temps x_1, x_2, x_3 de ces expériences, nous aurons

$$\frac{x_1}{p_1 c_1} = \frac{x_2}{p_2 c_2} = \frac{x_3}{p_3 c_3} = \dots$$

Cette expression nous permettra de calculer le rapport des chaleurs spécifiques de deux substances, et de calculer leur valeur absolue si l'une d'elles est connue.

Pour que le premier membre reste constant, il suffit de satisfaire aux conditions suivantes :

S *et* E. — Les corps solides réduits en poudre sont fortement tassés dans un vase cylindrique d'argent mince, de faible capacité, et dont l'axe est occupé par le réservoir d'un thermomètre (*fig.* 289); ce vase est placé dans une enceinte entourée de glace fondante dans laquelle on fait le vide à une faible pression de quelques millimètres, toujours la même. Dans ces conditions, la surface et le pouvoir émissif restent constants dans tous les essais.

Fig. 289.



Températures. — Les lectures des temps x étaient faites aux instants où le thermomètre passait par les températures 10° et 5°.

Cette méthode nécessite une correction résultant de la nécessité d'enfermer les substances dans le vase d'argent qui participe au refroidissement; si k représente son équivalent en eau, on doit écrire

$$\frac{x_1}{p_1 c_1 + k} = \frac{x_2}{p_2 c_2 + k}.$$

Pour connaître une chaleur spécifique en valeur absolue, il faudra donc deux expériences préliminaires faites avec deux substances de chaleurs spécifiques connues.

Il est facile de comprendre que cette méthode ne s'applique qu'assez médiocrement aux solides; il s'établit en effet entre les divers points de la masse pulvérulente des différences de température sur lesquelles le thermomètre ne donne aucune indication. Appliquée

aux liquides elle peut, au contraire, donner de bons résultats; Regnault et Hirn en ont fait usage.

On doit même à Regnault un appareil spécial destiné à la mise en usage de cette méthode, et qui est connu sous le nom de ***thermocalorimètre***; la description suivante est tirée des Leçons professées à l'École Normale en 1876 par Bertin (*fig.* 290).

Fig. 290.



Thermocalorimètre. — Dans le réservoir d'un gros thermomètre à alcool on soude un tube plus petit qui peut être fermé par un bouchon à l'émeri; le tube thermométrique gradué est deux fois recourbé.

Cet appareil peut être soutenu par un bouchon dans un vase en verre entouré de glace fondante constituant une enceinte de 0. On observe alors les temps que l'alcool met à parcourir l'intervalle compris entre deux divisions A et E, toujours les mêmes, correspondant à des températures A et t; désignons ces temps par :

1° x_1, l'appareil étant vide ;

2° x_2, l'appareil contenant un poids p d'eau ;

3° x_3, l'appareil contenant un poids p' d'un liquide de chaleur spécifique C';

4° x_4, l'appareil contenant, outre un poids p d'eau, un poids p'' d'un solide de chaleur spécifique c''; si k désigne l'équivalent en eau de l'appareil, on a

$$\frac{\text{Log}\,\text{A} - \text{Log}\,t}{\text{SE}} = \frac{x_1}{k} = \frac{x_2}{k+p} = \frac{x_3}{k+p'c'} = \frac{x_4}{k+p+p''c''},$$

d'où l'on tire facilement

$$\text{Liquide} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad C' = \frac{P}{P'}\,\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\text{Solide} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad C' = \frac{P}{P''}\,\frac{x_4 - x_2}{x_2 - x_1}$$

CHAPITRE II.

CONDUCTIBILITÉ THERMIQUE.

La notion de conductibilité thermique est acquise à tout le monde par l'expérience journalière. Chacun sait, en effet, qu'une barre métallique chauffée par une de ses extrémités ne tarde pas à s'échauffer dans toute sa longueur. On sait, en outre, que tous les corps ne sont pas conducteurs de la chaleur au même degré : on munit les fers à souder d'un manche de bois, parce que le bois est moins conducteur que le cuivre dont est formé l'outil.

Nous ne citerons que pour mémoire l'expérience célèbre d'Ingenhousz, aujourd'hui classique, et destinée à montrer aux yeux l'inégale conductibilité des différents métaux.

La propagation de la chaleur de proche en proche étant donc un fait bien établi, nous allons nous proposer d'en faire l'étude approfondie, surtout au point de vue expérimental. Mais, auparavant, il faut définir avec précision les grandeurs que nous aurons à mesurer, et, pour cela, le plus simple est de résumer le magnifique travail de Fourier sur ce point : on verra ainsi qu'il est possible d'arriver à la définition des constantes relatives à la conductibilité, en mettant en jeu le moins d'hypothèses possibles. Ces hypothèses, Fourier les a réduites à une seule : celle du *rayonnement moléculaire.*

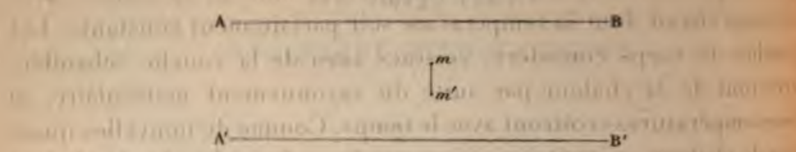
328. — RÉSUMÉ DE LA THÉORIE DE FOURIER.

Sans supposer quoi que ce soit sur la nature de l'agent dont il se propose d'étudier la propagation, Fourier admet simplement, au début de son travail, que toute molécule chaude rayonne autour d'elle en perdant de la chaleur, et cela dans les conditions suivantes :

Considérons deux molécules très rapprochées m et m' (*fig.* 291) ; supposons que m soit plus chaude. Dans ces conditions, nous admet-

trons que la quantité de chaleur q envoyée par m à la molécule voisine m' est fonction de la distance r des points m et m' ; cette quantité de chaleur décroîtra rapidement à mesure que la distance r

Fig. 291.



augmentera, et s'annulera à partir d'une certaine valeur de r, même très petite.

Nous supposerons, en outre, que cette quantité de chaleur q rayonnée de m vers m' est d'autant plus grande que l'excès de la température de m sur celle de m' est plus grand. Comme nous n'avons affaire qu'à des distances intermoléculaires très faibles, ces excès de température sont très faibles et, par suite, les quantités de chaleur rayonnées de molécule à molécule le sont également. Ces quantités de chaleur q s'annulant quand la température $t = t'$, on peut admettre qu'elles sont proportionnelles aux excès $t - t'$. Enfin, nous supposerons que q, qui dépend de $t - t'$, ne dépend que de la grandeur de cette différence, et nullement de la température primordiale de la molécule la plus chaude m. Dans ces conditions, la quantité de chaleur q peut être exprimée par une relation de la forme

$$q = (t - t')f(r).$$

L'hypothèse de Fourier se réduit donc à admettre, en résumé, que toute molécule chaude rayonne vers la molécule moins chaude la plus voisine, en lui envoyant une quantité de chaleur qui dépend de la distance, est proportionnelle à leur différence de température et ne dépend pas de sa température propre ; c'est la loi du rayonnement de Newton appliquée aux molécules.

Cette hypothèse est absolument gratuite. Fourier en a déduit ce qu'on a appelé la *théorie de la conductibilité* et certaines conséquences remarquables, dont le plus grand nombre ont été vérifiées par des expériences précises. Nous pouvons donc la considérer comme légitimée expérimentalement et nous nous en servirons pour résumer ici les principaux points de la théorie de la propagation de la chaleur par conductibilité.

329. — RÉGIME VARIABLE. — RÉGIME PERMANENT.

Considérons un corps de forme quelconque, géométrique ou irrégulière, qui soit en contact, par une portion finie de sa surface, avec un corps chaud dont la température soit parfaitement constante. Les couches du corps considéré, voisines ainsi de la couche échauffée, recevront de la chaleur par suite du rayonnement moléculaire, et leurs températures croîtront avec le temps. Comme de nouvelles quantités de chaleur arrivent sans cesse par la surface chaude, la chaleur se transmettra à des distances de plus en plus grandes et, si à un temps x la température en un point est t, au temps $x + dx$ la température en ce point sera devenue $t + dt$; ce sera en un point plus éloigné qu'il faudra chercher la température t. Pendant cette période d'échauffement continu, le flux de chaleur qui se transmet à travers le corps peut arriver jusqu'à sa surface libre et se perdre en partie par rayonnement; les températures varient alors en chaque point à chaque instant : on dit que le corps est soumis au *régime des températures variables* ou, plus simplement, au *régime variable*.

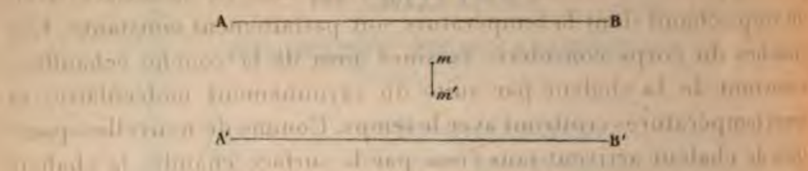
Mais il arrivera un moment où la perte de chaleur de chaque point vers les régions plus froides sera compensée exactement par le flux de chaleur qui lui arrive des régions plus chaudes ; dans ces conditions, la température en chaque point demeurera invariable ; elle ne dépendra que des coordonnées géométriques du point dans l'intérieur du corps. On dit alors que le corps a atteint le *régime des températures stationnaires*, ou encore qu'il est au *régime permanent*.

On peut, d'après cela, prévoir déjà qu'au point de vue des vérifications expérimentales, ces deux états donneront lieu à deux sortes d'expériences bien distinctes, puisque, dans les premières, le temps interviendra et que, dans les secondes, on n'aura pas à s'en occuper. Nous étudierons d'abord le régime permanent. Il serait plus logique de traiter en premier lieu la question du régime des températures variables, dont le régime permanent n'est qu'un cas particulier ; mais la simplicité des calculs et la facilité d'exposition, dans le cas du régime permanent, nous engagent à l'exposer au début de cette étude théorique.

Deux problèmes intéressants et fondamentaux ont été traités par Fourier : celui du *mur* et celui de la *barre*.

trons que la quantité de chaleur q envoyée par m à la molécule voisine m' est fonction de la distance r des points m et m'; cette quantité de chaleur décroîtra rapidement à mesure que la distance r

Fig. 291.



augmentera, et s'annulera à partir d'une certaine valeur de r, même très petite.

Nous supposerons, en outre, que cette quantité de chaleur q rayonnée de m vers m' est d'autant plus grande que l'excès de la température de m sur celle de m' est plus grand. Comme nous n'avons affaire qu'à des distances intermoléculaires très faibles, ces excès de température sont très faibles et, par suite, les quantités de chaleur rayonnées de molécule à molécule le sont également. Ces quantités de chaleur q s'annulant quand la température $t = t'$, on peut admettre qu'elles sont proportionnelles aux excès $t - t'$. Enfin, nous supposerons que q, qui dépend de $t - t'$, ne dépend que de la grandeur de cette différence, et nullement de la température primordiale de la molécule la plus chaude m. Dans ces conditions, la quantité de chaleur q peut être exprimée par une relation de la forme

$$q = (t - t')f(r).$$

L'hypothèse de Fourier se réduit donc à admettre, en résumé, que toute molécule chaude rayonne vers la molécule moins chaude la plus voisine, en lui envoyant une quantité de chaleur qui dépend de la distance, est proportionnelle à leur différence de température et ne dépend pas de sa température propre : c'est la loi du rayonnement de Newton appliquée aux molécules.

Cette hypothèse est absolument gratuite. Fourier en a déduit ce qu'on a appelé la *théorie de la conductibilité* et certaines conséquences remarquables, dont le plus grand nombre ont été vérifiées par des expériences précises. Nous pouvons donc la considérer comme légitimée expérimentalement et nous nous en servirons pour résumer ici les principaux points de la théorie de la propagation de la chaleur par conductibilité.

329. — RÉGIME VARIABLE. — RÉGIME PERMANENT.

Considérons un corps de forme quelconque, géométrique ou irré-ulière, qui soit en contact, par une portion finie de sa surface, avec n corps chaud dont la température soit parfaitement constante. Les ouches du corps considéré, voisines ainsi de la couche échauffée, ecevront de la chaleur par suite du rayonnement moléculaire, et eurs températures croîtront avec le temps. Comme de nouvelles quan-tés de chaleur arrivent sans cesse par la surface chaude, la chaleur e transmettra à des distances de plus en plus grandes et, si à un emps x la température en un point est t, au temps $x + dx$ la tempé-ture en ce point sera devenue $t + dt$; ce sera en un point plus oigné qu'il faudra chercher la température t. Pendant cette ériode d'échauffement continu, le flux de chaleur qui se transmet travers le corps peut arriver jusqu'à sa surface libre et se perdre en rtie par rayonnement ; les températures varient alors en chaque int à chaque instant : on dit que le corps est soumis au *régime des mpératures variables* ou, plus simplement, au *régime variable*.

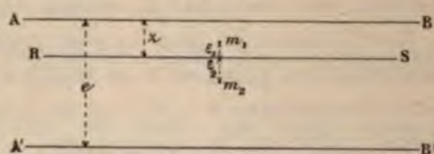
Mais il arrivera un moment où la perte de chaleur de chaque point rs les régions plus froides sera compensée exactement par le flux de aleur qui lui arrive des régions plus chaudes ; dans ces conditions, température en chaque point demeurera invariable ; elle ne dépen-a que des coordonnées géométriques du point dans l'intérieur du rps. On dit alors que le corps a atteint le *régime des températures ationnaires*, ou encore qu'il est au *régime permanent*.

On peut, d'après cela, prévoir déjà qu'au point de vue des vérifi-tions expérimentales, ces deux états donneront lieu à deux sortes expériences bien distinctes, puisque, dans les premières, le temps terviendra et que, dans les secondes, on n'aura pas à s'en occuper. ous étudierons d'abord le régime permanent. Il serait plus logique traiter en premier lieu la question du régime des températures riables, dont le régime permanent n'est qu'un cas particulier ; mais simplicité des calculs et la facilité d'exposition, dans le cas du gime permanent, nous engagent à l'exposer au début de cette étude éorique.

Deux problèmes intéressants et fondamentaux ont été traités par ourier : celui du *mur* et celui de la *barre*.

Considérons un mur homogène, limité par deux faces parallèles, dont l'épaisseur est e, et indéfini dans une direction parallèle au plan des deux faces. Supposons que chacune des faces soit à une température constante. Désignons par a la température de la face AB, par b celle de la face A′B′, et supposons $a > b$ (*fig.* 292).

Fig. 292.



D'abord la propagation de la chaleur, qui se fera de AB à A′B′ doit se faire suivant une seule direction, qui est celle de la normale commune aux deux faces. Cela résulte de ce que, si nous considérons un plan intermédiaire RS, tous les points de ce plan doivent être, à un instant donné, à la même température, rien ne distinguant les points de ce plan les uns des autres. On voit, dès lors, que la température de ce plan, à un instant donné, ne dépendra que de sa distance aux faces extrêmes du mur. Si donc nous désignons par z les ordonnées normales aux faces du mur, par t la température, nous aurons, d'après ce qui précède, d'une façon générale,

$$t = \varphi(z) \tag{1}$$

Le régime permanent étant supposé atteint, considérons deux molécules m_1 et m_2 situées de part et d'autre du plan intermédiaire RS, la température t_1 de m_1 étant supposée plus élevée que celle de m_2, que nous représenterons par t_2. D'après ce que nous avons dit plus haut, la quantité de chaleur envoyée par m_1 sur m_2 pendant l'unité de temps sera représentée par

$$(t_1 - t_2) f(r),$$

r étant la distance des deux molécules. Si nous considérons divers molécules placées à côté de m_1, elles enverront de la chaleur a molécules voisines de m_2, de sorte que la quantité de chaleur Q traversera pendant l'unité de temps l'unité de surface du plan sera la somme d'une certaine quantité d'expressions analogues

précédente. Nous pourrons donc la représenter par

$$Q = \sum (t_1 - t_2) f(r). \tag{2}$$

Cela posé, soit z l'ordonnée du plan RS, soit ε_1 la distance de m_1 au-dessus de ce plan, ε_2 celle de m_2 au-dessous du même plan, d'après la relation (1), les températures t_1 et t_2 seront fonctions uniquement des ordonnées $z - \varepsilon_1$ et $z + \varepsilon_2$ des points m_1 et m_2. On aura donc

$$t_1 = \varphi(z - \varepsilon_1),$$
$$t_2 = \varphi(z + \varepsilon_2).$$

Développons en série d'après la formule de Mac-Laurin, et nous aurons

$$t_1 = \varphi(z) - \varepsilon_1 \frac{d\varphi(z)}{dz} + \frac{\varepsilon_1^2}{1.2} \frac{d^2\varphi(z)}{dz^2} + \ldots,$$
$$t_2 = \varphi(z) + \varepsilon_1 \frac{d\varphi(z)}{dz} + \frac{\varepsilon_2^2}{1.2} \frac{d^2\varphi(z)}{dz^2} + \ldots;$$

mais, le rayonnement se faisant de molécule à molécule, la quantité de chaleur émise de m_1 et m_2 deviendra nulle, dès que la distance r de m_1 à m_2 cessera d'être infiniment petite ; nous sommes donc obligés de considérer les distances ε_1 et ε_2 comme très petites. Dans ce cas, nous pouvons négliger les infiniment petits du second ordre et d'ordre supérieur, et écrire

$$t_1 = \varphi(z) - \varepsilon_1 \frac{d\varphi(z)}{dz} \quad \text{et} \quad t_2 = \varphi(z) + \varepsilon_2 \frac{d\varphi(z)}{dz},$$

$\varphi(z)$ représente, en vertu de l'équation (1), la température t du plan RS. Nous avons donc

$$t_1 - t_2 = -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{dt}{dz}.$$

Substituant cette valeur de $t_1 - t_2$ dans (2), il vient, pour l'expression de Q,

$$Q = -\sum (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) f(r) \frac{dt}{dz};$$

mais $\Sigma(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) f(r)$ ne dépend que de la nature du mur étudié ; le facteur $\frac{dt}{dz}$ se trouve dans tous les termes. Si nous représentons par k l'expression $\Sigma(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) f(r)$, nous aurons donc

$$Q = -k \frac{dt}{dz}. \tag{3}$$

Le régime permanent étant établi, Q sera invariable pendant un temps donné ; donc, en désignant par p une constante, on aura

$$\frac{dt}{dz} = p,$$

ou, en intégrant

$$t = pz + q, \tag{4}$$

q étant une deuxième constante. Donc :

Dans un mur homogène indéfini, limité par deux faces parallèles dont les températures sont fixes, si le régime permanent est atteint, les températures aux divers points sont proportionnelles aux ordonnées de ces points.

Ainsi, dans le cas du mur soumis au régime permanent, la température est fonction linéaire de l'ordonnée.

Détermination des constantes p et q. — Faisons, dans l'équation (4), $z = 0$, nous devons avoir, d'après les données initiales $t = a$; il en résulte que $q = a$; faisons $z = e$, nous devons avoir $t = b$, ce qui nous donne

$$p = -\frac{a-b}{e}.$$

Si nous portons ces deux valeurs de p et de q dans l'équation (4), nous aurons la loi de distribution des températures dans le mur

$$t = a - \frac{a-b}{e} z. \tag{4 bis}$$

D'autre part, si nous remarquons que p, dont nous venons de calculer la valeur, n'est autre chose que $\frac{dt}{dz}$, nous pouvons écrire l'équation (3)

$$Q = k\frac{a-b}{e}. \tag{3 bis}$$

Cette quantité Q représente donc la quantité de chaleur qui traverse, pendant l'unité de temps, l'unité de surface d'un plan intermédiaire quelconque, RS.

La quantité de chaleur qui passerait dans le temps x à travers une surface égale à S serait donc

$$Q = kS\frac{a-b}{e} x,$$

la quantité de chaleur qui passe d'une face à l'autre d'une paroi est proportionnelle à la surface, à la différence des températures des deux faces et au temps ; elle est inversement proportionnelle à l'épaisseur.

331. — COEFFICIENT DE CONDUCTIBILITÉ THERMIQUE.

Reprenons l'expression précédente, et remplaçons-y S, $a - b$, x et e par l'unité. Cela revient à supposer que le mur a 1^{cm} d'épaisseur, que les températures de ses deux faces diffèrent entre elles de $1°$ et que l'on considère la quantité de chaleur qui traverse en une seconde par une section de 1^{cm^2} ; dans ces conditions, on a

$$Q = k.$$

k est ce que Fourier a appelé le *coefficient de conductibilité thermique intérieure* de la substance dont est fait le mur. On voit donc que :

Le coefficient de conductibilité thermique d'un corps est la quantité de chaleur qui traverse, pendant une seconde, l'unité de surface d'un mur de 1^{cm} d'épaisseur, fait avec ce corps, et dont les faces extrêmes seraient à des températures différant de $1°$.

Application à l'électricité. — Remarquons tout de suite que les raisonnements qui nous ont servi à établir la loi de la distribution linéaire des températures dans le cas du mur seront les mêmes quand nous voudrons établir la loi de la distribution des potentiels dans un fil de longueur finie parcouru par un courant, à condition, toutefois, que nous supposions que le fil ne subit aucune déperdition latérale ; c'est ce qui arrive pour un fil bien isolé, et l'on est alors, au point de vue électrique, dans le même cas que si l'on considère, au point de vue thermique, un mur indéfini. On établit ainsi la loi connue sous le nom de *loi d'Ohm*. La loi de Fourier, découverte antérieurement, est donc la même dans les deux cas et s'y applique également.

332. — CAS OU k N'EST PLUS CONSTANT : DISTRIBUTION PARABOLIQUE.

Dans les raisonnements précédents, nous sommes arrivés à la relation (4)

$$k\frac{dt}{dz} = Q,$$

Q étant invariable. Si k est constant, la distribution des températures est linéaire.

Mais il n'y a pas, en Physique, de quantité qui soit absolument indépendante de la température. Donc, tant que nous ne resterons pas entre des limites assez rapprochées, entre 0° et 100°, par exemple, nous ne pourrons pas admettre que k soit constant, k est une fonction $\psi(t)$ de la température. L'équation (3) devient donc

$$\psi(t)\frac{dt}{dz} = Q. \tag{5}$$

C'est l'équation différentielle qui représente la distribution des températures dans le mur considéré.

La forme la plus simple que l'on puisse donner à la fonction ψ est la forme linéaire; cela revient à supposer que le coefficient de conductibilité thermique varie proportionnellement à la température, ce qu'on peut admettre comme première approximation. On a, dans ces conditions,

$$k = \psi(t) = k_0(1 + \alpha t),$$

et l'équation (5) devient

$$k_0(1 + \alpha t)\frac{dt}{dz} = Q.$$

Multiplions par dz et intégrons; nous aurons séparé les variables, et il viendra

$$\int k_0(1 + \alpha t)\, dt = \int Q\, dz$$

ou, en effectuant l'intégration indiquée,

$$k_0 + \frac{1}{2}\alpha k_0 t^2 + n = Q z + Q'.$$

Déterminons les constantes n et Q' dans le cas où le mur d'épaisseur l a l'une de ses faces à 0°, l'autre à T°; on a, pour $z = 0$, $t = 0$, ce qui exige que l'on ait

$$n = Q' = 0.$$

De même, pour $z = l$, on doit avoir $t = T$; donc

$$k_0 T + \frac{\alpha}{2} k_0 T^2 = Q l,$$

d'où

$$Q = \frac{k_0 T}{l}\left(1 + \frac{\alpha}{2} T\right).$$

L'équation de distribution des températures entre o et T en fonction des ordonnées z est donc

$$(6) \qquad k_0 t + \frac{\alpha}{2} k_0 t^2 = \frac{k_0 T}{l}\left(1 + \frac{\alpha}{2} T\right) z.$$

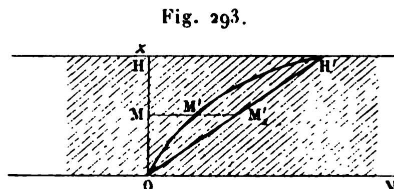
On tire de là

$$\frac{\alpha}{2} = -\frac{Tz - tl}{T^2 z - t^2 l}.$$

On voit que l'équation qui relie, dans ce cas, l'ordonnée et la température est celle d'une parabole à axe vertical.

Donc, si dans le mur (*fig.* 293) considéré, nous prenons une normale OH, et que, en chaque point M de cette normale, nous portions en abscisse une longueur MM' égale à la température, nous aurons deux cas à considérer :

Fig. 293.



1° Nous sommes dans des limites de température assez rapprochées pour qu'on puisse considérer k comme constant. Alors la distribution des températures le long de la normale OZ est représentée par la droite OH';

2° L'écart des températures extrêmes a une valeur telle qu'on ne puisse considérer k comme constant. Si l'on admet que k varie proportionnellement à la température, la distribution des températures le long de OZ sera représentée par la parabole OM'H'.

333. — COEFFICIENT DE CONDUCTIBILITÉ EXTÉRIEURE.

Nous avons vu que la loi de la distribution des températures dans un corps déterminé se déduisait de l'hypothèse fondamentale du rayonnement particulaire. Comme ce rayonnement s'exerce de molécule à molécule, il sera indépendant de la direction de la droite qui joint les deux molécules considérées; c'est-à-dire que, pour tous les corps amorphes ou cristallisés dans le système cubique, les raisonnements qui précèdent pourront s'appliquer.

Il y aura, toutefois, une exception à faire : ce sera pour les éléments de ces corps qui feront partie de sa surface de séparation avec un autre milieu. Dans ce cas, il faut appliquer la loi qui régit le mode de propagation de la chaleur d'un milieu dans un autre.

Cette loi n'est pas exactement connue; mais, si la température d'un

corps diffère peu de celle du milieu ambiant, on peut admettre, avec une approximation suffisante, que la quantité de chaleur émise est proportionnelle au temps, à la surface du corps et à l'excès de sa température sur celle du milieu qui le limite. C'est cette perte de chaleur que Fourier a nommée *conductibilité extérieure*.

Nous appellerons donc *coefficient de conductibilité extérieure, la quantité de chaleur perdue pendant l'unité de temps, par l'unité de surface d'un corps dont la température excède de 1° la température du milieu qui l'environne.*

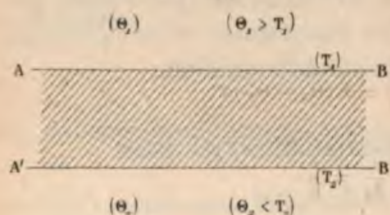
En représentant ce coefficient par h, la quantité Q de chaleur perdue pendant le temps x par une surface S à la température t, l'enceinte étant à la température θ, est exprimée par la relation

$$Q = hS(t - \theta)x.$$

Ainsi la loi simple de la perte de chaleur par conductibilité extérieure, que nous admettons dans le cas où l'excès de température est faible, est encore la loi de Newton relative au refroidissement.

Cas d'un mur indéfini dont les deux faces sont en contact avec deux milieux. — Considérons un mur indéfini dont les deux faces soient en contact avec deux milieux dont les températures sont Θ_1 et Θ_2 (*fig.* 294) et dont les coefficients de conductibilité extérieure soient h et h'.

Fig. 294.



Dans ces conditions, les faces prennent des températures inconnues T_1 et T_2; le régime permanent s'établit, la distribution intérieure des températures se fait linéairement, et la température t en un point dont l'ordonnée est z est donnée par la relation (4 *bis*)

$$t = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{e} z,$$

e représente l'épaisseur du mur considéré.

Le milieu supérieur est à une température $\Theta_1 > T_1$. Par suite, il entre dans la face AB une quantité de chaleur qui, pendant l'unité de temps et par unité de surface, est représentée par

$$h(\Theta_1 - T_1).$$

Pour qu'il y ait équilibre, il faut que cette quantité soit égale au flux de chaleur qui traverse, pendant l'unité de temps, l'unité de surface d'un plan quelconque pris à l'intérieur du mur et qui est donné par l'équation (3 *bis*); on devra donc avoir

$$h(\Theta_1 - T_1) = K\frac{T_1 - T_2}{e}$$

et

$$h'(T_2 - \Theta_2) = K\frac{T_1 - T_2}{e}.$$

On voit donc que, dans ces conditions, le problème est entièrement déterminé, puisqu'on peut connaître, par ces deux équations, les quantités T_1 et T_2, températures des deux faces du mur, en fonction des trois coefficients et des températures des deux milieux. Le cas des températures stationnaires est donc toujours extrêmement simple et susceptible d'être traité complètement.

Si l'on se propose d'exprimer la quantité de chaleur Q qui passe dans le temps x à travers la section S du premier milieu dans le second, on écrira

$$Q = h_1 S(\Theta_1 - T_1)x = KS\frac{T_1 - T_2}{e}x = h_2 S(T_2 - \Theta_2)x$$

ou

$$\frac{Q}{h_1} = S(\Theta_1 - T_1)x, \qquad \frac{Ql}{K} = S(T_1 - T_2)x, \qquad \frac{Q}{h_2} = S(T_2 - \Theta_2)x$$

et en ajoutant

$$Q\left(\frac{1}{h_1} + \frac{l}{K} + \frac{1}{h_2}\right) = S(\Theta_1 - \Theta_2)x;$$

en posant

$$\frac{1}{h_1} + \frac{l}{K} + \frac{1}{h_2} = \frac{1}{E},$$

on trouve

$$Q = ES(\Theta_1 - \Theta_2)x;$$

les coefficients h_1, h_2, K sont donnés par les méthodes indiquées aux paragraphes 326 et 343.

334. — PAROIS CYLINDRIQUES OU SPHÉRIQUES.

Supposons que la transmission s'effectue à travers les parois d'un tuyau cylindrique.

Soient R_1, R_2 les rayons; S_1, S_2 les surfaces; T_1 et T_2 les températures des parois du tuyau de longueur l ; Θ_1 et Θ_2 les températures

des enceintes; h_1, h_2 les coefficients de conductibilité extérieure On a

$$S_1 = 2\pi R_1 l, \qquad S_2 = 2\pi R_2 l.$$

La quantité de chaleur qui entre par la première paroi pendant le temps x est

$$(1) \qquad Q = h_1 S_1 (\theta_1 - T_1) x;$$

celle qui sort de la seconde pendant le même temps,

$$(2) \qquad Q = h_2 S_2 (T_2 - \theta_2) x.$$

Considérons une tranche annulaire de rayon r, d'épaisseur dr; si la température est t sur sa paroi interne, $t - dt$ sur sa paroi externe et si nous représentons par C le coefficient de conductibilité de la substance du tuyau, la quantité de chaleur q qui traverse, pendant l'unité de temps, la section S sera :

$$q = -CS\frac{dt}{dr}.$$

Mais on a

$$S = 2\pi r l,$$

d'où

$$\frac{dr}{r} = -\frac{C}{q} 2\pi l \, dt,$$

et

$$\int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = -\frac{C}{q} 2\pi l \int_{T_1}^{T_2} dt,$$

et, en intégrant,

$$\text{Log nép} \frac{R_2}{R_1} = \frac{C}{q} 2\pi l (T_1 - T_2),$$

et pour le temps x

$$(3) \qquad Q = \frac{2\pi l C}{\text{Log nép} \frac{R_2}{R_1}} (T_1 - T_2) x.$$

Éliminons T_1 et T_2 entre les équations (1), (2) et (3), il vient

$$Q = \frac{2\pi l (\theta_1 - \theta_2) x}{\frac{1}{h_1 R_1} + \frac{1}{C} \text{Log nép} \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{h_2 R_2}}.$$

Un calcul analogue conduirait, dans le cas d'un mur limité par deux surfaces sphériques concentriques, à la formule

$$Q = \frac{4\pi (\theta_1 - \theta_2) x}{\frac{1}{h_1 R_1^2} + \frac{1}{C}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{1}{h_2 R_2^2}}.$$

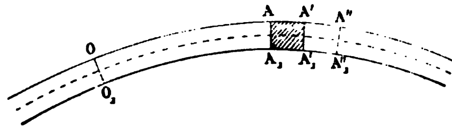
335. — PROBLÈME DE LA BARRE.

Considérons une barre homogène dont les dimensions transversales soient assez petites pour qu'on puisse considérer la température comme uniforme dans une section droite quelconque, cette barre pouvant être, d'ailleurs, droite ou curviligne.

Soit un point A de la barre (*fig.* 295), menons en ce point la section droite AA_1. Désignons par s la surface de cette section, et par p son périmètre ; nous appellerons k le coefficient de conductibilité thermique intérieure de la substance dont est formée la barre, h son coefficient de conductibilité thermique extérieure.

Soit OO_1 une section fixe prise pour origine ; appelons z la distance de la section AA_1 à la section OO_1, comptée sur l'axe de la barre. Si

Fig. 295.



nous admettons que tous les points de la tranche AA_1 soient à une même température, on peut assimiler le flux thermique qui traverse AA_1 pendant l'unité de temps au flux qui traverserait un mur indéfini dont les températures auraient la même distribution que celle qui existe au voisinage de AA_1.

Si nous appelons u l'excès de la température de la tranche AA_1 sur la température ambiante supposée constante, l'excès de température en tous les points d'une tranche $A'A'_1$ voisine sera $u + du$, du étant la variation de u correspondant à la variation dz qui mesure la distance de ces deux tranches. Le flux de chaleur qui traverse AA_1 considéré comme un mur, sera donc, pour l'unité de temps $-ks\frac{du}{dz}$, d'après l'équation (3), car il est à remarquer que $du = dt$, la différence du des excès de température sur la température ambiante supposée constante étant nécessairement égale à la différence dt entre les températures elles-mêmes ; pendant le temps dx le flux sera

$$\varphi_1 = -ks\frac{du}{dz}dx.$$

Si nous considérons une autre tranche $A''A''_1$ à la même distance dz

de $A'A'_1$, la variation de u correspondante sera

$$d(u + du) \quad \text{ou} \quad du + d^2 u,$$

et la quantité de chaleur qui traversera $A'A'_1$ pendant le temps dx pourra s'écrire

$$\varphi_2 = -ks\left(\frac{du}{dz} + \frac{d^2 u}{dz^2}\,dz\right)dx.$$

La quantité de chaleur qui, par conséquent, sera restée dans la tranche $AA_1\,A'A'_1$, sera la différence entre la quantité φ_1 qui a pénétré et la quantité φ_2 qui est sortie, ou

$$\varphi_1 - \varphi_2 = ks\left(\frac{d^2 u}{dz^2}\,dz\right)dx.$$

Or, pendant ce même temps dx, cette tranche $AA_1\,A'A'_1$ rayonne vers l'extérieur. Elle perd donc par unité de surface, pendant l'unité de temps, une quantité de chaleur hu proportionnelle à l'excès u de sa température sur l'air ambiant, h étant le coefficient de conductibilité extérieure ; pendant le temps dx, cette perte sera $hu\,dx$ et, la surface latérale de la tranche étant $p\,dz$, la perte de chaleur sera donc

$$\varphi_3 = hpu\,dz\,dx.$$

Si le régime permanent est atteint, la température de cette tranche doit demeurer invariable ; il faut, pour cela, que le gain de chaleur pendant le temps dx soit égal à la perte éprouvée pendant le même temps. Cela nous donne donc la condition

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_3,$$

ou

$$ks\frac{d^2 u}{dz^2}\,dz\,dx = hpu\,dz\,dx,$$

ou, plus simplement,

$$ks\frac{d^2 u}{dz^2} - hpu = 0.$$

Telle est l'équation différentielle qui relie, dans une barre longue et mince, l'excès u de la température en chaque point sur la température ambiante à l'abscisse z de ce point par rapport à l'origine O.

Si nous posons $\frac{hp}{ks} = a^2$, cette équation devient

$$\frac{d^2 u}{dz^2} - a^2 u = 0.$$

équation dont l'intégrale générale est

$$u = Me^{az} + Ne^{-az}, \tag{1}$$

M et N étant deux constantes que l'on aura à déterminer d'après les conditions initiales de l'expérience. On peut donc traduire cette équation en langage ordinaire en disant que :

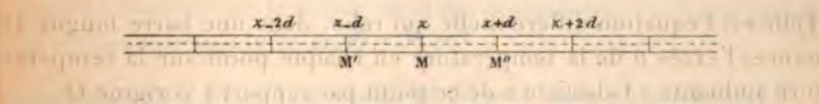
La loi de la distribution des excès de températures sur la température de l'air ambiant, dans une barre, peut être représentée par la somme de deux progressions géométriques, l'une croissante avec z, l'autre décroissante, chacune d'elles étant multipliée par une constante.

La température de la barre en chaque point diffère des excès par une constante, puisque nous supposons la température de l'air uniforme.

Conséquence de l'équation précédente. — Supposons la température du milieu qui enveloppe la barre absolument uniforme ; admettons que les dimensions transversales de la barre soient assez petites pour que la température soit la même en tous les points d'une section droite. Nous allons démontrer que : *le régime permanent étant établi, si l'on prend trois points séparés par des intervalles égaux, le quotient de la somme des excès des températures des points extrêmes par l'excès de température du point moyen sur la température ambiante est un nombre constant, dépendant uniquement de la grandeur de l'intervalle qui sépare les points deux à deux.*

En effet, soient sur la barre en question des intervalles égaux ; considérons un point dont la distance à l'origine soit z. Si nous désignons par d la grandeur commune des intervalles égaux dans lesquels

Fig. 296.



est divisée la barre, l'abscisse du point M' sera $z - d$, et celle du point M'' sera $z + d$. Si nous appelons u_z l'excès de température en M, en M' ce sera u_{z-d} et en M'' ce sera u_{z+d} (*fig.* 296).

Mais nous avons, en vertu de l'équation (1),

$$\begin{aligned} u_z &= \mathrm{M}e^{az} + \mathrm{N}e^{-az}, \\ u_{z+d} &= \mathrm{M}e^{a(z+d)} + \mathrm{N}e^{-a(z+d)}, \\ u_{z-d} &= \mathrm{M}e^{a(z-d)} + \mathrm{N}e^{-a(z-d)}; \end{aligned}$$

formons le quotient $\dfrac{u_{+zd}+u_{z-d}}{u_z}$, nous aurons

$$\frac{u_{z+d}+u_{z-d}}{u_z} = \frac{\mathrm{M}e^{az-ad}+\mathrm{N}e^{-az+ad}+\mathrm{M}e^{az+ad}+\mathrm{N}e^{-az-ad}}{\mathrm{M}e^{az}+\mathrm{N}e^{-az}},$$

$$\frac{u_{z+d}+u_{z-d}}{u_z} = \frac{(e^{ad}+e^{-ad})(\mathrm{M}e^{az}+\mathrm{N}e^{-az})}{\mathrm{M}e^{az}+\mathrm{N}e^{-az}},$$

$$\frac{u_{z+d}+u_{z-d}}{u_z} = e^{ad}+e^{-ad}.$$

Le second membre n'étant fonction que de a et de d est donc une quantité constante, puisque d représente une longueur arbitraire, et que a n'est fonction que des dimensions transversales de la barre et des deux coefficients de conductibilité de la substance dont elle est formée.

Nous verrons plus loin comment on a fondé sur cette relation une méthode élégante pour mesurer, dans le cas du régime permanent, les coefficients de conductibilité des différents corps.

Cas particulier : Loi de Biot et Lambert. — Nous avons vu que la distribution des excès de température dans une barre était donnée par l'équation

$$(1) \qquad u = \mathrm{M}e^{az} + \mathrm{N}e^{-az},$$

et nous avons dit que M et N étaient deux constantes dépendant uniquement des conditions initiales de l'expérience.

Déterminons M et N. Il suffira, pour cela, d'exprimer que, pour $z = 0$, on a $u = \mathrm{T}$, T étant l'excès de la température de la tranche initiale de la barre considérée sur la température de l'air. Cela nous donne

$$(2) \qquad \mathrm{T} = \mathrm{M} + \mathrm{N}.$$

Il nous faut, de plus, trouver la valeur de l'excès u correspondant à $z = l$, l étant la longueur de la barre. Pour cela, nous n'avons qu'à mener un plan normal à son axe et infiniment voisin de son extrémit. Le flux de chaleur qui arrive dans cette tranche pendant le

temps dx sera

$$-\,ks\frac{du}{dz}\,dx.$$

Il y aura équilibre si ce flux de chaleur, représentant un gain, est égal à la perte de chaleur par l'air, perte de chaleur qui est $hus\,dx$. Nous aurons donc, pour déterminer u, l'équation

$$k\frac{du}{dz} + hu = 0, \tag{3}$$

dans laquelle il faudra faire $z = l$.

Cela posé, nous avons

$$u = \mathrm{M}\,e^{az} + \mathrm{N}\,e^{-az},$$

d'où

$$\frac{du}{dz} = \mathrm{M}\,ae^{az} - \mathrm{N}\,ae^{-az}.$$

L'équation (3) devient donc

$$k(\mathrm{M}\,ae^{az} - \mathrm{N}\,ae^{-az}) + h(\mathrm{M}\,e^{a-z} + \mathrm{N}\,e^{-az}) = 0.$$

Faisons $z = l$, nous aurons alors

$$k(\mathrm{M}\,ae^{al} - \mathrm{N}\,ae^{-al}) + h(\mathrm{M}\,e^{al} + \mathrm{N}\,e^{-al}) + 0. \tag{4}$$

Les deux équations (2) et (4) peuvent servir à déterminer M et N, car on peut les écrire

$$\mathrm{M} + \mathrm{N} = \mathrm{T}, \tag{2$'$}$$

$$\mathrm{M}(ak + h)e^{al} - \mathrm{N}(ak - h)e^{-al} = 0, \tag{4$'$}$$

d'où nous tirons immédiatement

$$\mathrm{N} = \frac{\mathrm{T}}{1 + e^{-2al}\dfrac{ak - h}{ak + h}}.$$

Supposons maintenant al très grand : alors N se réduit sensiblement à T, d'où résulte, par suite de (2)$'$, une valeur de M très voisine de zéro. Dans ce cas, la valeur de u est représentée, avec une grande approximation, par la relation

$$u = \mathrm{T}\,e^{-az}:$$

c'est la loi de Biot et Lambert ; on peut l'énoncer ainsi :

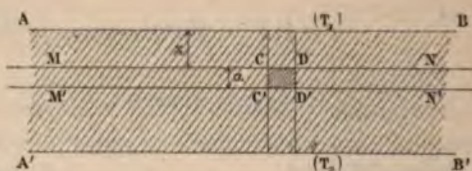
Dans une barre assez longue pour que l'on puisse en négliger

le diamètre par rapport à la longueur, les excès de températures sur la température de l'air ambiant décroissent en progression géométrique, quand les abscisses croissent en progression arithmétique.

336. — RÉGIME VARIABLE : CAS DU MUR.

Considérons un mur indéfini limité par deux faces parallèles dont les températures, que nous supposons invariables, seront représentées par T_1 et T_2 (*fig.* 296). Imaginons, ce que nous aurons toujours le

Fig. 296.



droit de faire, qu'au début de l'expérience, quelle que soit d'ailleurs la loi de répartition des températures, la température soit la même en tous les points d'un même plan horizontal. Dans ces conditions, la température initiale t_0 d'une tranche sera une fonction de l'abscisse seulement, et l'on aura

$$t_0 = f(z).$$

Le problème que nous nous proposons de résoudre est le suivant :

Étant donnée la relation $t_0 = f(z)$ qui relie la température initiale d'un point à son ordonnée, chercher la loi qui régit le passage de cette distribution initiale à la distribution finale correspondant au régime permanent.

Nous allons, pour cela, considérer dans le mur deux plans parallèles très voisins, MN, M'N', distants l'un de l'autre d'une longueur α très petite. Soit z la distance du plan MN à la face supérieure. Prenons sur ce plan une portion de surface CD égale à l'unité. Le flux de chaleur qui traversera cette surface pendant le temps dx sera

$$-k\frac{dt}{dz}dx,$$

t désignant la température.

Si nous imaginons que cet élément de surface égal à l'unité soit la base d'un petit cylindre normal aux faces du mur, ce petit cylindre

découpera dans le plan infiniment voisin M′N′, une autre portion C′D′ de surface, égale à l'unité, et qui sera traversée, pendant le même temps dx, par un flux de chaleur ayant pour expression

$$-k\left(\frac{dt}{dz}+\alpha\frac{d^2t}{dz^2}\right)dz.$$

Nous avons supposé le mur indéfini et nous avons admis, de plus, que tous les points d'un même plan horizontal étaient à la même température; t sera donc fonction de z et de z seulement, et il n'y aura aucune perte de chaleur latérale.

La quantité de chaleur accumulée dans le petit élément de cylindre CDC′D′ est représentée par la différence entre les deux flux exprimés plus haut : cette différence est

$$k\alpha\frac{d^2t}{dz^2}dx.$$

Désignons maintenant par D la densité du corps dont est formé le mur, et par C sa chaleur spécifique. Le volume CDC′D′ a comme expression α, puisque sa base est égale à l'unité; son poids est donc αD; comme sa température s'élève d'une quantité égale à $\frac{dt}{dx}dx$, la quantité de chaleur accumulée a aussi pour expression

$$\frac{dt}{dx}dx\,\alpha\,\mathrm{DC}.$$

Égalons ces deux expressions, et nous aurons l'équation

$$k\alpha\frac{d^2t}{dz^2}dx=\frac{dt}{dx}dx\,\alpha\,\mathrm{DC},$$

ou

$$\frac{dt}{dx}=\frac{k}{\mathrm{DC}}\frac{d^2t}{dz^2}.$$

Posons $\frac{k}{\mathrm{DC}}=c^2$; nous aurons l'équation aux différences partielles, connue sous le nom d'*équation de Fourier*,

$$(1)\qquad \frac{dt}{dx}=c^2\frac{d^2t}{dz^2}.$$

Cette équation permet de résoudre tous les problèmes relatifs au régime des températures variables quand on connaîtra le coefficient k de conductibilité thermique intérieure, la densité D et la chaleur spécifique C du mur considéré. D'ailleurs nous supposons qu'au

temps $x = x_0$ les températures étaient réparties suivant la loi

$$t_0 = f(z).$$

Nous n'entrerons pas dans le détail des calculs nécessaires pour arriver à la résolution de l'équation de Fourier: cette question, purement analytique, est du domaine des cours de Physique mathématique ; nous donnerons seulement l'équation finale à laquelle on arrive pour déterminer la température t. Cette équation est la suivante :

$$(2) \qquad t = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{l} z + \sum A e^{-\frac{n^2 \pi^2 c^2}{l^2} x} \sin \frac{n\pi}{l} z.$$

T_1 et T_2 représentent les températures extrêmes des deux faces du mur, que l'on suppose invariables ; l l'épaisseur de ce mur ; n est un nombre entier quelconque et A une constante introduite par l'intégration. On peut se proposer de rechercher ce que donne la formule (2) quand on fait croître le temps au delà de toute limite.

On voit immédiatement que, pour de très grandes valeurs de x, tous les termes de la somme Σ vont en diminuant. Donc, au bout d'un temps très grand, on a comme valeur limite de t l'expression

$$t = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{l} z ;$$

c'est précisément la valeur trouvée précédemment pour la distribution des températures dans un mur soumis au régime permanent, les deux faces de ce mur étant à des températures constantes T_1 et T_2.

337. — CONSÉQUENCES DE L'ÉQUATION (2).

1° **Loi du carré des longueurs.** — On voit donc qu'après un temps suffisamment long, mais fini, il n'y aura qu'une différence négligeable entre l'état réellement variable des températures et l'état permanent.

Soit ξ un temps au bout duquel cette différence ne soit plus mesurable : les termes de la somme Σ, y compris même le plus grand d'entre eux, sont devenus aussi petits que l'on voudra, et nous pouvons les négliger. Or nous pouvons écrire l'exponentielle placée sous le signe Σ de la façon suivante :

$$e^{-\frac{n^2 \pi^2 c^2}{l^2} x} = e^{-\frac{\pi^2 c^2}{l^2} x} \times e^{-(n^2-1)\frac{\pi^2 c^2}{l^2} x}.$$

Donc, tous les termes placés sous le signe Σ contiendront en fac-

teur l'exponentielle

$$e^{-\frac{\pi^2 c^2}{l^2} x}.$$

Ce seront donc les valeurs de ce facteur qui permettront de savoir si le régime permanent peut être considéré comme atteint. Si, pour une valeur ξ assez grande donnée à x, ce facteur est assez petit, on pourra admettre qu'on se trouve sous le régime des températures stationnaires.

Cela posé, si nous considérons deux murs différents atteignant respectivement le régime des températures stationnaires au bout de deux temps ξ et ξ', les deux facteurs

$$e^{-\frac{\pi^2 c^2}{l^2}\xi} \quad \text{et} \quad e^{-\frac{\pi^2 c'^2}{l'^2}\xi'}$$

seront sensiblement égaux au bout de ces deux temps ; on aura donc

$$(3) \qquad \frac{c^2}{l^2}\xi = \frac{c'^2}{l'^2}\xi'.$$

Si nous supposons les deux murs de même nature, mais d'épaisseurs différentes, nous aurons $c = c'$, car nous avons posé $c^2 = \frac{k}{\text{DC}}$. Il reste alors

$$\frac{\xi}{\xi'} = \frac{l^2}{l'^2};$$

d'où la loi suivante :

Les temps nécessaires à l'établissement du régime permanent dans deux murs de même nature ayant des épaisseurs différentes sont proportionnels aux carrés des épaisseurs de ces murs.

2° **Loi des coefficients de conductibilité.** — Si maintenant nous supposons que les deux murs soient de même épaisseur, mais de substances différentes, nous aurons $l = l'$. Si nous remplaçons dans (3) c^2 par $\frac{k}{\text{DC}}$ et c'^2 par $\frac{k'}{\text{D}'\text{C}'}$, il vient

$$(4) \qquad \frac{\xi}{\xi'} = \frac{k'}{k}\,\frac{\text{DC}}{\text{D}'\text{C}'},$$

ce qui nous donne une double loi :

Dans deux murs de même épaisseur, mais de nature différente, les temps nécessaires à l'établissement du régime permanent sont en raison inverse des coefficients de conductibilité, et en

raison directe des produits DC *de la densité par la chaleur spécifique.*

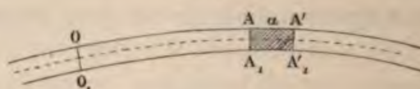
Nous verrons plus loin comment toutes ces propriétés ont pu être vérifiées par l'expérience.

338. — RÉGIME VARIABLE : CAS DE LA BARRE.

Nous pouvons arriver, d'une façon fort simple, à l'expression de la température, en fonction de l'abscisse et du temps, dans une barre qui n'a pas encore atteint le régime des températures stationnaires.

Soit une barre indéfinie (*fig.* 297) sur laquelle nous prenons pour

Fig. 297.



origine une section fixe OO_1. Soient k et h les deux coefficients de conductibilité intérieure et extérieure de cette barre ; soient s sa section droite, p son périmètre, C sa chaleur spécifique et D sa densité.

Nous avons vu, en étudiant le régime permanent, que le gain de chaleur acquis par le volume élémentaire $AA'A'_1A_1$ pendant le temps dx avait pour expression

$$ks\frac{d^2t}{dz^2}\alpha\,dx - hpt\alpha\,dx.$$

D'autre part, la température, quand on passe du temps x au temps $x+dx$, a varié de $\frac{dt}{dx}dx$; le volume élémentaire a pour expression αs; son poids est αsD, et la quantité de chaleur qu'il absorbe par suite de l'élévation de température est donc

$$\alpha s\mathrm{DC}\frac{dt}{dx}dx.$$

Égalons les deux expressions de cette quantité de chaleur, et nous aurons

$$\frac{dt}{dx}dx = \frac{ks\frac{d^2t}{dz^2}\alpha\,dx - hpt\alpha\,dx}{\alpha s\mathrm{CD}}.$$

Supprimons le facteur commun dx, et nous aurons, en divisant

haut et bas par α,

$$(1) \qquad \frac{dt}{dx} = \frac{k}{\mathrm{CD}}\frac{d^2t}{dx^2} - \frac{hpt}{s\mathrm{CD}};$$

telle est l'équation aux différences partielles qui, dans le cas de la barre, relie l'excès de température en un point à l'abscisse de ce point et au temps.

On en déduit immédiatement la loi des températures stationnaires; car, si l'équilibre est atteint, on a $\frac{dt}{dx} = 0$, et il reste

$$\frac{d^2t}{dx^2} - \left(\frac{hp}{ks}\right)t = 0.$$

Si l'on pose la quantité entre parenthèses égale à a, on voit que cette équation a pour intégrale

$$u = \mathrm{M}e^{az} + \mathrm{N}e^{-az},$$

loi que nous avions trouvée précédemment.

Remarque sur l'équation de Fourier. — Nous avons vu que l'on arrivait, pour étudier le régime variable, à l'équation

$$(1) \qquad \frac{dt}{dx} = c^2\frac{d^2t}{dz^2},$$

x représentant le temps, t la quantité variable (c'est ici la température) et z une longueur.

Cette équation se présente dans beaucoup d'autres problèmes de Physique mathématique, entre autres dans la propagation de l'électricité, dans la diffusion du mouvement d'un solide à un liquide et dans la diffusion des liquides.

Nous ne devons pas être surpris de retrouver ainsi, dans ces diverses questions, l'équation de Fourier : elle est la conséquence du fait que l'on introduit, au début, la même hypothèse dans ces différentes études; cela revient, en somme, à l'hypothèse du rayonnement moléculaire. On admet que la grandeur rayonnée est proportionnelle au temps et à l'excès moyen sur les molécules voisines, et cela qu'il s'agisse de chaleur, d'électricité, de vitesse ou de liquide dissous. Il est donc naturel que la même hypothèse conduise, dans les quatre cas que nous venons de citer, aux mêmes résultats.

Remarquons, en outre, que les travaux de Fourier sur la propagation de la chaleur s'appliquent, sans aucune modification, à la propa-

gation de l'électricité : il suffira de remplacer partout la *température* par le *potentiel;* il en sera de même pour la transmission du mouvement d'un solide à un liquide et pour la diffusion des liquides les uns dans les autres. Le Mémoire de Fourier, publié au commencement de ce siècle, doit donc être considéré, à juste titre, comme le fondement de la Physique mathématique.

339. — ÉTUDE EXPÉRIMENTALE DE LA CONDUCTIBILITÉ THERMIQUE.

L'étude expérimentale de la conductibilité thermique a surtout été faite dans le but de déterminer les coefficients de conductibilité intérieure dont l'importance pratique est considérable. Pour mesurer ces coefficients, il suffira de se placer dans l'un des cas définis par les formules que nous avons établies précédemment, en s'arrangeant de manière que tout y soit mesurable, excepté k que l'on en déduira par suite.

On peut évidemment, que l'on aborde le cas du mur ou celui de la barre, opérer soit en régime permanent, soit en régime variable. Dans l'un et l'autre cas, on peut se proposer de faire soit des mesures absolues, soit des mesures relatives.

Les premières mesures de conductibilité thermique faites avec précision l'ont été en valeur relative. Il est indispensable de faire ces mesures en valeur absolue, si l'on se propose de calculer en calories les quantités de chaleur.

Avant de parler, toutefois, des unes et des autres, nous donnerons les dimensions de la conductibilité thermique.

Dimensions de la conductibilité thermique. — D'après la définition que nous en avons donnée, le coefficient de conductibilité est une quantité k définie par la formule

$$Q = ks\frac{T_2 - T_1}{l}x,$$

dans laquelle Q représente la quantité de chaleur traversant pendant le temps x une surface égale à s dans un mur indéfini d'épaisseur l et dont les faces extrêmes seraient maintenues à des températures constantes T_1 et T_2.

Nous tirons de cette formule

$$k = \frac{Q}{T_2 - T_1} \times \frac{l}{sx}.$$

L'unité de chaleur étant proportionnelle à l'unité de masse et au degré de température, les dimensions du facteur $\frac{Q}{T_2 - T_1}$ sont simplement $[M]$.

Les dimensions du facteur $\frac{l}{sx}$ sont $\frac{[L]}{[L^2][T]}$ ou $\frac{1}{[L][T]}$. Les dimensions de la conductibilité seront donc $\frac{[M]}{[L][T]}$ ou $[L]^{-1}[T]^{-1}[M]$.

Nous avons supposé, dans le calcul, que nous prenions, pour unité de chaleur, la chaleur nécessaire pour élever de *un degré* la température de l'*unité de masse* d'eau.

340. — EXPÉRIENCES FONDÉES SUR LE RÉGIME PERMANENT. — MESURE DES CONDUCTIBILITÉS RELATIVES. — EXPÉRIENCES DE DESPRETZ ET DE MM. WIEDEMANN ET FRANZ.

Ces expériences ont été effectuées en se plaçant dans le cas d'une barre, dans laquelle le régime des températures stationnaires est atteint.

Nous avons vu que l'on avait, dans ce cas,

$$e^{ad} + e^{-ad} = \frac{u_{z+d} + u_{z-d}}{2} = \text{const.} = 2n,$$

u_z désignant l'excès de température au point dont l'abscisse est z. On a donc

$$e^{ad} + e^{-ad} = 2n;$$

multiplions par e^{ad}, il vient

$$e^{2ad} - 2ne^{ad} + 1 = 0,$$

si nous posons $e^{ad} = X$, cette équation devient

$$X^2 - 2nX + 1 = 0;$$

le produit des racines est l'unité. Les deux racines sont donc inverses l'une de l'autre, et, comme l'une est e^{ad}, l'autre est forcément e^{-ad}; nous pouvons donc écrire

$$e^{ad} = n + \sqrt{n^2 - 1}.$$

L'expérience montre, d'ailleurs, que cette quantité est toujours réelle et positive comme nous le verrons plus loin. Passons aux logarithmes népériens

(1) $$ad = \text{Log}\left(n + \sqrt{n^2 - 1}\right);$$

on aurait, pour une deuxième barre,

$$(2) \qquad a'd' = \mathrm{Log}(n' + \sqrt{n'^2 - 1});$$

on en déduit

$$\frac{ad}{a'd'} = \frac{\mathrm{Log}(n + \sqrt{n^2 - 1})}{\mathrm{Log}(n' + \sqrt{n'^2 - 1})}.$$

Le second membre peut être entièrement déterminé par l'expérience. Représentons par M sa valeur. Nous aurons

$$\frac{ad}{a'd'} = \mathrm{M} \qquad \text{ou} \qquad \frac{a^2 d^2}{a'^2 d'^2} = \mathrm{M}^2.$$

Mais nous avons posé

$$a^2 = \frac{hp}{ks}, \qquad a'^2 = \frac{h'p'}{k's'};$$

il vient donc

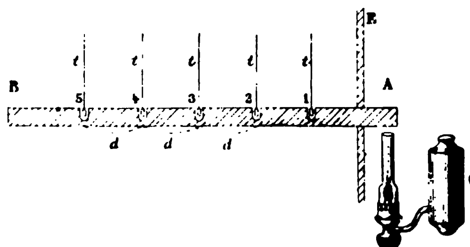
$$\frac{k'}{k} = \frac{h'}{h}\frac{p'}{p}\frac{s}{s'}\frac{d'^2}{d^2}\mathrm{M}^2;$$

donc, si $h = h'$, on tire de là la valeur de $\frac{k'}{k}$. Si, en outre, on a soin de prendre des barres de même section et de même périmètre, et que, sur ces barres, on prenne les intervalles d et d' égaux, on aura

$$\frac{k'}{k} = \mathrm{M}^2.$$

Despretz prenait des barres cylindriques ou prismatiques de même

Fig. 298.



longueur, et les rendait, par construction, géométriquement identiques. Il y pratiquait des trous équidistants (*fig.* 298) qu'il rem-

plissait de mercure dans lequel plongeaient les réservoirs de petits thermomètres à mercure très sensibles t. Pour être sûr d'avoir réellement $h = h'$, c'est-à-dire d'avoir des barres ayant mêmes conductibilités extérieures, Despretz les enduisait de noir de fumée.

L'extrémité A de la barre était chauffée à l'aide d'un quinquet C dont le rayonnement vers les parties froides était arrêté par un écran E.

Dès que l'on commençait à chauffer, les températures aux points 1, 2, 3, 4, 5 s'élevaient graduellement; il arrivait un moment où elles devenaient stationnaires. Le régime permanent était alors atteint. On avait mesuré au préalable l'intervalle d; on notait les températures indiquées par les thermomètres t; on recommençait l'expérience avec une deuxième barre, et l'on avait ainsi tout ce qui était nécessaire pour calculer le rapport $\frac{k'}{k}$ des coefficients de conductibilité des deux barres soumises à l'étude.

L'objection capitale que l'on peut faire à ces expériences est la suivante ; aucune précaution n'était prise pour assurer la constance de température de l'air environnant immédiatement la barre, et cependant la théorie de l'expérience suppose cette température absolument invariable. Le mode de chauffage de l'extrémité A manquait de précision; enfin rien ne permettait d'affirmer que les barres percées de trous qu'employait Despretz se comportaient comme des barres continues de mêmes dimensions extérieures.

Pour lever toutes ces incertitudes, MM. Wiedemann et Franz ont repris cette méthode en en perfectionnant les détails.

Pour donner à leurs barres, travaillées au tour, les mêmes conductibités extérieures h, ils les recouvraient d'une couche d'or électrolytique soigneusement polie; cette surface avait le double avantage d'être inaltérable et d'avoir un pouvoir émissif extrêmement faible. La température ambiante était connue avec exactitude, par ce fait que les barres plongeaient dans une cloche entourée d'eau.

L'extrémité prise comme origine était chauffée par un courant de vapeur d'eau bouillante, et les températures étaient mesurées, non plus par des thermomètres à mercure plongeant dans des trous, mais par des pinces thermo-électriques appliquées contre la barre, et qu'on pouvait déplacer sur toute sa longueur. Une étude préalable du couple thermo-électrique et du galvanomètre avait permis de construire une table donnant la température en fonction de la déviation.

Le Tableau suivant contient les coefficients d'un emploi fréquent :

		W. et F.
Argent	97,3	100
Cuivre	89,7	73,6
Or	100	53,2
Laiton	»	23,6
Zinc	3,30	19,10
Étain	30,39	14,5
Fer	37,43	11,9
Acier	»	11,6
Plomb	17,96	8,5
Platine	98,10	8,4

On adopte généralement dans les calculs les nombres de Wiedemann et Franz.

341. — MÉTHODE DU MUR.

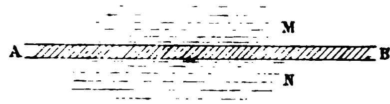
1° **Expériences de Péclet**. — La méthode de la barre, tant que l'on ne connaît pas exactement la valeur de h, coefficient de conductibilité extérieure, ne donne que des conductibilités relatives. La mesure de h est d'ailleurs délicate et incertaine.

La méthode du *mur*, beaucoup plus directe, se prête mieux à la mesure absolue de la conductibilité, c'est-à-dire d'une quantité de chaleur traversant une épaisseur donnée dans un temps donné. Aussi est-ce en employant cette méthode que l'on a cherché d'abord à mesurer les coefficients de conductibilité thermique des différents corps en valeur absolue.

Les premières recherches sont dues à Péclet, qui a essayé de réaliser expérimentalement les conditions de la définition.

Il prenait une lame de plomb AB (*fig.* 299), d'épaisseur e : cette lame formait le fond d'une boîte à parois mauvaises conductrices, contenant de l'eau froide, M. Cette boîte plongeait dans un bain d'eau chaude. Dans ces conditions, l'eau froide contenue dans la boîte s'échauffait sous l'action de la chaleur transmise par conductibilité à travers la plaque AB.

Fig. 299.



Indépendamment de la cause d'erreur considérable résultant du fait que les parois de la boîte calorimétrique laissaient passer de la chaleur, il y en avait une autre beaucoup plus grave résultant

de la *résistance au passage*. Donnons quelques explications sur ce point.

Quand Péclet eut fait ses déterminations sur différents métaux avec l'appareil dont nous venons de donner le principe, et qu'il compara entre eux les résultats obtenus, il arriva à cette conclusion surprenante : que les métaux avaient tous la même conductibilité thermique. Ce résultat est évidemment inadmissible, car il est en contradiction formelle avec l'expérience journalière qui montre, au contraire, que les métaux sont inégalement conducteurs, expérience confirmée d'ailleurs par l'appareil d'Ingenhousz.

La cause d'erreur tient à ce que Péclet admettait sans preuve directe que la température de la face de contact d'une plaque métallique avec un bain liquide était égale à la température du liquide. Or il n'en est rien : une plaque métallique baignée de liquide sur ses deux faces constitue un système complexe, formé de la lame elle-même et de deux couches, infiniment minces, en contact immédiat avec les deux surfaces métalliques. Dans ces conditions, la résistance opposée par l'épaisseur de métal au passage de la chaleur est très faible, relativement à celle de deux couches adhérentes; de là les résultats inexacts trouvés par Péclet à la suite de ces expériences.

Pour que la méthode du *mur* donnât de bons résultats, il fallait donc éviter avec soin cette cause d'erreur assez grave pour cacher entièrement le phénomène à mesurer. C'est ce qu'a fait M. Alphonse Berget.

2° **Expériences de M. A. Berget.** — Pour éviter la résistance au passage, M. Berget a mesuré la différence des températures en deux points pris à l'intérieur du mur, A et B. Le mur étant indéfini, la distribution des températures est linéaire, et, de la différence de températures entre A et B, on pourra déduire la différence des températures extrêmes en α et β; il suffit, pour cela, de connaître le rapport des ordonnées verticales. Comme c'est la différence qu'il importe de connaître pour la mesure des coefficients k, cette différence sera connue, quelle que soit la chute de température qui se produise au contact des deux faces extrêmes et des deux bains destinés à échauffer l'une et refroidir l'autre (*fig.* 300).

Les quantités de chaleur transmises étaient mesurées directement par la méthode de la fusion de la glace, prise sous deux formes différentes. Dans la première, la glace fondue était évaluée par le calorimètre de Bunsen; dans la seconde, par des pesées.

M. Berget a commencé par mesurer en valeur absolue la conductibilité thermique du mercure, parce qu'on peut toujours avoir ce métal identique à lui-même. Mais il fallait réaliser le mur, sans pourtant employer de trop grandes masses de mercure. On a eu recours pour cela à un dispositif qui rappelle l'*anneau de garde* de l'électromètre absolu de Lord Kelvin, et auquel M. Berget a donné le nom de *cylindre de garde*.

Fig. 300.

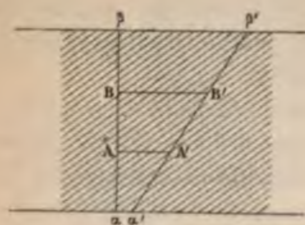
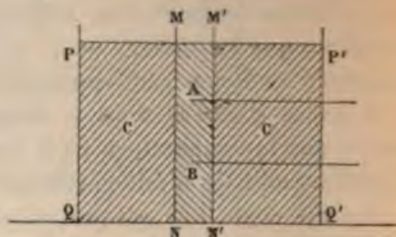


Fig. 301.



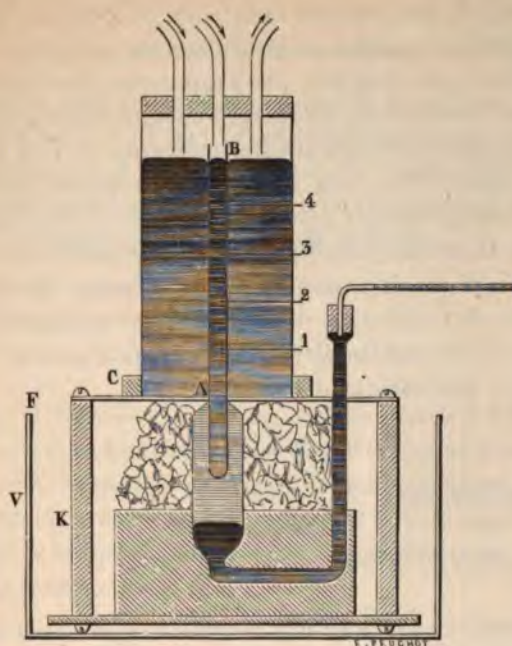
Une colonne de mercure de longueur l est contenue dans un tube MNM′N′, de section s (*fig.* 301), mais ce tube est placé concentriquement à un manchon PQP′Q′ rempli également de mercure et protégé contre le rayonnement extérieur par une enveloppe d'ouate. Dans ces conditions, s'il y a une faible déperdition sur les bords, il n'y en a pas au centre, et la colonne peut être considérée comme faisant partie d'un *mur* indéfini. Si nous chauffons la face supérieure PP′ à une température T par un bain de vapeur, en maintenant à 0° la face inférieure à l'aide d'une masse de glace, la mesure des dimensions de la colonne centrale, de la différence des températures de ses faces et de la quantité de chaleur qui la traverse pendant un temps donné permet de calculer le coefficient k.

Voici la disposition de l'appareil employé (*fig.* 302).

La pièce principale est un calorimètre de Bunsen dont l'éprouvette centrale est prolongée verticalement en AB, passe à travers un trou de même diamètre qu'elle, percé dans une plaque de tôle C. Cette plaque repose sur trois colonnes K, de façon à être tangente en A à la partie supérieure du réservoir de l'instrument. Concentriquement à l'éprouvette AB, et fixé à la plaque de tôle par de l'arcanson se trouve le manchon extérieur qui doit contenir le mercure destiné à constituer le cylindre de garde : ce manchon a 27^{cm} de hauteur et le tube central 23^{cm} au-dessus du point A. Une mince bande de baudruche

est collée en AA à la fois sur le tube central et sur la plaque de fer, de façon à empêcher le mercure du cylindre de fer de s'échapper à travers la fissure annulaire existant entre le tube AB et les bords de

Fig. 302.



l'orifice A. Le manchon extérieur, de 8^{cm} de diamètre, était fermé en haut par un large bouchon de liège percé de plusieurs trous que traversaient des tubes de verre destinés à amener la vapeur d'eau nécessaire au chauffage de la face supérieure, et à la conduire ensuite à un condensateur; la vapeur était fournie par une chaudière de cuivre.

Quatre trous étaient percés dans les parois des deux manchons, et en regard les uns des autres; ils donnaient passage aux appareils thermométriques destinés à mesurer les températures aux différents points de l'axe de la colonne centrale. Ces appareils étaient des fils de fer isolés à la gutta et dont l'extrémité plongeant dans le mercure était seule mise à nu. On voit ces fils sur la figure, où ils sont désignés par les chiffres 1, 2, 3, 4. Deux fils constituaient, avec le mercure interposé, un couple thermo-électrique dont il suffisait de mesurer la force électromotrice pour connaître la différence de

leurs températures, grâce à une étude préalable de ces couples.

Des jaugeages très précis avaient fait connaître le diamètre de la colonne centrale et le volume des divisions de la tige. De plus, par des expériences préliminaires très nombreuses, M. Berget s'était assuré que la distribution des températures était bien linéaire, tout le long de l'axe, ce qui prouvait l'efficacité du cylindre de garde.

La marche d'une expérience est la suivante :

On commence par congeler, par évaporation du chlorure de méthyle, l'eau du calorimètre ; on remplit ensuite l'appareil de mercure, on entoure de glace le récipient calorimétrique, et l'on fait passer le courant de vapeur d'eau. On attend que le régime permanent soit établi (des essais préalables ont fait connaître le temps nécessaire) et l'on fait alors la lecture simultanée du chronomètre et de la tige du calorimètre, ainsi que de la mesure de la différence des températures en deux points de la colonne dont la distance verticale a été préalablement relevée au cathétomètre. Il n'y a qu'à porter les nombres obtenus dans la formule qui définit k

$$Q = k\frac{s(t'-t)}{l}x.$$

M. Berget a trouvé ainsi

$$k = 0,02015,$$

en unités absolues C. G. S.

Pour confirmer ce résultat, il a modifié l'appareil; il en a diminué la hauteur et augmenté le diamètre de façon à augmenter la quantité de chaleur passant pendant un temps donné, et il a mesuré cette quantité de chaleur par les diminutions de poids d'un cylindre de glace appliqué contre une plaque de tôle qui servait de base à la colonne centrale. La cylindricité parfaite du bloc de glace destiné à servir d'appareil calorimétrique faisait disparaître le principal reproche que l'on est en droit d'adresser aux méthodes dans lesquelles on mesure une quantité de chaleur par un poids de glace fondue. Assurément, quand la glace est en fragments inégaux de forme, dont le volume et la surface changent à chaque moment, on ne saurait admettre que ces morceaux, dont la forme a varié pendant l'expérience, retiennent par capillarité autant d'eau après la mesure qu'auparavant, tandis qu'on peut très bien faire cette hypothèse dans le cas d'un cylindre dont la fusion partielle ne se traduit que par une diminution de hauteur, dont le rayon demeure constant et dont les génératrices restent toujours verticales.

Les résultats obtenus concordent d'ailleurs, d'une façon remarquable, avec ceux obtenus par la première méthode. Celle-ci avait donné pour le mercure

$$k = 0{,}02015;$$

la seconde a fourni

$$k = 0{,}02001.$$

342. — VARIATION DU COEFFICIENT k AVEC LA TEMPÉRATURE.

Nous avons vu que, l étant la longueur de la colonne, dont l'extrémité inférieure est à 0°, T sa température supérieure, si l'on désigne par z et t l'ordonnée et la température d'un point intermédiaire, la distribution des températures cessera d'être linéaire, si k est fonction de t, et que, en supposant que k soit de la forme

$$k = k_0(1 + \alpha t),$$

on doit avoir

$$\frac{\alpha}{2} = -\frac{Tz - tl}{T^2 z - t^2 l};$$

il suffit donc, si T devient considérable, de mesurer avec soin l'ordonnée z et la température t d'un point de la colonne pour en déduire le coefficient α de variation du nombre k pour un degré. M. Berget a étudié les variations de k entre 0° et 300° et a trouvé que k diminuait à mesure que la température s'élevait, les diminutions étant représentées par la formule

$$k = k_0(1 - 0{,}00045\,t).$$

343. — CONDUCTIBILITÉ DES MÉTAUX.

La méthode précédente est générale et s'applique aux métaux, en comparant leur conductibilité à celle du mercure; voici de quelle manière :

Considérons deux murs de nature différente (*fig.* 303) superposés et représentons-les par les chiffres (1) et (2). Supposons le régime permanent atteint dans chacun d'eux : le flux de chaleur traversant l'unité des surfaces de chaque mur pendant l'unité de temps sera alors le même, et

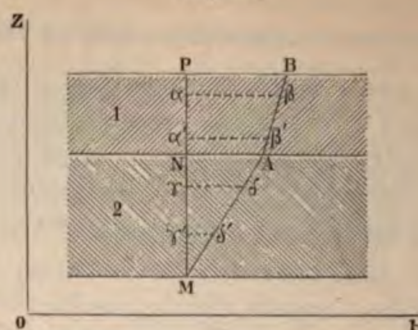
$$k\frac{dt}{dz} = k_1\frac{dt_1}{dz_1},$$

d'où

$$\frac{k}{k_1} = \frac{\dfrac{dz}{dt}}{\dfrac{dz_1}{dt_1}}.$$

Or $\frac{dz}{dt}$ n'est autre que le coefficient angulaire de la droite AB représentant la distribution linéaire des températures dans le mur (1), $\frac{dz_1}{dt_1}$ est le coefficient angulaire de la droite AM correspondante dans

Fig. 303.



le mur (2). Le rapport des coefficients de conductibilité thermique des deux substances est donc égal au rapport des coefficients angulaires des deux droites correspondantes; on connaît k, pour le mercure, en valeur absolue : on en déduira donc facilement k pour les autres métaux. Il suffira de superposer deux cylindres munis chacun de leur anneau de garde : l'un, inférieur, en métal, dont la base reposera sur de la glace; l'autre, supérieur, en mercure, dont la face libre est chauffée par un courant de vapeur. Les mesures de température se font par le procédé thermo-électrique déjà indiqué.

Voici l'ensemble des résultats :

Métaux.	k.
Cuivre	1,0405
Zinc	0,303
Laiton	0,2625
Fer	0,1587
Étain	0,151
Plomb	0,0810
Antimoine	0,042
Bismuth	0,0201

M. Neumann, puis M. Angström, ont trouvé pour la conductibilité du fer rapportée au mètre carré, au millimètre d'épaisseur, à la seconde et à la grande calorie, les nombres 16,40 et 16,30 fort peu éloignés des nombres de M. Berget.

Les expériences de Péclet sur le plomb l'avaient conduit à repré-

senter la conductibilité de ce métal rapportée au mètre carré, au mètre d'épaisseur, à l'heure et à la grande calorie, par le nombre 13,83.

D'après les nombres de Wiedemann et Franz, la conductibilité du fer serait, avec les mêmes unités,

$$13,83\,\frac{11,9}{8,5} = 19,4$$

et, avec les unités d'Angström,

$$\frac{19,1}{3600}\cdot 1000 = 5,39.$$

Les nombres modernes correspondent donc à une transmission environ triple de celle indiquée par les nombres de Péclet.

M. Berget a en outre, dans toutes ses expériences, en étudiant avec soin la durée d'établissement du régime permanent, vérifié la loi du carré des longueurs, énoncée par Fourier.

344. — CONDUCTIBILITÉ DES CRISTAUX.

La théorie que nous avons exposée et les recherches expérimentales que nous avons résumées ont porté sur des corps isotropes, dans lesquels la chaleur se transmet d'une façon identique dans toutes les directions. Il n'en est plus de même dans les corps cristallisés.

Lamé a démontré que les surfaces isothermes sont, dans ce dernier cas, des ellipsoïdes au lieu d'être des sphères : ce résultat a été vérifié par de Senarmont, puis par M. Jannettaz. Nous résumerons brièvement le dispositif de ce dernier savant.

L'appareil de M. Jannettaz se compose, en principe, d'une plateforme sur laquelle on place une lame des corps dont on veut étudier la conductibilité, enduite d'une mince couche de cire. On met alors au contact du centre de la lame une petite sphère de platine, grosse comme une tête d'épingle, placée au sommet de l'angle d'un fil de platine replié en V et parcouru par un fort courant. La petite boule rougit et fond la cire sur une aire : circulaire si la lame est taillée dans un corps isotrope, elliptique si elle est taillée dans un cristal non cubique.

Le fil de platine traverse un écran creux, à circulation d'eau, qui empêche les parties chaudes du fil de fondre la cire par rayonnement.

...ent que, si l'on taille dans des cristaux des ... ées et qu'on étudie chaque fois l'excentri... ...que ainsi obtenue, on puisse en déduire les ...xes de l'ellipsoïde de Lamé.

...ainsi les conséquences des théories de Lamé ... de de Senarmont, et a trouvé que, pour ...me cubique, l'ellipse se réduit à un cercle; ...'ellipsoïde devient une sphère; il est de ré... ...système, et a ses trois axes inégaux pour les ...tre autres systèmes.

...urnir aussi des mesures relatives des coeffi... ...hermique, si les mesures durent des temps ...e pour les corps mauvais conducteurs comme ...mis à son auteur de constater que, si l'on ...ssion prolongée dans un sens, à détruire la ...'un corps, en un mot, si l'on y produit une ...celle des ardoises, la conductibilité augmente ...à la schistosité, pour diminuer dans le sens per-

... CONDUCTIBILITÉ DES LIQUIDES.

...rès mauvais conducteurs de la chaleur : la dé... ...ntale de ce fait est extrêmement facile à faire. ...hauffer un liquide par sa surface libre. De cette ...s couches ne peut pas se faire par convection. ...de densité plus faible sont justement à la partie

...vait varié de beaucoup de manières la forme de ...frappé de la faible conductibilité des liquides, la ...a fait nulle. C'est à Despretz que revient le mérite ...une manière indiscutable la conductibilité des ...r mesurée et d'avoir montré qu'ils suivent, comme ...a théorie de Fourier.

...ne à contenir le liquide soumis à l'expérience doit ...mauvaises conductrices : Despretz avait fait faire un ...rique de bois, ayant 1m de hauteur et cerclé de bandes ...pouvait serrer par des écrous. Des ouvertures étaient ...sa paroi, sur une même génératrice, et laissaient passer ...ètres très sensibles. L'appareil était rempli d'eau, et ...reposait un vase de cuivre, dans lequel circulait inces-

samment de l'eau chaude. Des écrans entouraient le tonneau et le préservaient du rayonnement.

Des expériences duraient 18, 24 ou 36 heures. On notait les excès de température des thermomètres une fois le régime permanent établi, et l'on put constater ainsi que ces excès suivaient la loi déduite de la théorie de Fourier

$$t = \mathrm{A}e^{-x}.$$

FIN DU TOME I.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME I

INSTRUMENTS DE MESURE.

Pages.

PESANTEUR.

LOIS DE LA CHUTE DES CORPS.

GRAVITATION UNIVERSELLE.

ÉLASTICITÉ.

STATIQUE DES LIQUIDES ET DES GAZ. ÉCOULEMENT DES LIQUIDES.

CHAP. I. — HYDROSTATIQUE.

CHAP. II. — COMPRESSIBILITÉ DES LIQUIDES.

CHAP. III. — CAPILLARITÉ.

CHAP. IV. — ÉQUILIBRE ET ÉLASTICITÉ DES GAZ.

CHAP. V. — COMPRESSIBILITÉ DES GAZ.

CHAP. VI. — MÉLANGE DES GAZ.

CHAP. VII. — MANOMÈTRES.

CHAP. VIII. — MACHINES A RARÉFIER ET A COMPRIMER LES GAZ.

Chap. IX. — Écoulement des liquides.

CHALEUR.

DILATATIONS.

Chap. I. — Faits généraux. — Définitions.

Chap. II. — Thermomètres a mercure. — Dilatomètres.

Chap. III. — Dilatation des liquides.

Chap. IV. — Dilatation des solides.

CHAP. V. — DILATATION DES GAZ.

CHAP. VI. — THERMOMÉTRIE.

CHAP. VII. — DENSITÉ DES SOLIDES ET DES LIQUIDES.

CHAP. VIII. — DENSITÉ DES GAZ ET POIDS DU LITRE D'AIR.

CALORIMÉTRIE.

CHAP. I. — CHALEUR SPÉCIFIQUE DES SOLIDES ET DES LIQUIDES. MÉTHODE DES MÉLANGES.

CHAP. II. — CHALEUR SPÉCIFIQUE DES GAZ.

THERMODYNAMIQUE.

Chap. I. — Préliminaires.

Chap. II. — Principe de Mayer ou de l'équivalence.

Chap. III. — Principe de Carnot.

Chap. IV. — Applications.

CHANGEMENTS D'ÉTAT.

Chap. I. — Généralités.

Chap. II. — Fusion. — Solidification. — Dissolution. Cristallisation.

Chap. III. — Chaleur de fusion.

Chap. IV. — Formation des vapeurs. — Vaporisation. — Ébullition. Caléfaction.

Chap. V. — Forces élastiques des vapeurs.

Chap. VI. — Hygrométrie.

Chap. VII. — Densité des vapeurs.

CHAP. VIII. — LIQUÉFACTION DES GAZ.

CHAP. IX. — CHALEURS DE VAPORISATION.

PROPAGATION DE LA CHALEUR.

CHAP. I. — RAYONNEMENT. — LOIS DU REFROIDISSEMENT.

CHAP. II. — CONDUCTIBILITÉ THERMIQUE.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME I.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,

37588 Quai des Grands-Augustins, 55.

37588 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.





